COURS DE MECANIQUE APPLIQUEE PAR M. BRESSE: HYDRAULIQUE

Jacques Antoine Charles Bresse







COURS

DE

MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

Paris. — Imprimerie de MALLET-BACHELIER, rue du Jardinet, 12.

COURS

DE

MÉCANIQUE APPLIQUÉE,

PROFESSÉ

A L'ÉCOLE IMPÉRIALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

PAR M. BRESSE,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur de Mécanique à l'École des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique, Membre de la Société Philomathique de Paris.

SECONDE PARTIE.

HYDRAULIQUE.



PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1860

AVANT-PROPOS.

En commençant la première Partie de ce Cours, consacrée à la Résistance des Matériaux, nous avons déjà fait connaître sommairement les principales questions qui s'y trouvent traitées et les axiomes fondamentaux qui permettent d'en obtenir la solution; il nous reste ici à remplir la même tâche pour l'Hydraulique, objet de la seconde Partie.

Dans la Mécanique rationnelle, on prend pour point de départ quelques propositions, en très-petit nombre, empruntées à la philosophie naturelle beaucoup plus qu'à l'observation, qui doit seulement les vérifier dans leurs conséquences plus ou moins indirectes et éloignées : sur cette base le raisonnement seul construit en entier l'édifice scientifique. Quand il s'agit des diverses branches de la Mécanique appliquée, et particulièrement de l'Hydraulique, l'expérience a une part beaucoup plus grande, car on y puise la connaissance des faits qui servent à guider la théorie et l'aident à résoudre, par des aperçus approximatifs, les problèmes que leur complication rend encore inabordables à une analyse rigoureuse. Mais ce n'est point une raison pour dédaigner la théorie : sans elle, les faits d'observation seraient plus difficilement compris dans leurs détails, étudiés et classés; souvent on n'en saisirait pas les lois, ou bien l'on ne saurait pas choisir les formules empiriques les mieux appropriées pour représenter tel ou tel

phénomène. Aussi nous avons cru bon de commencer l'Hydraulique par un résumé des notions les plus importantes de la Mécanique rationnelle des fluides, laquelle comprend, comme on le sait, l'Hydrostatique et l'Hydrodynamique.

L'Hydrodynamique est malheureusement encore dans l'enfance. On établit bien les équations générales, aux différences partielles, qui représentent le mouvement d'un fluide quelconque; mais, comme on ne sait pas les intégrer, on n'en fait pour ainsi dire aucune application : on pourrait même arriver par d'autres voies, plus directes peut-être, à quelques conséquences utiles qu'on a coutume d'en tirer et qui concernent surtout le mouvement permanent. Malgré cela, nous en avons reproduit la démonstration, parce qu'elle n'est ni longue ni difficile, et qu'il y a toujours utilité à montrer aux élèves, par des exemples, comment les problèmes de Physique mathématique peuvent se mettre en équation, alors même que la solution devrait rester inachevée. Le théorème le plus fécond en applications, pour la suite de notre Cours, est celui de D. Bernoulli, qui donne une relation entre certaines quantités relatives à chaque point d'un même filet liquide en mouvement permanent. Ce théorème n'a été d'abord démontré par son auteur que dans le cas des fluides parfaits, lorsqu'on peut négliger la *viscosité* ou cohésion des molécules entre elles : en le présentant comme une conséquence du théorème de la puissance vive et du travail, on voit facilement qu'il s'étend au cas des fluides naturels, moyennant l'introduction d'un terme de plus dans l'équation, pour représenter le travail des forces dues à la viscosité. Un nouveau terme s'ajoute encore quand on considère un mouvement relatif, au lieu d'un mouvement absolu : c'est (sauf un facteur constant) le travail de la force d'inertie du mouvement d'entraînement. Ainsi modifié et complété, le théorème de Bernoulli nous a fourni la solution d'un grand

nombre de problèmes, et l'on sera peut-être tenté de trouver que nous en avons fait un usage trop étendu, car d'autres méthodes auraient été parfois avantageuses sous le rapport de la simplicité. Mais le cas inverse a lieu encore plus souvent, et d'un autre côté l'uniformité ordinaire des procédés de démonstration, dans un Cours comme le nôtre, nous semble présenter des avantages auxquels il nous aurait coûté de renoncer.

Les préliminaires de théorie générale une fois posés, nous abordons les applications proprement dites. La première consiste dans l'étude des circonstances que présente l'écoulement d'un liquide par un orifice percé dans un réservoir entretenu à un niveau constant. Ici la théorie nous fournit seulement une expression satisfaisante de la vitesse possédée par le liquide un peu au delà de l'orifice ; mais, hors le cas d'écoulement par un ajutage rentrant, elle ne peut conduire à la valeur du volume dépensé dans un temps donné, parce qu'on n'a pas encore su déterminer la forme des trajectoires que suivent les molécules, forme inconnue à priori et qui joue un rôle important, car elle donne lieu à la contraction de la veine. Il y a donc là une lacune que l'expérience seule doit combler quant à présent. Nous avons fait connaître les résultats obtenus par beaucoup d'hydrauliciens distingués, notamment par M. Lesbros, auquel nous avons emprunté plusieurs remarques utiles et une série de coefficients de dépense.

Parmi les questions qui se présentent dans le service des Ingénieurs et qui exigent des connaissances en Hydraulique, celles qu'ils ont le plus souvent à étudier concernent les conduites d'eau et les eaux courantes. La théorie de ces questions se fonde sur l'expression de la force de frottement mutuel entre le liquide et la paroi qui le renferme. Les expressions données par Prony et Eytelwein, d'après d'anciennes expériences, contenaient, comme on le sait, deux termes, le pre-

mier proportionnel à la vitesse moyenne, le second au carré de la même quantité. C'était là une cause de complication dans les calculs, que plusieurs personnes avaient déjà cherché à éviter par la suppression du premier terme; mais cette simplification laissait du doute et n'était point universellement admise. Aujourd'hui les recherches expérimentales de feu M. Darcy semblent avoir tranché la difficulté, et l'on peut définitivement supprimer le terme en question, au moins quand il s'agit d'une conduite fonctionnant depuis un temps suffisant, ou d'un canal découvert : nous considérons donc le frottement comme simplement proportionnel au carré de la vitesse moyenne. Mais M. Darcy a démontré, en outre, que le coefficient de la proportionnalité varie avec les dimensions de la section transversale. Ces conditions nouvelles nous ont obligé à revoir les formules usitées, et à en modifier quelques-unes. Nous avons profité d'ailleurs des ingénieuses méthodes créées par M. Dupuit pour résoudre divers problèmes auxquels donnent lieu les conduites à diamètre ou à débit variable d'une section à une autre, ainsi que les conduites à plusieurs branches; à son exemple, nous avons intégré l'équation différentielle du mouvement permanent varié dans un canal découvert, à pente de fond constante, ayant une section très-large et comparativement peu profonde, mais nous nous sommes passé de quelques hypothèses restrictives qui nuisaient à la généralité des résultats obtenus. On trouve ainsi une solution assez simple et souvent applicable de la question qui consiste à rechercher le profil en long d'un cours d'eau en amont d'un barrage : pour les cas plus généraux, auxquels elle ne convient pas, on a les méthodes approximatives indiquées par M. Belanger, auteur des premières recherches sur ces matières difficiles.

Les derniers chapitres comprennent le mouvement des gaz,

la résistance des fluides, l'étude des moteurs hydrauliques et de quelques machines à élever l'eau. Enfin, le Cours se termine par cinq tables numériques destinées à faciliter divers calculs que peuvent exiger les applications des formules.

A part un très-petit nombre d'exceptions, nous nous sommes borné à étudier les mouvements remplissant la condition de permanence. Ce n'est pas que l'écoulement par orifices et surtout le régime des rivières ne présente des cas très-importants où cette condition n'est pas satisfaite : mais alors la théorie n'a pour ainsi dire plus rien à enseigner, et l'hydraulicien doit céder la place à l'ingénieur.

Nous avons fait au Cours de notre prédécesseur, M. Belanger, de nombreux emprunts, dans tout le courant de notre ouvrage, mais principalement dans le chapitre consacré aux roues hydrauliques. M. Belanger a, pour sa part, largement contribué à rectifier des erreurs accréditées au sujet de ces moteurs, il en a perfectionné quelques-uns dans leur construction, et enfin il en a présenté la théorie d'une manière aussi simple qu'élégante. Si nous n'avons pas en toute occasion indiqué ce que nous lui avons pris, c'est par crainte de ne pas toujours connaître le véritable auteur de chaque découverte : l'histoire de la science est en général difficile à faire, et nous avons regardé la tâche comme au-dessus de nos forces. Mais nous espérons que notre ancien professeur nous pardonnera nos omissions, avec sa bienveillance habituelle; l'autorité de son nom dans la science hydraulique est trop bien reconnue de tous, pour que notre témoignage pût rien lui faire gagner.

Les formules données en Hydraulique, pour représenter les faits d'expérience, n'étant pas toujours homogènes, ne sont vraies qu'avec certaines unités de temps, de longueur, etc;

si ces unités changeaient, les coefficients numériques des formules devraient également subir une modification. Sauf indication expresse et contraire, nous avons constamment adopté les unités suivantes :

Pour les longueurs, le mètre; pour les surfaces, le mètre carré; pour les volumes, le mètre cube;

Pour les temps, la seconde sexagésimale, c'est-à-dire $\frac{1}{86400}$ de jour solaire moyen;

Pour les forces, le kilogramme.

Quant aux angles, les degrés, minutes et secondes se rapportent à la division sexagésimale de la circonférence, suivant l'usage ordinaire.

TABLE DES MATIÈRES.

SECONDE PARTIE.

HYDRAULIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

HYDROSTATIQUE ET HYDRODYNAMIQUE RATIONNELLES.

CHAPITRE DEUXIÈME.

ÉCOULEMENT PERMANENT D'UN LIQUIDE PESANT ET HOMOGÈNE PAR UN ORIFICE PERCÉ DANS UN RÉSERVOIR.

CHAPITRE TROISIÈME.

ÉCOULEMENT PERMANENT DE L'EAU DANS LES TUYAUX DE CONDUITE.

CHAPITRE QUATRIÈME.

DU MOUVEMENT PERMANENT DE L'EAU DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS.

CHAPITRE CINQUIÈME.

DU MOUVEMENT DES GAZ.

CHAPITRE SIXIÈME.

DE LA PRESSION RÉCIPROQUE DES FLUIDES ET DES SOLIDES, PENDANT LEUR MOUVEMENT RELATIF; MESURE DE LA VITESSE DES COURANTS.

CHAPITRE SEPTIÈME.

DES MOTEURS HYDRAULIQUES ET DE QUELQUES MACHINES A ÉLEVER L'EAU.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

COURS

DE

MÉCANIQUE APPLIQUÉE,

PROFESSÉ

A L'ÉCOLE IMPÉRIALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

SECONDE PARTIE.

HYDRAULIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

HYDROSTATIQUE ET HYDRODYNAMIQUE RATIONNELLES.

§ I. — Rappel des principales notions d'Hydrostatique.

1. *Objet de l'Hydrostatique, de l'Hydrodynamique, de l'Hydraulique.* — Les deux parties de la Mécanique rationnelle, spécialement consacrées à l'équilibre et au mouvement des fluides, ont respectivement pris les noms d'Hydrostatique et d'Hydrodynamique. La première forme une doctrine assez complète; mais il n'en est pas de même de la seconde. Aujourd'hui encore, par suite de difficultés d'analyse que les efforts des géomètres n'ont pas réussi à surmonter, elle doit se borner à des généralités plus ou moins vagues et demeurer une science presque purement spéculative.

L'Hydraulique est à l'Hydrostatique et à l'Hydrodynamique ce que la Mécanique appliquée est à la Mécanique rationnelle. Moins préoccupé d'établir des théories rigoureuses que de pourvoir aux besoins de la pratique, l'hydraulicien cherchera

les lois de l'équilibre et du mouvement des fluides, afin d'en déduire les moyens les plus convenables pour diriger, conduire et élever les fluides dans les divers cas qui peuvent se présenter à un ingénieur. Aussi devra-t-il résoudre par des procédés quelconques, par des considérations théoriques et au besoin par les indications de la Physique expérimentale, bien des questions que les géomètres ont provisoirement abandonnées. D'ailleurs, quand même la théorie ne ferait pas quelquefois défaut, l'expérience n'en serait pas moins toujours une sanction nécessaire pour les déductions de toute science qui ne se compose pas uniquement d'abstractions; car pour soumettre au calcul les lois du monde réel, il est impossible de ne pas faire quelque hypothèse, plus ou moins incertaine à priori, sur la constitution intime des corps.

Quoique ce Cours soit spécialement consacré à l'Hydraulique, nous le commencerons par l'étude succincte de la Mécanique rationnelle des fluides; cela nous permettra d'établir plusieurs théorèmes généraux dont nous aurons à faire un fréquent usage. En premier lieu, nous rappellerons les principales notions d'Hydrostatique.

2. *Définition de la fluidité parfaite; division des fluides en deux classes.* — On appelle *fluides* une classe de corps dont les molécules jouissent d'une très-grande mobilité les unes par rapport aux autres. En supposant cette qualité poussée à l'extrême, nous la définirons par les faits suivants : 1° la résistance opposée par les actions moléculaires au glissement relatif, soit de deux portions contiguës d'un même fluide, soit d'un fluide sur une surface solide, est une force nulle; 2° il en est de même dans le cas d'une disjonction analogue à l'extension simple, c'est-à-dire consistant dans l'écartement de deux plans parallèles suivant la normale commune; 3° enfin, tout changement de forme qui laisserait le volume constant, et qui, par conséquent, n'entraînerait pas une variation de la distance entre les particules du corps, s'effectue sans qu'il y ait, en somme, production d'aucun travail de la part des ressorts moléculaires. C'est en cela que consistera pour nous la *fluidité parfaite*.

Il n'existe pas de fluides parfaits dans toute la rigueur du

mot. Tous les gaz et la plupart des liquides que l'on peut avoir à considérer habituellement, comme l'eau, le mercure, etc., s'approchent sans doute beaucoup de la fluidité parfaite; cependant ils sont doués d'une certaine viscosité ou cohésion facile à mettre en évidence par les expériences les plus simples, qui s'oppose dans une certaine mesure aux disjonctions et déformations dont nous parlions tout à l'heure, et dont il est indispensable de tenir compte en étudiant divers problèmes particuliers, comme on le verra plus tard. Mais cette nécessité n'existe pas quand on ne considère que des fluides en équilibre; car toutes les expériences tendent à démontrer que les forces produites par la viscosité ou cohésion entre les molécules fluides, ou par l'adhérence de celles-ci avec les molécules solides en contact physique avec elles, deviennent sensiblement nulles quand il s'agit de fluides à l'état de repos absolu ou relatif.

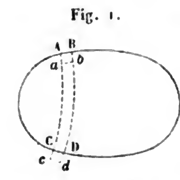
On distingue ordinairement deux classes de fluides : les liquides et les gaz. Les premiers sont caractérisés par une compressibilité très-faible, et nous la supposerons théoriquement nulle, ce qui ne peut entraîner que des erreurs assez petites dans les applications ordinaires. Les seconds sont, au contraire, éminemment compressibles, et reprennent leur volume primitif quand on supprime la force qui avait produit la compression; pour cette raison, ils sont aussi nommés *fluides élastiques*.

3. *De la pression en un point d'un fluide en repos; égalité de la pression en tous sens.* — Lorsqu'un fluide est en repos absolu ou relatif dans un vase, il est facile de constater par une expérience directe qu'il supporte une action répulsive de la part de chaque élément superficiel infiniment petit de la paroi. Cette force provient en réalité des répulsions mutuelles entre les molécules fluides et celles du vase, et nous faisons une fiction quand nous disons qu'elle est exercée par la surface géométrique de la paroi; mais au fond cela est peu important, et le langage se trouve simplifié. Quoi qu'il en soit, la force dont nous venons de parler, divisée par la surface sur laquelle elle s'exerce, est ce qu'on nomme *pression par unité de surface* sur l'élément de paroi dont il s'agit.

Considérons maintenant un point quelconque M de la masse fluide, et imaginons autour de ce point une surface fermée quelconque ayant ses dimensions infiniment petites. Le fluide contenu à l'intérieur de cette surface étant en équilibre dans un vase idéal formé par le fluide extérieur, chaque élément superficiel de son contour supporte, comme on vient de le voir, une certaine pression par unité de surface. Cette pression est ce qu'on appelle *pression rapportée à l'unité de surface*, ou simplement pression du fluide au point M. Mais pour que la définition précédente offre un sens précis, il est nécessaire de montrer que la pression en M ne dépend ni de l'élément qu'on choisit sur la surface fermée infiniment petite, ni de la forme indéterminée de cette surface.

A cet effet, soit d'abord une masse fluide homogène dont chaque point supporte une force proportionnelle à sa masse et de direction constante, comme l'action de la pesanteur, par exemple. Cherchons une relation entre les pressions par unité de surface en deux points A et C de l'enveloppe (*fig.* 1). Traçons un canal très-délié ABCD, dont les deux sections normales AB, CD seraient des éléments égaux découpés en A et C sur l'enveloppe. Le fluide contenu dans ce canal, étant en équilibre, doit satisfaire à l'équation générale du travail virtuel. Or nous supposerons un mouvement virtuel dans lequel le fluide ABCD, sans changer de volume, prendrait la position *abcd*, en avançant infiniment peu dans le canal. Soient

Fig. 1.



ω les aires AB et CD;

δs les longueurs $\overline{Aa}$, $\overline{Cc}$, qui doivent être égales, attendu que l'égalité des volumes ABCD, *abcd* entraîne celle des tranches AB*ab*, CD*cd*;

p, p' les pressions par unité de surface en A et C;

Π le poids de l'unité de volume du fluide et $\frac{\Pi}{g}$ la masse correspondante;

j la force appliquée à chaque masse élémentaire, cette force étant rapportée à l'unité de masse;

h la projection de $\overline{AC}$ sur la direction de j.

Pendant le déplacement virtuel que nous avons supposé, les travaux des pressions $p\omega$, $p'\omega$, agissant en AB et CD, seront $p\omega\delta s$, $p'\omega\delta s$; les travaux des pressions latérales sur le contour AC, BD seront nuls, puisque, d'après l'hypothèse de la fluidité parfaite (n° 2), il n'y a pas de résistance au glissement du fluide intérieur au canal sur celui qui l'environne; le travail des forces intérieures du fluide ABCD serait nul, d'après la même hypothèse. Quant au travail des forces j, pour l'évaluer il faudrait, comme dans le cas de la pesanteur, multiplier la force totale appliquée au fluide ABCD par le déplacement du centre de gravité projeté sur la direction de j; on ne changera donc pas ce travail en admettant que dans le passage de la position ABCD à la position *abcd*, la partie *ab*CD est restée immobile, et que la tranche AB*ab* a pris la position CD*cd*, car dans ce mouvement les positions initiale et finale du centre de gravité du fluide ABCD ou *abcd* sont restées les mêmes, ainsi que la force totale qui le sollicite. Donc le travail en question aura pour valeur la force appliquée à la tranche AB*ab*, soit $\frac{\Pi}{g}\omega\delta s . j$, multipliée par la projection h de $\overline{AC}$ sur j. L'équation du travail virtuel sera donc

$$p\omega\delta s - p'\omega\delta s + \frac{\Pi}{g} j h \omega\delta s = 0,$$

soit, en supprimant le facteur $\omega\delta s$,

$$p - p' + \frac{\Pi}{g} j h = 0,$$

ou enfin

$$p' = p + \frac{\Pi}{g} j h. \tag{1}$$

Ce lemme préliminaire établi, revenons à la portion de fluide que nous avions isolée tout à l'heure dans une surface fermée infiniment petite, comprenant le point M. Les forces qui agissent sur cette portion étant supposées varier d'une manière continue quant à la direction et quant à l'intensité rapportée à l'unité de masse, on peut toujours, dans l'espace infiniment petit que nous considérons, les regarder comme parallèles et proportionnelles aux masses qu'elles sollicitent. Dès lors

l'équation (1) ci-dessus trouvée devient applicable, et attendu que h est ici une quantité infiniment petite, nous pouvons conclure que les pressions par unité de surface aux divers points de l'enveloppe infiniment petite sont égales, ou du moins qu'elles diffèrent infiniment peu, et qu'elles tendent vers la même limite. De plus, cette limite ne peut qu'être la même pour deux enveloppes tracées autour de M, sans quoi le fluide compris entre les deux enveloppes ne satisferait pas à l'équation (1). La pression en un point du fluide est donc une quantité bien définie.

Il résulte immédiatement de la démonstration précédente que tout élément superficiel infiniment petit tracé par le point M, considéré comme faisant partie d'une surface qui enferme une portion du fluide, supporte de la part des deux portions séparées une pression par unité de surface égale à celle de tout autre élément passant au même point. Cette propriété importante constitue ce que l'on nomme l'égalité de la pression dans tous les sens, autour d'un point du fluide. Il est bien essentiel de remarquer que tous les raisonnements que nous avons faits pour y arriver ne subsisteraient plus sans l'hypothèse de la fluidité parfaite, qui est nécessaire dans la démonstration de l'équation (1). C'est un sujet sur lequel nous aurons occasion de revenir plus loin.

4. *Équations générales de l'équilibre d'un fluide.* — Après avoir pris trois axes coordonnés rectangulaires quelconques Ox, Oy, Oz (*fig.* 2), isolons dans la masse totale, par la pensée, un élément de volume ABCDEFGH en forme de parallélipipède rectangle, dont les arêtes, parallèles aux axes, auraient pour dimensions dx, dy, dz. Appelons

x, y, z les coordonnées du sommet A de ce parallélipipède;

p la pression du fluide en A;

Xdm, Ydm, Zdm les composantes parallèles aux axes de la force qui agit sur chaque masse élémentaire dm, prise autour du point A;

ρ la densité en A, c'est-à-dire le rapport de la masse contenue dans un volume infiniment petit autour de A à ce volume lui-même.

Nous supposerons que X, Y, Z varient d'une manière continue en passant d'un point à l'autre, de sorte que toutes les masses qui sont contenues dans le volume AB...H reçoivent l'action de forces qui, rapportées à l'unité de masse, auraient pour composantes X, Y, Z; de même, nous considérons le fluide comme homogène dans une étendue infiniment petite autour du point A.

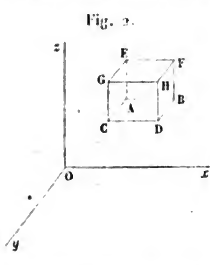


Fig. 2.

Cela posé, il est aisé de voir que toutes les forces qui agissent sur le volume élémentaire $dx\,dy\,dz$ passent par son centre de gravité; car, d'une part, les pressions qu'il supporte à l'extérieur sont appliquées normalement aux centres de ces faces; et d'autre part la force totale $\rho\,dx\,dy\,dz\,\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ résulte d'actions parallèles et proportionnelles aux masses. Il est donc nécessaire et suffisant pour l'équilibre de l'élément en question, en le supposant solidifié, que la somme des projections des forces qui le sollicitent, sur les trois axes coordonnés, soit nulle. Or, la pression totale sur la face AEGC étant exprimée par $p\,dy\,dz$, la pression sur la face opposée sera $\left(p+\frac{dp}{dx}dx\right)dy\,dz$, et comme ces pressions sont directement opposées, elles ont pour somme algébrique $-\frac{dp}{dx}dx\,dy\,dz$. Les pressions sur les quatre autres faces sont dans une direction perpendiculaire. Les forces extérieures au fluide, agissant sur l'élément AB...H dont la masse est $\rho\,dx\,dy\,dz$, donnent une résultante qui, projetée sur l'axe des x, est $\rho X\,dx\,dy\,dz$. On aura donc d'abord

$$-\frac{dp}{dx}dx\,dy\,dz+\rho X\,dx\,dy\,dz=0,$$

ou bien

$$\frac{dp}{dx}=\rho X.$$

Pareillement, en considérant les projections sur Oy et Oz,

on trouverait

$$\frac{dp}{dy} = \rho \mathrm{Y},$$

$$\frac{dp}{dz} = \rho \mathrm{Z}.$$

La pression p ne pouvant être, dans un fluide en équilibre, fonction que de x, y, z, sa différentielle complète dp est $\frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy + \frac{dp}{dz}dz$; elle a donc pour valeur, d'après les trois dernières équations,

$$(2) \qquad dp = \rho(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz):$$

relation unique équivalente aux trois dont elle est la conséquence, puisque x, y, z désignent trois variables indépendantes.

On voit donc que les trois conditions d'équilibre d'un élément quelconque pris à l'intérieur du fluide peuvent s'exprimer analytiquement comme il suit: la quantité $\rho(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz)$ doit être la différentielle exacte d'une fonction des variables indépendantes x, y, z. On sait que pour cela il faut et il suffit que l'on ait

$$(3) \qquad \frac{d.\rho\mathrm{X}}{dy} = \frac{d.\rho\mathrm{Y}}{dx}, \quad \frac{d.\rho\mathrm{X}}{dz} = \frac{d.\rho\mathrm{Z}}{dx}, \quad \frac{d.\rho\mathrm{Y}}{dz} = \frac{d.\rho\mathrm{Z}}{dy}.$$

Les relations (3) seront faciles à vérifier si X, Y, Z et ρ sont donnés en fonction de x, y, z. En les supposant satisfaites, l'intégration de l'équation (2) pourra s'effectuer et fera connaître p en fonction de x, y, z, si les données particulières de la question que l'on traite permettent de déterminer la constante introduite par l'intégration. Ici se manifeste la nécessité d'une nouvelle condition d'équilibre, dans le cas d'un fluide gazeux: on voit en effet que la pression p et la densité ρ sont maintenant connues pour chaque point, et si ces quantités ont une relation obligée l'une avec l'autre, il faudra qu'elle soit vérifiée. C'est ce qui arrive pour les gaz, car, en supposant la température constante, la densité est proportionnelle à la pression, tandis que dans le cas d'un fluide incompressible elle en

est indépendante. Il faudrait donc, pour un gaz à température constante, joindre aux équations (2) et (3) la suivante :

$$(4) \qquad \rho = \mathrm{K}p;$$

et généralement, pour un gaz à température variable, en vertu des lois de Mariotte et de Gay-Lussac,

$$(4\ bis) \qquad \rho = \frac{kp}{1+\alpha\theta},$$

K et k désignant des constantes, α le coefficient de dilatation des gaz, et θ la température.

Si la densité ρ d'un gaz à température constante était à priori inconnue ainsi que p, ces deux quantités se détermineraient (dans l'hypothèse de l'équilibre) par les relations (2) et (4). La première devient par la substitution de la valeur de ρ prise dans la seconde :

$$\frac{dp}{\mathrm{K}p} = \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz;$$

$\frac{dp}{\mathrm{K}p}$ étant une différentielle exacte, $\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz$ doit en être une aussi, et dans ce cas p sera connu en fonction de x, y, z : on en déduira ρ, qui est égal à $\frac{p}{\mathrm{K}}$.

Indépendamment des conditions dont nous avons parlé jusqu'à présent, et qui s'appliquent aux points pris à l'intérieur du fluide, il y aura généralement d'autres conditions particulières relatives à la surface extérieure. Puisque les calculs précédents nous ont donné p en fonction de x, y, z, la pression sera connue en un point quelconque de la surface extérieure : pour l'équilibre, il faudra nécessairement que cette pression soit exercée en effet, soit par l'enveloppe, soit par toute autre cause.

5. *Surfaces de niveau.* — Nous venons de voir tout à l'heure un cas particulier de l'équilibre des fluides, dans lequel $\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz$ doit être la différentielle exacte d'une fonction de x, y, z : ce fait se produirait encore s'il s'agissait d'un

liquide homogène, car l'équation (2) du n° 4 deviendrait

$$d.\frac{p}{\rho} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz;$$

enfin, il peut arriver dans d'autres cas généraux qu'il est inutile de mentionner ici. Cette circonstance particulière que présente la quantité $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ entraîne des conséquences assez remarquables.

Pour les établir, supposons donc que l'on ait

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = d.f(x,y,z),$$

f étant une certaine fonction de x, y, z. Si l'on pose $f(x, y, z) = C$, en donnant à C une valeur constante, cette équation représentera une surface; et si la constante C prend successivement une série de valeurs, on obtiendra une série de surfaces, auxquelles on a donné le nom de *surfaces de niveau*. Voici quelles sont leurs propriétés :

D'abord la pression et la densité sont constantes dans toute l'étendue d'une surface de niveau; car si l'on se déplace sur l'une de ces surfaces, on a toujours

$$f(x, y, z) = \text{const.};$$

par suite,

$$d.f(x, y, z) = 0 = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz;$$

dp est donc nul (n° 4) et p est constant. Maintenant, quand on passe d'une surface de niveau à une autre qui est infiniment voisine, C et $C + dC$ étant les deux valeurs de la fonction f pour ces deux surfaces, l'équation (2) du n° 4 donne

$$dp = \rho\,dC;$$

or p est déterminé quand C est connu, puisque C suffit pour définir la surface de niveau; donc p est fonction de C seulement; donc il en est de même de la dérivée $\frac{dp}{dC}$ ou de son égale ρ; donc enfin ρ ne varie pas quand C reste constant, c'est-à-dire quand on se déplace sur une surface de niveau. Si le fluide est un gaz, il en est encore de même pour la tempéra-

ture : on a effet, à cause de la relation (4 *bis*) du n° 4

$$\frac{dp}{kp} = \frac{dC}{1+\alpha\theta},$$

d'où l'on tire

$$\theta = \frac{1}{\alpha}\left(kp\frac{dC}{dp} - 1\right);$$

et comme p est fonction de C seulement, θ est aussi déterminé par cette seule variable.

Enfin, toute surface de niveau coupe normalement, en chacun de ses points, la résultante des forces $X\,dm$, $Y\,dm$, $Z\,dm$ qui agissent sur ce point. En effet, si l'on désigne par x, y, z, $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, les coordonnées de deux points infiniment voisins pris sur une même surface de niveau, X, Y, Z étant les composantes de la force rapportée à l'unité de masse qui agit sur le fluide aux environs de ces points, on a, par suite de la définition même des surfaces de niveau,

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

Or, soit R la résultante de X, Y, Z, et a, b, c ses angles avec les angles Ox, Oy, Oz; ds la distance des deux points, et a', b', c' les angles de ds avec les mêmes axes : on aura

$$X = R\cos a, \qquad Y = R\cos b, \qquad Z = R\cos c,$$

$$dx = ds.\cos a', \quad dy = ds.\cos b', \quad dy = ds.\cos c',$$

d'où nous tirons

$$R\,ds\,(\cos a\cos a' + \cos b\cos b' + \cos c\cos c') = 0.$$

D'un autre côté on sait que le cosinus de l'angle formé par R et ds est précisément égal à $\cos a\cos a' + \cos b\cos b' + \cos c\cos c'$; donc ce cosinus est nul; donc R est perpendiculaire à ds, et comme ds a une direction quelconque sur la surface de niveau, R est normal à cette surface.

6. *Cas particulier des fluides pesants.* — Lorsqu'on suppose que les forces $X\,dm$, $Y\,dm$, $Z\,dm$ sont uniquement dues à la gravité, si l'on prend les axes des x et des y horizontaux, l'axe

des z étant vertical et descendant, X et Y seront nuls et Z ne sera autre chose que l'accélération g des corps pesants qui tombent dans le vide. Donc la quantité $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ se réduit ici à $g\,dz$, et l'équation des surfaces de niveau est $dz = 0$, ou $z = C$; ces surfaces sont donc des plans horizontaux. C'est la généralisation de ce résultat qui a fait adopter la dénomination de *surfaces de niveau*, parce que le mot niveau désigne souvent un plan horizontal.

En passant d'un plan de niveau à un autre, on a pour la variation de pression

$$dp = \rho g\,dz,$$

ou bien, en désignant par Π le poids par unité de volume, c'est-à-dire le poids qui répond à la masse ρ,

$$dp = \Pi\,dz.$$

S'il s'agit d'un liquide homogène, Π est constant, et alors, en intégrant l'équation précédente à partir d'un plan où la pression serait p_0, et où z aurait la valeur de z_0, on trouve

$$(5) \qquad p = p_0 + \Pi(z - z_0);$$

p est alors le poids d'une colonne de liquide ayant pour base l'unité de surface et pour hauteur $\frac{p_0}{\Pi} + z - z_0$: cette hauteur est dite *hauteur représentative de la pression*. Lorsqu'il s'agit d'un gaz, ρ et Π sont variables avec p, dont la détermination est alors moins simple : nous ne nous y arrêterons pas.

Si la surface libre du fluide doit être soumise à une pression constante, ce sera une surface de niveau, c'est-à-dire un plan horizontal.

Nous remarquerons enfin que l'équation

$$dp = \rho g\,dz$$

suppose que les deux points voisins, entre lesquels la pression varie de dp, appartiennent au même fluide; ainsi donc, cette équation et l'équation (5), qui en est une conséquence, ne sont applicables entre deux points, que dans le cas où l'on peut aller de l'un à l'autre sans sortir de la masse fluide.

7. *Pressions totales supportées par les surfaces plongées dans un fluide.* — Chaque élément d'une surface en contact avec un fluide supporte une pression; il s'agit de composer entre elles toutes ces pressions agissant sur une portion finie de la surface. Il est clair que le problème pourra toujours être résolu par l'emploi du calcul intégral; mais sans nous arrêter à établir des formules générales, nous nous contenterons d'indiquer la solution dans quelques cas particuliers qui se présentent fréquemment.

Commençons par établir un lemme. Soit un élément superficiel ω supportant une pression p rapportée à l'unité de surface, c'est-à-dire la pression totale $p\omega$; soit, en outre, α l'angle que fait avec un axe Ox la normale à l'élément ω : on veut avoir la projection de la pression $p\omega$ sur l'axe Ox. Cette projection sera exprimée par $p\omega.\cos\alpha$, ou par $p.\omega\cos\alpha$; or $\omega\cos\alpha$ n'est autre chose que la projection rectangulaire de ω sur un plan perpendiculaire à Ox. Donc on peut énoncer la proposition suivante : *Pour projeter sur un axe la pression qui agit sur un élément superficiel, il suffit de prendre la pression que supporterait la projection dudit élément sur un plan perpendiculaire à l'axe, la pression par unité de surface restant ce qu'elle est.*

On déduit premièrement de là que si une surface est plongée dans un fluide pesant, toute tranche comprise entre deux plans horizontaux infiniment voisins sera soumise à des pressions dont les composantes horizontales se feront équilibre. En effet, si l'on divise la tranche en prismes tronqués par des plans parallèles à une horizontale Ox, se succédant les uns aux autres à des distances infiniment petites, d'après le lemme précédent il y aura, pour les deux bases de chaque prisme, des pressions égales et contraires en projection sur Ox, attendu que la pression par unité de surface est la même en tout point de la tranche (n° 6) et que les deux bases ont des projections identiques sur un plan perpendiculaire à Ox. Les composantes de toutes les pressions suivant des parallèles à Ox se détruisent donc deux à deux, et comme Ox peut avoir une direction quelconque dans un plan horizontal, l'équilibre existera entre les projections des mêmes pressions sur ce plan.

Les composantes horizontales des pressions sur chaque tran-

che se faisant équilibre, il en sera évidemment de même quand on prendra un ensemble de tranches successives, lequel serait alors compris entre deux plans horizontaux situés à une distance finie. Le résultat serait encore identique pour une surface fermée.

Quand un contour fermé se trouve soumis à des pressions sur ses divers éléments, et que ces pressions rapportées à l'unité de surface peuvent être considérées comme constantes, la pression résultante est nulle. Car en divisant, comme ci-dessus, la surface en tranches horizontales, on verrait que les composantes horizontales des pressions se font équilibre, et, par suite, les pressions devraient se réduire à une résultante verticale; mais le même procédé ferait reconnaître qu'elles se font aussi équilibre dans le sens vertical : la résultante est donc nulle.

Un corps plongé complétement dans un fluide pesant (ou bien encore un corps flottant à la surface de ce fluide) supporte une pression résultante égale au poids du fluide déplacé par lui. C'est en cela que consiste le *principe d'Archimède*, dont la démonstration est trop connue pour qu'il soit utile de la rappeler.

Dans certains cas, la recherche de la pression totale sur une surface courbe peut être ramenée à celle de la pression totale sur une surface plane. Si l'on imagine un corps dont la surface limitative se composerait d'une partie courbe et d'une face plane, le principe d'Archimède permettra de déterminer la pression résultante supportée par le contour extérieur de ce corps. Ainsi donc la connaissance de la pression sur la face plane entraînerait celle de la pression sur la surface courbe, puisque cette dernière combinée avec une force connue devrait produire une résultante également connue.

8. *Cas particulier d'une surface plane plongée dans un liquide pesant homogène.* — La pression dans un plan de niveau du liquide étant p_0, la pression p dans un autre plan horizontal situé à la distance z au-dessous du premier sera (n° 6)

$$p = p_0 + \Pi z.$$

Si maintenant ω est l'un des éléments soumis à la pression p par unité de surface, sa pression effective sera $p\omega$, et comme toutes ces pressions sont parallèles, leur résultante aura pour intensité $\Sigma p\omega$, en désignant par Σ une somme étendue à tous les éléments ω. Or on a

$$\Sigma p\omega = \Sigma (p_0 + \Pi z)\,\omega = p_0 \Sigma\omega + \Pi \Sigma\omega z.$$

Donc la pression moyenne sur la surface totale $\Sigma\omega$, laquelle s'exprimerait par le quotient $\frac{\Sigma p\omega}{\Sigma\omega}$, aurait pour valeur

$$p_0 + \Pi \frac{\Sigma\omega z}{\Sigma\omega},$$

et comme $\frac{\Sigma\omega z}{\Sigma\omega}$ n'est autre chose que l'ordonnée du centre de gravité de la surface, on voit que cette pression moyenne est précisément celle qui a lieu dans le liquide à la hauteur de ce centre de gravité.

On appelle *centre de pression* le point de la surface plane où est appliquée la pression résultante. Pour obtenir ce point, on peut imaginer un cylindre ou prisme tronqué dont la surface pressée serait la section droite en même temps que l'une des bases, et dont l'autre base s'obtiendrait en portant sur chaque génératrice la hauteur représentative de la pression au point où cette génératrice coupe la section droite. Ce cylindre étant construit, si l'on en prend la portion qui se projette sur un élément ω de sa section droite extrême, le poids de cette portion exprimera la pression supportée par ω : donc la pression résultante sera égale au poids total du cylindre et passera en son centre de gravité, ce qui détermine sa position, puisque déjà sa direction est connue. Cette résultante se confondrait avec le poids total du cylindre, si la pesanteur, changeant de direction, prenait celle de la normale à la surface pressée. La détermination du centre de pression est donc ramenée à celle d'un centre de gravité.

Nous avons indiqué ailleurs (n° 27 du *Cours de Résistance des Matériaux et Stabilité des Constructions*) un autre moyen général de déterminer le centre de pression.

§ II. — Hydrodynamique.

9. *De la pression dans un fluide en mouvement.* — Quand un fluide est en mouvement, il n'en exerce pas moins une certaine pression contre les parois qui le terminent, et en divisant la force que supporte un élément superficiel par l'aire de cet élément, on aurait la pression rapportée à l'unité de surface en un point de la paroi. Seulement, comme la viscosité produit une certaine adhérence entre le fluide et la surface en contact, la pression ainsi déterminée s'écarterait plus ou moins de la direction normale.

Si l'on veut ensuite, en procédant ainsi que nous l'avons fait au n° 3, étendre cette définition à un point intérieur de la masse, on n'éprouvera pas de difficulté tant qu'il s'agira d'un corps possédant la fluidité parfaite telle qu'elle est définie au n° 2. En effet, la démonstration de l'équation (1) du n° 3 se ferait de la même manière en introduisant les forces d'inertie des molécules, parce qu'il ne s'agirait plus alors que d'un équilibre fictif entre ces forces et les forces réelles, conformément au principe de d'Alembert. Mais comme en définitive les forces proportionnelles aux masses disparaissent de l'équation lorsque les dimensions du fluide décroissent indéfiniment (*), on reconnaîtrait de même que les éléments d'une surface fermée infiniment petite, tracée autour d'un point du fluide, supportent la même pression par unité superficielle.

Ce serait encore là ce qu'on nommerait la pression du fluide au point dont il s'agit; et en même temps le principe de l'égalité de pression en tous sens autour de ce point se trouverait établi.

Dans la réalité physique, il y a beaucoup de cas où l'on ne commet qu'une petite erreur en faisant abstraction de la vis-

---

(*) En toute rigueur, comme le fluide n'est pas continu, les dimensions d'une surface qui en contiendrait une portion ne peuvent pas être supposées infiniment petites. Cependant, eu égard à l'excessive ténuité des molécules, qui doivent se trouver en nombre considérable, même dans un espace insensible, les conséquences de cette supposition sont en général très-acceptables, au moins comme vérité approximative.

cosité; il y a, au contraire, des problèmes où il est nécessaire d'en tenir compte, parce que les phénomènes observés sont principalement dus à son influence. Alors la petite surface dont nous venons de parler ne se trouvera plus également pressée en tous sens, car l'équation (1) du nº 3 devrait être modifiée en tenant compte des forces produites par la viscosité, lesquelles ne disparaîtraient pas à la limite, car elles sont des infiniment petits de même ordre que les pressions normales. Pour donner, dans ce cas, une idée précise et nette de la pression, nous admettrons que, sans rien changer d'ailleurs à la nature du fluide, on fasse disparaître toute viscosité. Après cette modification, il ne subsisterait plus en chaque point M qu'une pression bien définie, que nous considérerons comme étant la pression du fluide en M. En isolant autour du point M une très-petite quantité de fluide, tout élément de sa surface limitative sera donc regardé comme soumis à deux forces : 1° une force normale provenant de la pression proprement dite, telle qu'on vient de la définir; 2° une force de direction inconnue à priori, provenant de la viscosité.

10. *Équations générales du mouvement d'un fluide, dans l'hypothèse d'une viscosité négligeable.* — Rapportons le mouvement à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz : il sera parfaitement défini si à chaque instant on connaît pour un point quelconque : 1° les trois composantes u, v, w, parallèles aux axes coordonnés, de la vitesse possédée par la molécule qui est en ce point; 2° la pression p et la densité ρ du fluide. Les quantités u, v, w, p, ρ sont fonctions des coordonnées x, y, z du point auquel elles se rapportent, et du temps t, car à une même époque elles changent d'un point à l'autre, et pour le même point de l'espace elles varient avec le temps : ce sont là les inconnues que nous choisirons pour mettre le problème en équation. Le mouvement sera supposé produit par des forces dont nous désignerons les composantes parallèles aux axes coordonnés par $X\,dm$, $Y\,dm$, $Z\,dm$, dm étant une masse élémentaire, et X, Y, Z des fonctions connues de x, y, z, t.

En prenant un parallélipipède de fluide, dont un sommet serait le point considéré et les trois dimensions infiniment

petites dx, dy, dz, nous verrions, par les considérations déjà données au n° 4, qu'il est soumis à une force totale ayant pour composantes, dans l'hypothèse d'une viscosité négligeable,

$$dx\,dy\,dz\left(\rho X - \frac{dp}{dx}\right), \text{ suivant l'axe des } x;$$

$$dx\,dy\,dz\left(\rho Y - \frac{dp}{dy}\right), \text{ suivant l'axe des } y;$$

$$dx\,dy\,dz\left(\rho Z - \frac{dp}{dz}\right), \text{ suivant l'axe des } z.$$

Et puisque la masse qui supporte cette force est exprimée par $\rho\,dx\,dy\,dz$, l'accélération totale correspondante aura pour valeur, en projection sur les mêmes axes,

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx},$$

$$Y - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy},$$

$$Z - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}.$$

Or les projections de cette accélération peuvent encore s'exprimer autrement. En effet, la molécule qui actuellement a pour coordonnées x, y, z, au bout d'un élément de temps dt aura pour coordonnées $x + u\,dt$, $y + v\,dt$, $z + w\,dt$; u étant fonction de x, y, z, t, son accroissement, répondant aux accroissements $u\,dt$, $v\,dt$, $w\,dt$, dt des quatre variables indépendantes, aura pour expression

$$\frac{du}{dx}\cdot u\,dt + \frac{du}{dy}\cdot v\,dt + \frac{du}{dz}\cdot w\,dt + \frac{du}{dt}\cdot dt.$$

Cette quantité n'est autre chose que l'accroissement de la vitesse u projetée sur l'axe des x, au bout d'un temps dt, quand on suit une même molécule sur sa trajectoire; en la divisant par dt, on aura donc l'accélération de cette molécule en projection sur Ox, et par suite l'expression qu'on doit égaler à $X - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}$. Si l'on répète le même raisonnement pour les

axes Oy, Oz, on aura les trois équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} &= u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz} + \frac{du}{dt},\\ Y - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} &= u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz} + \frac{dv}{dt},\\ Z - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} &= u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz} + \frac{dw}{dt}, \end{aligned}\right.$$

qui lient entre elles les cinq inconnues u, v, w, p, ρ et leurs dérivées partielles. Elles sont les mêmes pour les fluides incompressibles et pour les fluides compressibles.

La quatrième équation prend le nom d'équation de continuité, parce qu'elle exprime qu'il ne se forme pas de vide dans la masse fluide en mouvement. Pour l'établir, soit AB...H (*fig.* 2) le parallélipipède $dx\,dy\,dz$; pendant le temps dt, il entre par la face ACGE dans l'intérieur de ce parallélipipède un volume de fluide exprimé par $u\,dy\,dz\,dt$, soit une masse $\rho u\,dy\,dz\,dt$; il sort en même temps par la face opposée BDHF une masse $\left(\rho u + \frac{d.\rho u}{dx}dx\right)dy\,dz\,dt$, de sorte que la masse intérieure au parallélipipède s'est accrue de $-\frac{d.\rho u}{dx}dx\,dy\,dz\,dt$. De même il y aura des accroissements analogues par le fait des vitesses v, w, et l'accroissement total sera

$$-dx\,dy\,dz\,dt\left(\frac{d.\rho u}{dx} + \frac{d.\rho v}{dy} + \frac{d.\rho w}{dz}\right).$$

On obtiendra une autre expression de cette quantité, en remarquant que la masse, d'abord égale à $\rho\,dx\,dy\,dz$ au commencement du temps dt, sera égale, quand ce temps sera fini, à

$$\left(\rho + \frac{d\rho}{dt}dt\right)dx\,dy\,dz.$$

Cela suppose qu'il ne se forme jamais de vide dans le fluide, car autrement la masse contenue dans un volume ne s'obtiendrait pas en multipliant ce volume par la densité. On posera donc, dans cette hypothèse,

$$dx\,dy\,dz\,dt\left(\frac{d.\rho u}{dx} + \frac{d.\rho v}{dy} + \frac{d.\rho w}{dz} + \frac{d\rho}{dt}\right) = 0,$$

soit, après la suppression du facteur $dx\,dy\,dz\,dt$,

$$\frac{d.\rho u}{dx}+\frac{d.\rho v}{dy}+\frac{d.\rho w}{dz}+\frac{d\rho}{dt}=0. \tag{2}$$

Cette équation, encore applicable aux liquides comme aux gaz, prend une forme plus simple quand il s'agit spécialement d'un liquide. Elle peut en effet s'écrire

$$u\frac{d\rho}{dx}+v\frac{d\rho}{dy}+w\frac{d\rho}{dz}+\frac{d\rho}{dt}+\rho\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)=0;$$

or, dans un liquide supposé théoriquement incompressible, ρ ne varie pas pour une molécule que l'on suit sur sa trajectoire, c'est-à-dire que $d\rho$ ou l'expression égale

$$\frac{d\rho}{dx}dx+\frac{d\rho}{dy}dy+\frac{d\rho}{dz}dz+\frac{d\rho}{dt}dt$$

sera nulle, en prenant sa valeur correspondante à $dx=u\,dt$, $dy=v\,dt$, $dz=w\,dt$; donc pour un liquide l'équation (2) de continuité se dédouble en deux autres, savoir :

$$\left\{\begin{aligned} &u\frac{d\rho}{dx}+v\frac{d\rho}{dy}+w\frac{d\rho}{dz}+\frac{d\rho}{dt}=0,\\ &\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0. \end{aligned}\right. \tag{2 bis}$$

Pour les gaz, il faudra joindre à l'équation (2) celle qui est fournie par les lois de Mariotte et de Gay-Lussac (n° 4), savoir :

$$\rho=\frac{kp}{1+\alpha\theta}. \tag{3}$$

Ainsi donc les cinq équations entre les cinq inconnues u, v, w, p, ρ seront (1) et (2 *bis*), ou bien (1), (2) et (3), suivant qu'il s'agit des liquides ou des gaz. Ajoutons toutefois que dans ce dernier cas il faudra supposer la température constante, sans quoi une sixième inconnue θ s'introduirait dans le calcul, et une nouvelle équation deviendrait nécessaire.

Si l'on pouvait intégrer ces cinq équations d'une manière générale et déterminer, d'après les conditions particulières relatives à la surface extérieure du fluide ou à l'instant initial, les fonctions arbitraires introduites par l'intégration, la ques-

tion serait résolue. Malheureusement ces équations sont si *rebelles*, comme le dit Lagrange (*), qu'on n'y a réussi que dans quelques cas très-limités. Nous nous abstiendrons pour cette raison d'aller plus avant dans cette étude, et nous allons indiquer une conséquence remarquable déduite des équations (1), moyennant quelques hypothèses restrictives.

11. *Définition de la permanence du mouvement; théorème relatif au mouvement permanent d'un fluide.* — Nous supposerons d'abord que le mouvement est permanent, c'est-à-dire qu'en un lieu déterminé de l'espace le fluide présente toujours le même phénomène, ou, en d'autres termes, que u, v, w, p, ρ varient bien, à un même instant, avec les coordonnées x, y, z du point auquel elles se rapportent, mais qu'elles sont constantes quand le temps t varie, x, y, z ne variant pas. Ainsi donc on aura

$$\frac{du}{dt}=0,\quad \frac{dv}{dt}=0,\quad \frac{dw}{dt}=0,\quad \frac{dp}{dt}=0,\quad \frac{d\rho}{dt}=0.$$

La seconde hypothèse consistera en ce que $X dx + Y dy + Z dz$ sera la différentielle exacte d'une fonction des coordonnées; c'est-à-dire qu'on posera

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dT,$$

T désignant une fonction de x, y, z. Appelons J l'accélération totale en un point quelconque, et J_x, J_y, J_z ses trois composantes suivant les trois axes; les trois équations (1) pourront s'écrire :

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = J_x,$$

$$Y - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = J_y,$$

$$Z - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = J_z.$$

Si on les ajoute après les avoir respectivement multipliées par

(*) *Mécanique analytique*, seconde partie, section X.

dx, dy, dz, on aura

$$(4)\qquad dT - \frac{1}{\rho}\,dp = J_x\,dx + J_y\,dy + J_z\,dz,$$

car, puisque le mouvement est permanent, p n'est plus fonction du temps, et la différentielle complète dp a pour valeur $\frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy + \frac{dp}{dz}dz$. D'un autre côté, V étant la vitesse du fluide au point considéré, on a

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

ou bien, en différentiant les deux membres,

$$V\,dV = u\,du + v\,dv + w\,dw.$$

On peut appliquer cette dernière relation au cas où l'on suivrait une molécule sur sa trajectoire ; il faut alors faire

$$dx = u\,dt,\quad dy = v\,dt,\quad dz = w\,dt,$$

$$du = J_x\,dt,\quad dv = J_y\,dt,\quad dw = J_z\,dt,$$

d'où l'on tire aisément, par l'élimination de u, v, w,

$$V\,dV = J_x\,dx + J_y\,dy + J_z\,dz.$$

La relation (4) donne donc

$$(5)\qquad dT - \frac{1}{\rho}\,dp = V\,dV,$$

autre équation dont l'emploi supposera, bien entendu, que les différentielles dT, dp, dV sont celles qui répondent à un déplacement élémentaire ds sur la trajectoire de l'une des molécules.

L'intégration de l'équation (5) devient possible et même facile quand on admet, soit que le fluide est homogène, soit qu'il est gazeux et à température constante. Dans le premier cas, ρ est un nombre invariable : on aura donc

$$(6)\qquad T - \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}V^2 = \text{const.};$$

dans le second, ρ sera remplacé par Kp (n° 4), K étant une

constante, et l'intégration donnera

$$(7) \qquad T - \frac{1}{K} \log \text{hyp.}\, p - \frac{1}{2} V^2 = \text{const.}$$

Il est indispensable de ne pas perdre de vue que les deux relations (6) et (7) ne sont démontrées que pour une suite de points par lesquels doit passer une même molécule, choisie arbitrairement d'ailleurs. Elles auront de l'utilité pour le cas où les trajectoires seraient connues d'avance quant à leur forme. Leur énoncé en langage ordinaire constituerait le théorème que nous avions en vue.

12. *Application du théorème précédent au cas d'un fluide pesant et homogène ; théorème de Daniel Bernoulli.* — Si les forces généralement désignées ci-dessus par $X\,dm$, $Y\,dm$, $Z\,dm$ consistent seulement dans les actions de la pesanteur, l'axe des z étant supposé vertical et descendant, il faudra faire

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = g.$$

La fonction T se réduira dans ce cas à gz ; supposant en outre que le poids de l'unité de volume (lequel a pour valeur ρg) soit désigné par Π, la relation (6) deviendra

$$gz - g\frac{p}{\Pi} - \frac{1}{2} V^2 = \text{const.} ;$$

ou bien encore, après avoir divisé par le facteur g,

$$(8) \qquad z - \frac{p}{\Pi} - \frac{V^2}{2g} = \text{const.}$$

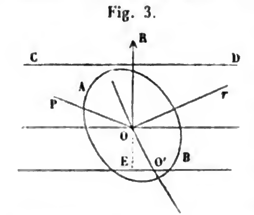
Sauf le changement de forme, c'est dans la propriété exprimée par l'équation (8) que consiste le théorème de Daniel Bernoulli. On pourrait l'énoncer ainsi : *Si pour divers points d'un fluide en mouvement permanent, tous situés sur la trajectoire d'une même molécule, on prend la différence entre la hauteur au-dessous d'un plan horizontal fixe, d'une part, et la hauteur représentative de la pression, plus la hauteur due à la vitesse, d'autre part, la différence sera une quantité constante.*

Si le fluide pesant était un gaz à température constante, il n'y aurait qu'à remplacer T par gz dans l'équation (7) : nous reviendrons plus loin sur ce cas particulier.

13. *Autre démonstration du théorème établi au n° 12.* — L'équation (5) du n° 12, ou ses intégrales (6), (7) et (8), seront d'un usage si fréquent dans ce Cours, que nous croyons utile d'en donner une autre démonstration plus directe, qui les rattache à un des théorèmes généraux les plus importants de la Mécanique : nous voulons parler du théorème concernant la puissance vive d'un corps et le travail des forces qui le sollicitent.

A cet effet, soit AB (*fig.* 3) une portion élémentaire du fluide, contenue dans une enveloppe de forme quelconque, mais infiniment petite en tous sens; suivons par la pensée l'ensemble de molécules ainsi limité, dans son mouvement au milieu du fluide qui l'entoure, et pendant que son centre de gravité O décrit l'élément $\overline{OO'}$ de sa trajectoire, appliquons à ce point, considéré comme réunissant la masse entière du système, le théorème de l'effet du travail. Désignons par

Fig. 3.



m la masse fluide totale renfermée dans le volume AB;

ρ sa densité qu'on est autorisé à supposer invariable pour un instant donné, puisqu'il s'agit d'un volume infiniment petit;

V la vitesse du point O à l'instant actuel;

X, Y, Z les composantes suivant trois axes rectangulaires de la force extérieure rapportée à l'unité de masse qui agit sur les molécules fluides aux environs du point O;

dx, dy, dz les projections sur les trois mêmes axes de la distance $\overline{OO'}$;

ds cette distance;

R la résultante des pressions exercées sur l'enveloppe AB;

β son angle avec $\overline{OO'}$, soit l'angle O'OE de la figure.

L'accroissement de la puissance vive de la masse m condensée en O s'exprimera par $mV\,dV$, si dV représente l'accroissement de vitesse pris par le point O, après le temps employé par lui à franchir la distance ds; il faut l'égaler au travail fait par la résultante de translation de toutes les forces. Or les forces agissant sur les diverses masses comprises dans AB, transportées parallèlement à elles-mêmes en O, produiraient la résultante $m\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$, dont le travail pendant le parcours $\overline{OO'}$ sera $m(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)$; les actions mutuelles transportées au même point se détruisent deux à deux; il ne reste donc, pour compléter le travail des forces, qu'à tenir compte du travail de la pression résultante R, exprimé par $-R\cos\beta.ds$. Donc on aura l'équation du travail et de la puissance vive

$$(9)\qquad mV\,dV = m(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz) - R\cos\beta.ds.$$

Afin d'évaluer l'intensité de l'action R exercée sur l'enveloppe AB par le fluide voisin, considérons, à l'instant actuel, les surfaces de niveau (c'est-à-dire d'égale pression) dans les environs de AB, et supposons que le plan CD représente la direction commune de ces surfaces. La pression p, par unité superficielle, actuellement existante en un point quelconque de l'enveloppe est uniquement fonction de la distance n de ce point au plan CD, distance qui déterminerait la surface de niveau passant au point en question; et attendu que n est infiniment petit, on pourra poser simplement

$$(10)\qquad p = L + Mn,$$

L et M étan des constantes, car les termes suivants du développement de p en fonction de n disparaîtraient devant ceux-là, comme infiniment petits d'ordre supérieur. Or la pression uniforme L sur le contour fermé AB donnera une résultante nulle (n° 7); quant au terme Mn on voit qu'il représenterait la pression produite par un fluide pesant et homogène, si CD était un plan horizontal et si le poids de l'unité de volume du fluide était M; donc, d'après le principe d'Archimède, la poussée totale R qui en résultera sera normale à CD et égale au produit de M par le volume AB, c'est-à-dire à $M\dfrac{m}{\rho}$.

Maintenant, M peut encore s'exprimer d'une autre manière. Supposons qu'à l'instant où le centre de gravité de la masse m occupe la position O, il y ait pour la molécule fluide qui se trouve simultanément en O′ une pression différente de celle du point O, et que la différence infiniment petite soit représentée par δp. Cette différence correspond à celle des ordonnées n pour O et O′, laquelle est égale à $ds \cos\beta$; en vertu de l'équation (10), on écrira

$$\delta p = M\, ds \cos\beta,$$

ou bien

$$M = \frac{1}{\cos\beta} \frac{\delta p}{ds}.$$

Par conséquent on a aussi

$$R = M \frac{m}{\rho} = \frac{m}{\rho \cos\beta} \frac{\delta p}{ds},$$

et, en substituant cette valeur dans l'équation (9),

$$(11) \qquad V\,dV = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz - \frac{1}{\rho}\delta p.$$

Quand le mouvement est permanent, la pression en un point déterminé du fluide ne dépend pas du temps; la variation δp représente donc aussi la quantité dont a augmenté la pression p au centre de gravité O, après que ce point est venu prendre la position O′ : c'est l'accroissement de p corrélatif de l'accroissement dV de la vitesse V. En d'autres termes, on peut alors remplacer δp par dp, et si d'ailleurs le trinôme

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

est supposé, comme tout à l'heure, la différentielle exacte d'une fonction T de x, y, z, la dernière équation deviendra identique avec l'équation (5) du n° 12, dont on aura ainsi une seconde démonstration.

Quand on n'admet pas l'hypothèse de la permanence du mouvement, l'équation (11) cesse d'être immédiatement intégrable, parce que les différentielles dV et δp ne sont pour ainsi dire plus de la même espèce. La première suppose à la fois un déplacement élémentaire ds sur la trajectoire du point O et

une variation dt du temps. Pour le point O considéré seul dans son mouvement sur sa courbe, c'est la différentielle complète de V. Au contraire, δp est une différentielle incomplète, ne comportant pas la variation du temps. On ne peut donc plus intégrer, ni en supposant le temps invariable, pour savoir comment varie p, à un même instant, aux points successifs O, O',..., d'une même trajectoire, ni en supposant le temps variable et le point O constant dans sa position. La nature du premier membre de l'équation (11) rendrait la première intégration impossible; quant à la seconde, elle serait incompatible avec le second membre comme avec le premier.

14. *Introduction des forces produites par la viscosité dans les équations générales du mouvement des fluides.* — C'est à Navier (*) que l'on doit les premières tentatives pour résoudre cette question. Il admettait, avec Newton, que la viscosité développe entre deux molécules une force mutuelle proportionnelle à la vitesse avec laquelle ces deux molécules s'écartent l'une de l'autre. Quand il s'agit de deux molécules fluides, vu la petitesse de la distance à laquelle elles peuvent agir sensiblement l'une sur l'autre, elles ont nécessairement des vitesses très-peu différentes, et la vitesse avec laquelle elles se séparent est très-faible. Soit a cette vitesse et $f(a)$ une fonction de a qui représente l'action mutuelle dont il s'agit; $f(a)$ peut être développée, suivant les puissances de sa variable, sous la forme

$$A + Ba + Ca^2 + Da^3 + \dots;$$

or les expériences tendent toutes à prouver que $f(a)$ s'annule ou devient insensible quand a est nul; donc $A = 0$, et

$$f(a) = Ba + Ca^2 + Da^3 + \dots.$$

D'un autre côté, nous avons dit que a est très-petit; il est donc probable que les termes Ca^2, Da^3,..., sont faibles relativement au premier Ba, et qu'on est en droit de supposer, comme l'a fait Navier, $f(a)$ proportionnelle à a. Mais ce n'est qu'une

(*) *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, tome VI.

probabilité, car Ca^2, Da^3,..., ne disparaissent devant Ba que lorsque a est infiniment petit, et encore faudrait-il que B ne fût pas nul, ce que rien n'établit à priori. Feu M. Darcy, inspecteur général des Ponts et Chaussées, dans ses belles recherches expérimentales sur le mouvement de l'eau dans les tuyaux (*), a effectivement cru reconnaître des faits qui s'accordent mieux avec l'hypothèse de la proportionnalité entre $f(a)$ et le carré de a qu'avec celle de Navier. D'ailleurs le raisonnement que nous avons fait pour établir que $f(a)$ devait se réduire au terme Ba n'est plus applicable pour les molécules fluides en contact avec les parois solides, car alors a n'est plus très-petit et peut avoir une valeur quelconque. L'hypothèse admise par Navier n'est donc pas suffisamment démontrée, et même elle paraît en contradiction avec diverses expériences; c'est pourquoi nous ne croyons pas utile de reproduire ici l'analyse assez minutieuse par laquelle il a établi les équations générales de l'Hydrodynamique, en tenant compte de la viscosité. Le changement ne porte que sur les équations (1) du n° 10, les équations (2), (2 *bis*) et (3) devant rester les mêmes pour les fluides parfaits et les fluides naturels. Les équations (1) deviennent un peu plus compliquées, ce qui en rendrait l'usage encore plus difficile; les voici, du reste, avec les modifications qu'elles doivent subir :

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+\varepsilon\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)=u\frac{du}{dx}+v\frac{du}{dy}+w\frac{du}{dz}+\frac{du}{dt},$$

$$Y-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy}+\varepsilon\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\right)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{dv}{dy}+w\frac{dv}{dz}+\frac{dv}{dt},$$

$$Z-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}+\varepsilon\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}\right)=u\frac{dw}{dx}+v\frac{dw}{dy}+w\frac{dw}{dz}+\frac{dw}{dt},$$

les notations étant celles du n° 10, et ε désignant en outre une constante qui dépend de la nature du fluide.

On peut arriver à ces équations par un procédé très-rapide, mais qui n'est pas (nous devons en convenir) une déduction bien rigoureuse de l'hy-

---

(*) Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de Paris, tome XV.

pothèse de Navier. Pour savoir le changement à faire aux équations (1) du n° 10, il faut simplement chercher l'expression de la force rapportée à l'unité de masse, qui agit, en vertu de la viscosité, sur un élément quelconque du fluide, et l'introduire dans le premier membre des équations : tout se réduit donc à montrer que cette force a pour composantes suivant les trois axes

$$\varepsilon\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right),$$
$$\varepsilon\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\right),$$
$$\varepsilon\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}\right).$$

A cet effet remarquons d'abord que les faces ACGE et HDBF (*fig.* 2) du parallélipipède fluide élémentaire AB...H, possédant les vitesses différentes u et $u+\frac{du}{dx}dx$, s'écartent l'une de l'autre avec la vitesse $\frac{du}{dx}dx$, c'est-à-dire que leur vitesse d'écartement rapportée à l'unité de distance des deux plans serait $\frac{du}{dx}$. De là doit résulter une force analogue à celle que produit l'extension simple dans les solides, force à laquelle on peut supposer une intensité $\rho\varepsilon\frac{du}{dx}$ sur chaque unité de surface, en admettant qu'elle est proportionnelle à la vitesse d'extension relative, et désignant par ε un coefficient constant, qui serait en quelque sorte le *coefficient de viscosité*. Le parallélipipède supportera donc sur la face ACGE une action totale $\rho\varepsilon\, dy\, dz\frac{du}{dx}$, dans le sens des x négatifs ; sur la face opposée HDBF il y aura en sens contraire, la même action augmentée de la différentielle relativement à x, de sorte que ces deux actions se réduiront à $\rho\varepsilon\, dx\, dy\, dz\frac{d^2u}{dx^2}$. De même les faces opposées ABEF et CDGH, possédant respectivement les vitesses u et $u+\frac{du}{dy}dy$, dans le sens parallèle aux x, éprouvent dans cette direction un glissement simple, dont la vitesse rapportée à l'unité de distance est $\frac{du}{dy}$; il en naît aussi une force $\rho\varepsilon\frac{du}{dy}$ par unité de surface et une résultante $\rho\varepsilon\, dx\, dy\, dz\frac{d^2u}{dy^2}$ des actions exercées par la viscosité, dans la direction de l'axe des x, sur les deux faces parallèles dont nous nous occupons. Enfin le glissement relatif des faces ABCD et EFGH produit encore, dans la même direction, la force totale $\rho\varepsilon\, dx\, dy\, dz\frac{d^2u}{dz^2}$. En additionnant ces

trois résultantes partielles et divisant par la masse $\rho dx dy dz$ du parallélipipède, on trouve bien la valeur ci-dessus indiquée, savoir :

$$\varepsilon\left(\frac{d^2 u}{dx^2}+\frac{d^2 u}{dy^2}+\frac{d^2 u}{dz^2}\right).$$

On procéderait de même à l'égard des deux autres axes.

Les équations différentielles posées tout à l'heure s'appliquent seulement, bien entendu, aux points pris dans l'intérieur de la masse fluide. Les molécules situées sur la surface libre doivent vérifier d'autres conditions spéciales que Navier a également démontrées : mais nous nous abstiendrons de les étudier en général, et nous nous bornerons à les établir dans les exemples particuliers qui se présenteront ultérieurement.

15. *Généralisation du théorème de Daniel Bernoulli.* — Sans faire, quant à présent, aucune hypothèse qui nous permette d'évaluer la grandeur de la force exercée sur chaque molécule par suite de la viscosité, appelons φ l'accélération que cette force serait capable d'imprimer à la molécule et γ l'angle qu'elle fait avec l'élément ds parcouru sur la trajectoire. Si nous répétons les raisonnements au moyen desquels nous avons établi l'équation (11) du n° 13, il est clair qu'il suffira d'ajouter au second membre un terme représentant le travail de φ dans le déplacement ds, puisque $X dx + Y dy + Z dz$ ou dT désigne la quantité analogue pour les forces autres que celles dues à la viscosité. Ainsi donc on aura

$$(12) \qquad V\,dV = dT - \frac{1}{\rho}\,dp + \varphi\cos\gamma\, ds,$$

ou bien, en intégrant entre deux positions quelconques d'une même molécule,

$$(13) \qquad T - \int \frac{dp}{\rho} + \int \varphi \cos\gamma . ds - \frac{1}{2}V^2 = \text{const.},$$

équation dont on pourra faire usage lorsque par un procédé quelconque on sera parvenu à évaluer le terme $\int \varphi\cos\gamma\, ds$, représentant le travail fait par la force due à la viscosité, rap-

portée à l'unité de masse, pendant le déplacement fini d'une molécule.

L'équation (13) sera pour nous l'expression du théorème de D. Bernoulli, généralisé par l'introduction des effets de la viscosité et par une supposition moins restreinte quant à la nature des forces extérieures, qui peuvent être d'autres forces que la pesanteur. En admettant qu'il s'agisse d'un liquide pesant homogène, et procédant comme au n° 12, nous trouverions

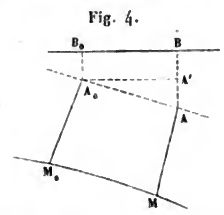
$$(14) \qquad z - \frac{p}{\Pi} + \frac{1}{g}\int \varphi \cos\gamma \,.\, ds - \frac{V^2}{2g} = \text{const.};$$

et dans le cas d'un gaz pesant, à température constante,

$$z - \frac{1}{Kg}\log \text{hyp.}\, p + \frac{1}{g}\int \varphi \cos\gamma\, ds - \frac{V^2}{2g} = \text{const.}$$

L'équation (14) est d'un usage continuel en Hydraulique; aussi nous allons chercher à en rendre plus sensibles les faits qu'elle représente, et en même temps nous expliquerons quelques dénominations usitées. A cet effet, soit M_0M (*fig.* 4) la trajectoire d'une molécule qui appartient à un liquide pesant homogène, en mouvement permanent; soit en outre B_0B le plan horizontal en dessous duquel on mesure les hauteurs z. En appliquant l'équation (14) successivement aux points M et M_0, distinguant par l'indice o les quantités relatives à ce second point et retranchant l'une de l'autre les deux équations, on trouvera

Fig. 4.



$$z - z_0 - \frac{p - p_0}{\Pi} + \frac{1}{g}\int_{s_0}^{s} \varphi \cos\gamma\, ds - \frac{V^2 - V_0^2}{2g} = 0,$$

relation qui n'est autre chose que l'intégrale définie de l'équation (12), pour le cas particulier d'un liquide homogène soumis seulement à l'action de la pesanteur. Maintenant imaginons que la pression en M_0 soit produite par une colonne de liquide

M_0A_0 dont la hauteur verticale serait $\frac{p_0}{\Pi}$ (n° 6), et que la pression en M soit également due à une colonne de liquide MA dont $\frac{p}{\Pi}$ serait la hauteur. Les hauteurs des points A_0 et A au-dessous du plan B_0B auront pour expressions $z_0 - \frac{p_0}{\Pi}$ et $z - \frac{p}{\Pi}$: en appelant h la différence de niveau $\overline{AA'}$ de ces deux points, on aura donc

$$h = z - \frac{p}{\Pi} - \left(z_0 - \frac{p_0}{\Pi}\right),$$

et, par suite,

$$h + \frac{1}{g}\int_{s_0}^{s} \varphi \cos\gamma\, ds - \frac{V^2 - V_0^2}{2g} = 0.$$

Lorsque $\varphi = 0$, ce qui est le cas d'un fluide parfait, on voit par la dernière équation que la vitesse varie comme celle d'un point matériel qui glisserait sans frottement le long de la courbe A_0A, lieu géométrique des points A, sous la seule action de la gravité. Mais généralement φ a une valeur différente de zéro, et le travail $\int_{s_0}^{s} \varphi \cos\gamma\, ds$ est négatif; si nous posons

$$\frac{1}{g}\int_{s_0}^{s} \varphi \cos\gamma\, ds = -\zeta,$$

la variation de la hauteur due à la vitesse ne sera plus égale qu'à $h - \zeta$ comme si l'on avait retranché la quantité ζ de la différence de niveau h.

Les colonnes telles que MA sont nommées colonnes *piézométriques*, mot dont l'étymologie grecque signifie: colonne *mesurant la pression*. On conçoit qu'elles pourraient être réalisées dans certains cas, en implantant dans les parois qui contiennent le fluide, des tubes assez déliés pour ne pas gêner sensiblement le mouvement. Si le fluide est, par exemple, de l'eau, et que le tube ayant une de ses extrémités ouverte en M débouche par l'autre dans l'atmosphère, l'eau s'y élèvera jusqu'à une certaine hauteur, et y restera en équilibre pourvu que le tube soit assez

long : il est clair alors que le niveau de l'eau dans ce tube sera celui du point A baissé de $10^m,33$, puisque cette hauteur d'eau est celle qui représente la pression atmosphérique. On appelle alors *niveau piézométrique* tantôt le niveau A, tantôt celui de l'eau dans le tube, ce qui a peu d'importance, parce que l'on a toujours à considérer la différence de niveau de deux colonnes piézométriques et que le terme constant $10^m,33$ disparaît dans la soustraction. La constatation directe, ainsi effectuée, de la pression en un point quelconque d'un fluide en mouvement serait sans doute la source de grands progrès pour l'Hydraulique; malheureusement, on doit reconnaître qu'il est presque impossible de satisfaire à la condition essentielle de ne pas altérer le mouvement par l'introduction de tubes dans le liquide, alors même qu'ils ne pénétreraient presque pas à l'intérieur.

L'abaissement du niveau piézométrique depuis M_0 jusqu'en M, ou le relèvement affecté du signe —, sera ce que nous appellerons la *charge* entre ces deux points; la quantité ζ s'appelle au contraire *perte de charge*, expression parfaitement justifiée puisqu'elle se retranche de la charge quand il s'agit d'avoir la valeur de $\frac{V^2 - V_0^2}{2g}$. Moyennant ces dénominations, le théorème de D. Bernoulli, dans le cas de liquides pesants et homogènes, s'énoncerait très-simplement comme il suit : *L'accroissement de la hauteur due à la vitesse est égal à la différence entre la charge et la perte de charge.*

Nous ne chercherons point comment cet énoncé devrait se modifier pour s'adapter aux autres cas, lesquels se rencontrent bien plus rarement dans les applications que nous avons à étudier.

16. *Variation de la pression dans un fluide parfait en mouvement permanent, pour des points successifs dont le lieu coupe normalement les trajectoires.* — Les équations ci-dessus démontrées (nos 11, 12, 13 et 15) ont généralement pour objet de montrer comment varie la pression dans un fluide en mouvement permanent, quand on prend une suite de points situés sur la trajectoire d'une même molécule. Il y a des cas où il est utile de savoir quelles sont les variations de cette quantité dans un sens perpendiculaire au premier.

On peut en un point quelconque O du fluide (*fig.* 3) imaginer trois directions rectangulaires entre elles, savoir : 1° celle de la vitesse V, ou de l'élément $\overline{OO'} = ds$ de la trajectoire suivie par la molécule qui passe actuellement en O; 2° celle qu'on obtient en prolongeant le rayon de première courbure à partir de la même trajectoire, soit O*r*; 3° celle qui est perpendiculaire aux deux précédentes, représentée sur la figure par OP. Il s'agit de savoir ce que devient l'accroissement différentiel *dp* de la pression, quand on s'écarte infiniment peu de O suivant la seconde et la troisième direction, à des distances *dr*, $d\sigma$.

Il sera facile de répondre à cette question, dans le cas de la fluidité parfaite, en se rappelant qu'une petite masse de fluide prise autour du point O doit, conformément au principe de d'Alembert, satisfaire aux équations d'équilibre, pourvu que l'on tienne compte des forces d'inertie. Or, pour la petite masse en question, ces forces pourraient être réduites à deux composantes, l'une parallèle à *ds*, l'autre en sens contraire du rayon de courbure *r*, ayant respectivement pour intensité le produit de la masse par les accélérations tangentielle et normale, $\frac{dV}{dt}$ et $\frac{V^2}{r}$. Donc si N et P sont les projections de la résultante $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ des forces X, Y, Z, sur O*r* et OP prises avec leurs signes, O*r* et OP étant les sens positifs; si, en outre, ayant choisi OO', O*r*, OP, pour axes coordonnés, on applique l'équation (2) du n° 4 à l'équilibre fictif dont il s'agit, on en tirera

$$(15)\qquad \frac{dp}{dr} = \rho\left(N + \frac{V^2}{r}\right),$$

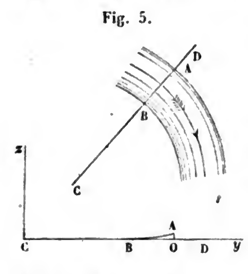
$$(16)\qquad \frac{dp}{d\sigma} = \rho P;$$

c'est-à-dire que dans le sens du rayon de courbure la pression varie suivant la loi hydrostatique, pourvu que l'on joigne la force centrifuge à celles qui sollicitent réellement chaque mo-

lécule; dans le sens OP perpendiculaire au plan osculateur de la trajectoire, la pression varie tout à fait suivant la loi hydrostatique.

17. Applications. 1°. *Section transversale d'un courant curviligne.* — On suppose un cours d'eau sensiblement horizontal (*fig.* 5), dans lequel les trajectoires seraient des cercles ayant tous leurs centres sur la verticale projetée en C. La vitesse V est supposée la même pour toutes les molécules. On demande quelle sera la coupe de la surface supérieure du courant par un plan vertical quelconque CD qui contient l'axe C.

Fig. 5.



Si l'on parcourt dans le liquide une horizontale CODy du plan CD, la pression variera suivant la loi hydrostatique, sauf l'introduction de la force centrifuge; comme la pesanteur est verticale, l'équation (15) ci-dessus donnera donc

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{V^2}{r};$$

ou bien en désignant par y la distance à l'axe vertical Cz de la molécule O qui est soumise à la pression p, attendu que l'on a $r = y$,

$$\frac{dp}{dy} = \rho \frac{V^2}{y};$$

ou encore, p_0 étant la pression en B et y_0 la longueur $\overline{BC}$,

$$p - p_0 = \rho V^2 \log \text{hyp.} \frac{y}{y_0},$$

relation qui exprime comment varie la pression sur une même horizontale perpendiculaire aux filets liquides.

D'un autre côté, la ligne perpendiculaire au plan osculateur d'une trajectoire étant ici constamment verticale, la différence de pression $p - p_1$ pour les deux points O et A, situés sur la même verticale à une distance z, suivra la loi hydrostatique

(nº 16), c'est-à-dire qu'elle sera (nº 6)

$$p - p_1 = \rho g z.$$

Or si les points A et B se trouvent tous deux à la surface libre, de sorte que p_0 et p_1 soient égales à la pression atmosphérique, on aura

$$p - p_0 = p - p_1,$$

et par suite

$$z = \frac{V^2}{g} \log \text{hyp.} \frac{y}{y_0},$$

ce qui fait connaître l'équation de la courbe BA rapportée aux axes Cy et Cz.

Bien que les circonstances supposées dans l'énoncé ne puissent guère se réaliser complétement dans la pratique, le problème qu'on vient de traiter donne cependant une explication plausible d'un fait que plusieurs personnes disent avoir observé, et qui consisterait dans la courbure de la ligne d'eau, pour certaines sections transversales de rivières. La raison en est probablement assez souvent dans la courbure des filets fluides, qui donne lieu aux forces d'inertie centrifuges et rend les pressions inégales sur une même bande horizontale d'une section donnée.

18. 2º. *Règles pour calculer la pression d'un fluide en mouvement dans certains cas particuliers.* — PREMIÈRE RÈGLE. *Lorsque dans un fluide parfait, chaque molécule possède un mouvement rectiligne et uniforme, la pression varie d'un point à l'autre suivant la loi hydrostatique.* Cela est évident, autant du moins que la viscosité est réellement négligeable, car les forces d'inertie sont nulles; les équations (1) du nº 10 se réduisent donc à

$$\frac{dp}{dx} = \rho X, \qquad \frac{dp}{dy} = \rho Y, \qquad \frac{dp}{dz} = \rho Z,$$

absolument comme s'il y avait équilibre. Nous remarquerons en passant que dans un liquide le mouvement ne peut pas être rectiligne et permanent sans être en même temps uniforme. Car si l'axe des x est pris parallèle aux vitesses de tous les

points, avec les notations du n° 10 on aura

$$v = 0, \quad w = 0,$$

d'où

$$\frac{dv}{dy} = 0, \qquad \frac{dw}{dz} = 0;$$

l'équation de continuité qui est en général, pour un liquide,

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

se réduit à

$$\frac{du}{dx} = 0.$$

D'ailleurs, à cause de la permanence, la dérivée partielle $\frac{du}{dt}$ s'annule également; et comme, pour une molécule déterminée, u ne serait fonction que des deux variables x, t, on voit que, sur la ligne parcourue par cette molécule, la vitesse conserverait toujours la même valeur, en tous les points et à tous les instants.

Deuxième règle. *Dans le cas d'un fluide animé de mouvements quelconques, mais très-lents, on admet encore que la pression varie suivant la loi hydrostatique.* En effet, cette lenteur est une preuve que les forces ne sont pas loin de satisfaire aux équations d'équilibre; la règle donnera donc une évaluation approximative de la pression.

Troisième règle. *Lorsque les molécules d'un fluide parfait ont des mouvements identiques avec ceux qu'elles prendraient sous la seule action des forces extérieures, la pression est constante à un instant déterminé, dans toute l'étendue du fluide.* En effet, si nous reprenons les notations des n°s 10 et 11, nous aurons dans l'hypothèse d'une viscosité négligeable :

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = J_x, \qquad Y - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = J_y, \qquad Z - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = J_z;$$

or, d'après l'énoncé, on aurait en même temps

$$X = J_x, \quad Y = J_y, \quad Z = J_z,$$

donc on en tire

$$\frac{dp}{dx} = 0, \qquad \frac{dp}{dy} = 0, \qquad \frac{dp}{dz} = 0,$$

c'est-à-dire que pour un même instant la pression ne varie pas d'un point à l'autre du fluide. Elle serait constante d'une manière absolue dans le cas de la permanence du mouvement, puisque alors la pression en un point donné ne varierait pas avec le temps.

Le cas supposé par l'énoncé se réalise à peu près quand un liquide pesant sort d'un vase entretenu à un niveau constant et s'écoule par un orifice de dimensions médiocres relativement à celles du vase, en obéissant à l'action de la pesanteur. On observe alors un jet dont la forme parabolique ne diffère pas sensiblement (au moins dans une certaine étendue) de la trajectoire que suivrait une molécule isolée.

Quatrième règle. *Lorsqu'il existe dans un fluide naturel en mouvement une section plane* (S) *rencontrée normalement par toutes les trajectoires, et que celles-ci sont sensiblement rectilignes aux environs du plan dont il s'agit, la pression varie suivant la loi hydrostatique, pour un déplacement de direction quelconque tracé dans la section* (S). — Nommons en effet :

- ds la distance infiniment petite de deux points situés dans (S) ;
- p et ρ la pression et la densité aux environs de ces points ;
- P la projection sur la direction ds, de la force extérieure rapportée à l'unité de masse, qui sollicite une molécule quelconque voisine des mêmes points, indépendamment des actions du fluide contigu ;
- Q, T, les projections analogues pour la force d'inertie et la résultante des actions dues à la viscosité.

Les équations d'équilibre devant être vérifiées quand on tient compte de toutes ces forces, on peut écrire (n° 4)

$$\frac{dp}{ds} = \rho\,(P + Q + T),$$

et pour justifier l'énoncé de la règle il suffit de montrer qu'on a

$$Q = 0, \quad T = 0,$$

car alors l'équation ci-dessus resterait bien la même que dans l'état d'équilibre, et la variation dp correspondante à ds n'aurait que la valeur hydrostatique. Or les forces d'inertie tangentielles ont une direction perpendiculaire au plan (S) et par suite à ds; les forces d'inertie centrifuges sont négligeables puisque l'on suppose les trajectoires sensiblement rectilignes : donc en premier lieu Q est nul. D'un autre côté le fluide se composant de filets normaux à (S) peut être assimilé à un ensemble de prismes très-déliés qui glisseraient les uns sur les autres parallèlement à leurs arêtes, c'est-à-dire perpendiculairement à (S) : il en résulte que les forces dues à la viscosité, opposées, soit aux glissements réciproques, soit encore aux extensions simples des prismes élémentaires, deviendraient également normales à (S) et par conséquent que la projection T aurait une valeur nulle. Les formules de Navier citées au n° 14 conduisent d'ailleurs au même résultat, car si on prend l'axe des x suivant la perpendiculaire à (S), les vitesses composantes v et w doivent constamment s'annuler aux environs de cette surface : on aurait donc

$$\frac{d^2v}{dx^2}=0,\quad \frac{d^2v}{dy^2}=0,\quad \frac{d^2v}{dz^2}=0,\quad \frac{d^2w}{dx^2}=0,\quad \frac{d^2w}{dy^2}=0,\quad \frac{d^2w}{dz^2}=0,$$

et la résultante des actions de la viscosité deviendrait parallèle aux x.

Donc enfin Q et T sont des quantités nulles, et l'énoncé de la règle se trouve démontré.

19. *Extension des théorèmes d'Hydrostatique et d'Hydrodynamique à des cas d'équilibre ou de mouvement relatif.* — On sait que les questions de mouvement d'un système matériel quelconque, par rapport à un système de comparaison mobile, peuvent se mettre en équation et se traiter comme s'il s'agissait d'un mouvement absolu, pourvu qu'aux forces réelles qui sollicitent chaque molécule on joigne, pour chaque instant, deux forces fictives, savoir : 1° la force d'inertie du mouvement d'entraînement, c'est-à-dire la force égale et contraire à celle qui donnerait à la molécule l'accélération totale du point géométrique faisant partie du système de comparaison et coïnci-

dant avec elle à l'instant considéré; 2° une force dite *composée* que nous ne définirons pas ici, parce qu'elle disparaît dans les énoncés que nous devons donner.

Quand il est question d'un équilibre relatif, on peut le considérer comme un cas particulier du mouvement relatif, celui où les vitesses relatives des différents points sont constamment nulles. La seconde force est alors nulle, parce qu'elle contient la vitesse relative en facteur; et il suffit d'exprimer l'équilibre entre les forces réelles et les forces d'inertie du mouvement d'entraînement.

Il suffit également de joindre ces mêmes forces d'inertie aux forces réelles quand on veut appliquer le théorème de Bernoulli à un mouvement relatif; car le théorème de Bernoulli est une conséquence du théorème de la puissance vive et du travail (n° 13), et le travail relatif de la seconde force fictive est nul parce qu'elle a une direction perpendiculaire à la vitesse relative.

Dans tout ce qui précède, on a vu que les équations de l'Hydrostatique et de l'Hydrodynamique renferment, non pas les forces appliquées à chaque molécule, mais bien ces forces rapportées à l'unité de masse ou divisées par la masse qu'elles sollicitent, ou encore l'accélération correspondante à ces forces. S'il est question de l'équilibre relatif d'un fluide ou d'un mouvement relatif permanent auquel on voudrait faire l'application du théorème de Bernoulli, outre les accélérations correspondantes aux forces réelles, on devra introduire celles qui seraient égales et contraires aux accélérations d'entraînement.

20. *Exemples d'équilibre relatif et de mouvement relatif.*— Comme exemple d'équilibre relatif, nous prendrons celui d'un liquide pesant et homogène qui demeure en repos par rapport à un vase animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe vertical. Ici l'accélération d'entraînement prise en sens contraire est l'accélération centrifuge; si nous appelons ω la vitesse angulaire du vase, et que nous imaginions trois axes de coordonnées rectangulaires, parmi lesquels celui des z coïncidera avec l'axe de rotation, cette accélération sera parallèle

au plan des xy et aura suivant les axes des x et des y deux composantes $\omega^2 x$, $\omega^2 y$. Par suite, dans l'équation (2) du n° 4, il faudra faire

$$X = \omega^2 x, \quad Y = \omega^2 y, \quad Z = -g,$$

cette dernière valeur supposant d'ailleurs que l'axe des z est ascendant : de cette manière on aura

$$dp = \rho\omega^2 \left(x dx + y dy - \frac{g dz}{\omega^2}\right).$$

La quantité entre parenthèses est une différentielle exacte; l'équilibre relatif est donc possible dans ce cas, et s'il a effectivement lieu, les surfaces de niveau seront données par l'équation générale

$$x dx + y dy - \frac{g dz}{\omega^2} = 0,$$

ou bien

$$x^2 + y^2 - \frac{2gz}{\omega^2} = \text{const.},$$

équation représentant une série de surfaces de révolution autour de l'axe des z. Chacune d'elles a pour courbe méridienne une parabole dont l'équation s'obtiendrait en faisant $x = 0$ dans l'équation de la surface, ce qui donne

$$y^2 - \frac{2gz}{\omega^2} = \text{const.};$$

cette courbe est donc une parabole ayant son axe vertical et son sommet situé sur l'axe de rotation du vase.

La surface libre sera une des surfaces de niveau si la pression y est partout la même, comme cela est en effet quand le liquide se trouve en contact avec l'atmosphère.

Si l'axe de rotation était horizontal et coïncidait, par exemple, avec l'axe des x, en appelant encore ω la vitesse angulaire du vase et t le temps écoulé depuis que l'axe des z était vertical et ascendant, les composantes de g suivant les y et les z seraient $g \sin \omega t$, $-g \cos \omega t$; celles de l'accélération centrifuge

$\omega^2 y$, $\omega^2 z$; alors l'équation (2) du n° 4 deviendrait

$$dp = \rho\,[(\omega^2 y + g \sin \omega t)\,dy + (\omega^2 z - g \cos \omega t)\,dz];$$

ce qui montre l'impossibilité de l'équilibre relatif, car le multiplicateur de ρ dépendant du temps, les surfaces de niveau qui seraient la conséquence de l'équilibre devraient elles-mêmes varier d'un instant à l'autre, et par conséquent le liquide ne peut pas toujours conserver la même position dans le vase.

En dernier lieu, nous supposerons qu'on veuille appliquer le théorème de Bernoulli à un liquide pesant et homogène qui se meut relativement à un système tournant uniformément autour d'un axe vertical, avec une vitesse angulaire ω. Prenons cet axe comme axe des z et le sens descendant comme sens positif. Pour une molécule située à la distance r de l'axe, l'accélération d'entraînement prise en sens contraire se réduit à l'accélération centrifuge $\omega^2 r$, et le travail élémentaire de $\omega^2 r$ considérée comme force a pour valeur $\omega^2 r\,dr$; le travail pour un déplacement fini est donc

$$\frac{1}{2}\omega^2 r^2 + \text{const.}$$

L'équation (14) du n° 15 doit par conséquent se modifier comme ci-dessous :

$$z - \frac{p}{\Pi} + \frac{1}{g}\int \varphi \cos\gamma\, ds - \frac{V^2}{2g} + \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \text{const.}$$

En désignant par z_0, p_0, s_0, V_0, r_0 les valeurs particulières des quantités z, p, s, V, r, pour un point de départ situé sur la même trajectoire, on pourrait encore écrire

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} & z - z_0 - \frac{p - p_0}{\Pi} + \frac{1}{g}\int_{s_0}^{s} \varphi \cos\gamma\, ds - \frac{V^2 - V_0^2}{2g} \\ & \qquad + \frac{\omega^2 (r^2 - r_0^2)}{2g} = 0, \end{aligned} \right.$$

ce qui montre qu'on tiendrait compte du mouvement des axes mobiles en ajoutant à la charge réelle un gain de charge fictif

égal à $\frac{\omega^2(r^2 - r_0^2)}{2g}$, accroissement de la hauteur due à la vitesse d'entraînement pendant le parcours $s - s_0$ sur la trajectoire relative. Il est bien entendu que dans les deux équations ci-dessus les variables s et V désignent un arc de trajectoire relative et une vitesse relative; de même $\int \varphi \cos \gamma \, ds$ désigne aussi un travail relatif.

CHAPITRE DEUXIÈME.

ÉCOULEMENT PERMANENT D'UN LIQUIDE PESANT ET HOMOGÈNE PAR UN ORIFICE PERCÉ DANS UN RÉSERVOIR.

§ I. — Cas où les effets de la viscosité peuvent être négligés.

21. *Généralités; premières indications de l'expérience sur les écoulements d'un liquide par orifice en mince paroi.* — Un liquide homogène s'écoule par une petite ouverture pratiquée en dessous de son niveau, dans la paroi d'un vase ou réservoir, et forme une veine jaillissant dans un gaz indéfini qui l'entoure complétement sur une certaine longueur. L'écoulement est supposé permanent, ce qui exige qu'il y ait toujours la même quantité de liquide dans le vase, et par conséquent que le niveau soit entretenu à une hauteur invariable; pour cela, le liquide écoulé devra être remplacé d'une manière continue, à moins que le vase n'ait une capacité indéfinie. La paroi n'a qu'une faible épaisseur sur le périmètre de l'ouverture, de sorte que celle-ci peut être considérée comme percée dans une membrane très-mince. Enfin, le liquide ne reçoit pas d'autres actions extérieures que celles qui proviennent de la pesanteur, à part les pressions exercées normalement sur tout son contour par les corps en contact.

Dans ces circonstances, en observant d'abord ce qui se passe à l'intérieur du réservoir, on reconnaît que les molécules liquides y possèdent des vitesses très-faibles, pour peu qu'on les prenne à une distance notable de l'orifice, et que celui-ci soit suffisamment petit par rapport au réservoir. On rend ce fait sensible aux yeux en introduisant dans le liquide un corps pulvérulent de densité à peu près égale qui se mêle avec lui et participe à son mouvement. Une conséquence immédiate qui en résulte, c'est que la pression dans le réservoir doit va-

rier à peu près suivant la loi hydrostatique (n° 18, deuxième règle), et que la surface libre s'écarte peu d'un plan horizontal.

Lorsqu'on observe au contraire la veine qui s'écoule, on voit ses dimensions transversales diminuer à partir de l'orifice jusqu'à une section minimum dite *section contractée*, où les molécules arrivent avec des vitesses sensiblement parallèles et normales au plan de ladite section : cette contraction est due à ce que les filets affluent de l'intérieur vers l'orifice dans toutes les directions, d'où résulte une convergence qui ne cesse pas immédiatement au dehors. Après le passage de la section contractée, les points matériels liquides décrivent à peu près les mêmes paraboles que dans le vide, de sorte qu'ils supportent une pression constante (n° 18, troisième règle) égale à la pression du gaz ambiant.

Soient Ω l'aire de la section contractée, A celle de l'orifice : le rapport $\frac{\Omega}{A}$ a reçu le nom de *coefficient de contraction*. La théorie n'a pas encore réussi jusqu'à présent à calculer ce coefficient, sauf dans un cas particulier que nous traiterons par la suite, et l'Hydraulique expérimentale ne donne à son sujet que des renseignements assez incomplets. Voici comment les expériences peuvent être faites. On mesure une section quelconque de la veine, en faisant passer celle-ci à travers un bâti, par lequel on supporte une série de tiges métalliques terminées en pointe et toutes contenues dans le plan de la section qu'il s'agit de connaître; on enfonce avec précaution les tiges jusqu'à ce qu'elles affleurent la veine sans y pénétrer, puis on arrête l'écoulement; les pointes des tiges dessinent alors exactement la section cherchée, qu'on peut relever à loisir. La position de la section minimum est déterminée par tâtonnement. On arrive ainsi à trouver Ω, et A étant immédiatement connu par une mesure faite sur le réservoir, on en conclut le rapport $\frac{\Omega}{A}$.

Les expériences dont on vient de donner une idée ont été premièrement exécutées sur des orifices circulaires, dont les diamètres variaient de $0^m,02$ à $0^m,16$. Divers hydrauliciens ont

constaté : 1° que la section contractée, de forme également circulaire, se trouve à une distance de l'orifice à peu près égale au rayon de l'aire Ω; 2° que le rapport de ce rayon à celui de l'aire A est environ 0,79, d'où résulterait

$$\frac{\Omega}{A} = (0,79)^2 = 0,624.$$

Ainsi, le coefficient de contraction aurait dans le cas actuel une valeur très-rapprochée de la fraction $\frac{5}{8}$. Au reste, ce n'est là qu'une moyenne dont les observations peuvent s'écarter un peu, en plus ou en moins; il est difficile de croire que le rapport $\frac{\Omega}{A}$ est absolument constant et ne dépend en aucune façon ni du rayon de l'orifice, ni de sa situation sur la surface du réservoir, ni enfin d'aucune des nombreuses circonstances secondaires par lesquelles une expérience diffère d'une autre.

Quand l'orifice n'est pas circulaire, on admet encore comme valeur approximative du rapport $\frac{\Omega}{A}$ le nombre 0,62; mais alors les erreurs peuvent devenir assez notables. En 1827, MM. Poncelet et Lesbros ont fait le relevé d'une veine d'eau qui s'écoulait par un orifice carré de $0^m,20$ de côté, avec une charge de $1^m,68$ sur le centre, et ont obtenu $\frac{\Omega}{A} = 0,56$; à la vérité, M. Lesbros ayant repris la même expérience quelques années plus tard, avec toutes les précautions possibles pour en assurer l'exactitude, à trouvé $\frac{\Omega}{A} = 0,58$; mais ce dernier nombre, quoique plus rapproché de la moyenne 0,62, s'en écarte encore de $\frac{1}{15}$ de sa valeur. Dans une autre expérience du même observateur le rapport en question a été 0,64.

Les orifices polygonaux donnent lieu à un phénomène curieux connu sous le nom d'*inversion de la veine*, dont nous dirons seulement quelques mots, parce que son étude ne pourrait fournir, dans l'état actuel des choses, aucune indication bien utile pour l'Hydraulique pratique. Si l'orifice est un carré, la veine se transforme à une certaine distance et prend

une autre section encore sensiblement carrée, mais dont les côtés font des angles de 45 degrés avec ceux de l'orifice. Par exemple, MM. Poncelet et Lesbros, dans l'expérience citée ci-dessus, ont produit une veine dont la *fig.* 6 représente trois profils consécutifs; les coupes ACGE, *abcdefgh*, *a'b'c'd'e'f'g'h'* sont faites respectivement aux distances $0^m,00$, $0^m,15$, $0^m,30$ de l'ouverture; la dernière donne la section minimum. Avec un orifice en forme de pentagone régulier, Bidone a obtenu pour section contractée une étoile à cinq branches, dont les pointes correspondaient aux milieux des côtés du pentagone primitif. Enfin, des mesures prises par M. Lesbros sur une veine jaillissant par une fente rectangulaire verticale, de $0^m,60$ de hauteur sur $0^m,02$ de largeur, ont donné les figures suivantes (*fig.* 7) pour sections transversales aux

Fig. 6.

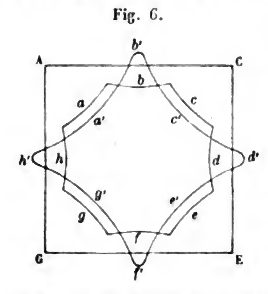
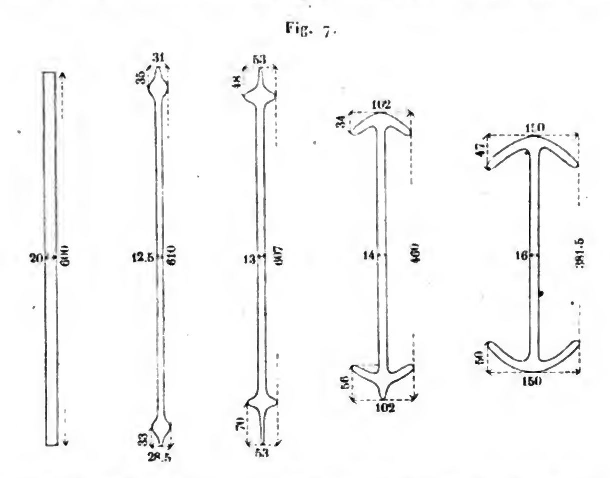


Fig. 7.



distances $0^m,00$, $0^m,10$, $0^m,30$, $0^m,70$, $1^m,10$ de l'origine. Les cotes sont exprimées en millimètres.

Dans la pratique des ingénieurs, la quantité qu'on a le plus ordinairement besoin de connaître ou de calculer à priori, d'après certaines données, c'est la *dépense* : on nomme ainsi la

volume liquide Q écoulé dans chaque unité de temps, volume qui est constamment le même, puisque la permanence existe, et que le phénomène étudié ne varie pas, à quelque instant qu'on l'observe. Mais avant de consulter l'expérience à ce sujet, il convient de voir ce que la théorie pourra nous apprendre.

Si nous nommons ω un élément superficiel de la section contractée Ω, et V la vitesse de la molécule qui traverse cet élément, dans un temps infiniment petit dt il sortira par ω un cylindre de liquide ayant la section ω, la hauteur $V\,dt$, et par conséquent le volume $\omega V\,dt$. Le volume total écoulé dans le temps dt s'exprimera donc par $dt\,\Sigma\omega V$, Σ étant une somme étendue à tous les éléments ω; or la permanence fait que le même volume s'écoule dans des temps égaux : donc

$$dt\,\Sigma\omega V : Q :: dt : 1,$$

et par suite

$$Q = \Sigma\omega V.$$

Cherchons donc en premier lieu la vitesse V.

22. *Vitesse de l'écoulement.* — La vitesse V se détermine sans peine au moyen du théorème de Bernoulli (nº 15), si l'on admet d'avance (sauf vérification par l'expérience) que la viscosité est négligeable. Appliquons en effet ce théorème à une molécule en prenant son point de départ initial dans le réservoir, lorsqu'elle n'a pas encore de vitesse sensible (nº 21), et pour position finale celle de l'élément ω dans la section contractée. Nommons

h la charge entre les deux positions considérées de la molécule;

ζ la perte de charge correspondante, que nous supposons très-petite;

z la hauteur verticale de l'élément ω au-dessous du niveau du liquide dans le réservoir;

p la pression par unité de surface sur ce niveau;

p' la pression du gaz qui entoure la veine;

Π le poids de l'unité de volume du liquide.

La vitesse initiale étant nulle ou négligeable, ainsi que ζ, le théorème de Bernoulli donne

$$\frac{V^2}{2g} = h;$$

or le niveau piézométrique, pour la position initiale, s'élève plus haut que celui du réservoir à la hauteur $\frac{p}{\Pi}$, puisque dans le réservoir la pression varie suivant la loi hydrostatique (n° 21); pour la position finale, la colonne piézométrique a seulement la hauteur $\frac{p'}{\Pi}$: donc on a

$$h = z + \frac{p - p'}{\Pi},$$

et, en substituant dans l'équation précédente,

$$\frac{V^2}{2g} = z + \frac{p - p'}{\Pi},$$

ou bien encore

(1) $$V = \sqrt{2g\left(z + \frac{p - p'}{\Pi}\right)},$$

relation qui détermine l'inconnue V. On l'énonce en disant que la hauteur due à la vitesse dans un élément de la section contractée est égale à la charge $z + \frac{p - p'}{\Pi}$ sur cet élément. Ordinairement le mot *charge* indique (n° 15) une différence de niveau entre les colonnes piézométriques de deux points; mais les colonnes piézométriques pour tous les points du bassin s'élevant toutes à la même hauteur, pourvu qu'on se place assez loin de l'orifice, le point de départ est ici indifférent.

Quand la veine et la surface supérieure du liquide dans le bassin sont entourées d'une même atmosphère gazeuse, on a très-approximativement $p = p'$, et V se réduit à $\sqrt{2gz}$.

La valeur de la vitesse fournie par l'équation (1) se vérifie à peu près par l'expérience, quand il s'agit d'un écoulement d'eau. Diverses observations de Bossut et Michelotti, faites sur des veines qui sortaient par des orifices circulaires de petit dia-

mètre ($0^m,027$ environ), avec une charge n'excédant pas $7^m,19$, montrent que le rapport n de la vitesse réelle à la vitesse calculée est compris entre 0,97 et 1,00. La petite erreur en plus que nous constatons ici s'explique très-bien par l'existence de la viscosité, dont nous avons négligé l'effet; car nous aurions dû écrire

$$\frac{V^2}{2g} = h - \zeta,$$

et comme l'expérience donne

$$V = n\sqrt{2gh},$$

on en conclut sans peine, par l'élimination de V,

$$\zeta = h(1 - n^2).$$

La viscosité consommerait donc, d'après cette explication, la fraction $1 - n^2$ (soit de 0 à 0,06) de la charge.

Mais il est probable que le calcul de l'équation (1) contient d'autres inexactitudes que celle qui consiste à négliger la viscosité. En effet, dans l'expérience citée plus haut (n° 21) à propos de l'inversion d'une veine sortant par un orifice carré de $0^m,20$ de côté, M. Lesbros a reconnu que le nombre n excédait l'unité de 0,04 environ. Or on ne peut vraisemblablement supposer que la viscosité produise un travail positif et par suite un gain de charge; quoique nous ne puissions pas nous rendre un compte exact et détaillé des effets de cette cause, nous préférons croire que son travail est toujours résistant, mais que la perte de charge correspondante est compensée quelquefois par d'autres circonstances secondaires que la théorie laisse de côté, comme, par exemple, l'existence dans le réservoir d'une vitesse sensible qui trouble la loi hydrostatique des pressions, le défaut de permanence du mouvement, peut-être aussi une certaine raréfaction du gaz autour de la veine, d'où résulterait la diminution de la pression p', etc.

Quoi qu'il en soit, l'erreur à craindre sur la vitesse, dans le cas de charges modérées, étant limitée à 3 ou 4 centièmes, on doit regarder le problème de sa détermination comme résolu d'une manière satisfaisante. Quant aux vitesses qui se

produiraient avec des charges excédant beaucoup la limite de 7 mètres, nous ne connaissons aucune observation qui puisse nous faire savoir jusqu'à quel point la formule (1) les donnerait exactement (*).

La vérification expérimentale de cette formule suppose qu'on sache mesurer la vitesse avec laquelle les filets traversent la section contractée. Pour cela on peut employer deux moyens. D'abord il est possible de recueillir et d'évaluer par une cubature le volume Q dépensé dans l'unité de temps, et de relever le dessin exact de la veine, pour en déduire l'aire Ω ou $\Sigma\omega$ de la section contractée; cela fait, on aura, comme on l'a vu au n° 21,

$$Q = \Sigma\omega V;$$

et si l'on divise l'une par l'autre les quantités connues Q et $\Sigma\omega$, le quotient $\frac{\Sigma\omega V}{\Sigma\omega}$ donnera la vitesse moyenne dans cette section. Un second moyen consisterait à observer l'amplitude du jet dans la portion où les molécules décrivent des paraboles : nommant x la longueur parcourue dans la direction de la vitesse initiale V, y l'abaissement vertical correspondant au-dessous de cette ligne, t le temps employé à le décrire, on sait qu'on a

$$x = Vt, \quad y = \frac{1}{2}gt^2,$$

d'où l'on tire

$$V = x\sqrt{\frac{g}{2y}}.$$

Ainsi le calcul de V pourrait s'effectuer en mesurant les deux longueurs x et y.

23. *Calcul théorique de la dépense, en supposant connue la section contractée.* — Si l'on admet que la formule (1) donne avec une exactitude suffisante la vitesse en tout point de la section contractée, et que celle-ci soit définie quant à la forme et à l'étendue, il deviendra facile de procéder au calcul de la quantité $\Sigma\omega V$, qui exprime la dépense (n° 21). D'abord il peut se faire que les charges $z + \frac{p - p'}{\Pi}$ n'aient entre elles que de faibles

(*) Dans certains réservoirs projetés par le service des inondations de la Loire, afin d'emmagasiner les crues, l'eau doit s'écouler sous des charges pouvant aller jusqu'à 50 mètres. Il serait à désirer, une fois la construction établie, qu'on en profitât pour vérifier la formule (1) avec des charges plus fortes que celles des expériences connues.

différences relativement à leur valeur moyenne : alors la vitesse serait sensiblement constante pour tous les points, et égale à $\sqrt{2g\left(z_1+\frac{p-p'}{\Pi}\right)}$, en appelant z_1 l'ordonnée z du centre de gravité de la section contractée. Donc on aurait

$$(2) \qquad Q=\Omega\sqrt{2g\left(z_1+\frac{p-p'}{\Pi}\right)}.$$

Quand la hauteur verticale de la section contractée n'est pas petite en comparaison de la charge sur son centre de gravité, les vitesses que la formule (1) attribue aux divers filets liquides ne sont plus rapprochées de l'égalité ; il semble alors nécessaire, au premier abord, d'effectuer par le calcul intégral la sommation des produits de chaque élément superficiel ω par la vitesse V qui lui correspond. Mais nous allons montrer par deux exemples que cette manière de procéder est inutile, et qu'on peut encore s'en tenir à la formule (2).

Le premier exemple sera celui d'une section contractée rectangulaire ayant deux côtés horizontaux de longueur l et deux autres verticaux de longueur a. Appelons H la charge sur le bord supérieur et $H+y$ la charge sur un point quelconque, y étant variable de o à a. Le volume dépensé par une tranche horizontale infiniment mince $l\,dy$ de la section contractée aura pour valeur $l\,dy\sqrt{2g(H+y)}$; la dépense cherchée Q s'exprimera donc par l'intégrale définie $\int_0^a l\,dy\sqrt{2g(H+y)}$, et l'on posera

$$Q=l\sqrt{2g}\int_0^a\sqrt{H+y}\,dy=\frac{2}{3}l\sqrt{2g}\left[(H+a)^{\frac{3}{2}}-H^{\frac{3}{2}}\right].$$

Or, si la dépense avait été calculée comme dans le cas d'une section de petite hauteur, la formule (2) aurait donné

$$Q=la\sqrt{2g\left(H+\frac{a}{2}\right)};$$

le rapport des deux résultats sera donc

$$\frac{2}{3}\,\frac{(H+a)^{\frac{3}{2}}-H^{\frac{3}{2}}}{a\left(H+\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Voici la valeur numérique de cette expression pour diverses valeurs du rapport $\frac{H}{H+a}$:

Rapport $\frac{H}{H+a}$...	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
Rapport des deux dépenses.......	0,943	0,979	0,992	0,997	0,999	1,000 (*).

Comme on le voit, l'écart relatif entre la formule (2) et le résultat de l'intégration n'atteint jamais 6 centièmes, et même il serait beaucoup en dessous pourvu que H fût seulement le quart de la hauteur a, car alors $\frac{H}{H+a}$ serait égal à 0,2, et la limite de 6 centièmes s'abaisserait à 2. Ajoutons que dans le cas d'une petite valeur de $\frac{H}{a}$ les deux expressions de la dépense ne mériteraient pas plus de confiance l'une que l'autre; car le calcul indiquant une vitesse beaucoup plus petite pour le bord supérieur que pour le bord inférieur de la veine, il est impossible d'admettre que les différents filets liquides ne se contrarient pas dans leur mouvement; et la supposition ci-dessus énoncée (n° 21) d'un jet parabolique avec une pression constamment égale à celle du gaz ambiant devient une pure fiction. Donc la formule (2) est aussi bonne que celle obtenue par l'intégration : quand leur emploi est justifié par les circonstances physiques de l'écoulement, elles donnent des résultats très-sensiblement égaux; quand elles divergent un peu, il faut les considérer toutes deux comme défectueuses, attendu qu'elles reposent alors sur une hypothèse trop inexacte.

Nous prendrons pour second exemple celui d'une veine à section circulaire ayant un diamètre contracté a. Appelant l la longueur variable d'une

---

(*) Ce rapport se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ quand a est infiniment petit relativement à H, ce qui donne

$$\frac{H}{H+a}=1;$$

mais alors on a d'après la formule du binôme, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier,

$$(H+a)^{\frac{3}{2}}=H^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}aH^{\frac{1}{2}}+\ldots;$$

D'ailleurs la quantité $a\left(H+\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ simplifiée de même se réduit à $aH^{\frac{1}{2}}$. Donc à la limite, pour $a=0$, on pourra écrire

$$\frac{2}{3}\frac{(H+a)^{\frac{3}{2}}-H^{\frac{3}{2}}}{a\left(H+\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\frac{aH^{\frac{1}{2}}}{aH^{\frac{1}{2}}}=1.$$

tranche horizontale de la section contractée, et conservant les autres notations du premier exemple, nous aurons encore

$$Q = \int_0^a l dy \sqrt{2g(H+y)};$$

mais ici l n'est plus constant; c'est une variable liée à y par la relation

$$\frac{1}{4} l^2 + \left(\frac{1}{2} a - y\right)^2 = \frac{1}{4} a^2.$$

Pour effectuer l'intégration, on posera

$$y = \frac{1}{2} a (1 - \cos\varphi),$$

d'où résulte

$$l = a \sin\varphi,$$

$$dy = \frac{1}{2} a \sin\varphi \, d\varphi,$$

$$Q = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{g} \int_0^\pi \sin^2\varphi \, d\varphi \sqrt{2H + a - a\cos\varphi};$$

ou encore, en posant $\varepsilon = \frac{a}{2H+a}$,

$$Q = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{2g\left(H + \frac{a}{2}\right)} \int^\pi \sqrt{1 - \varepsilon \cos\varphi} \sin^2\varphi \, d\varphi.$$

La dépense calculée par la formule (2) serait

$$Q = \frac{1}{4} \pi a^2 \sqrt{2g\left(H + \frac{a}{2}\right)};$$

le rapport des deux résultats s'exprime donc ici par

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{1 - \varepsilon \cos\varphi} \sin^2\varphi \, d\varphi.$$

On pourrait aisément le développer en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de ε; mais il nous suffira d'en chercher les valeurs limites correspondantes à $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = 1$. Si l'on a $\varepsilon = 0$, le rapport en question se réduit à $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2\varphi \, d\varphi$. Or

$$\int \sin^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{2} \sin\varphi \cos\varphi,$$

$$\int_0^\pi \sin^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \pi;$$

donc le rapport des deux dépenses calculées est $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}$ ou l'unité, comme on devait s'y attendre, car $\frac{a}{2H+a}$ ne peut pas s'annuler sans que a devienne infiniment petit par rapport à H, et alors on retombe dans le cas d'une section contractée de très-petite hauteur. Si ε était égal à 1, ce qui supposerait $H=0$, il faudrait calculer

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sqrt{1-\cos\varphi}\,\sin^2\varphi\,d\varphi,$$

soit, à cause de la relation $1-\cos\varphi = 2\sin^2\frac{1}{2}\varphi$,

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\pi \sin\frac{1}{2}\varphi\,\sin^2\varphi\,d\varphi,$$

ou bien encore, en posant $\frac{1}{2}\varphi = 6$,

$$\frac{16\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 6\,\cos^2 6\,d6.$$

Or on a

$$\int \sin^3 6\,\cos^2 6\,d6 = \int \sin 6\,d6 . \cos^2 6\,(1-\cos^2 6)$$
$$= \int \cos^2 6\,\sin 6\,d6 - \int \cos^4 6\,\sin 6\,d6$$
$$= -\frac{1}{3}\cos^3 6 + \frac{1}{5}\cos^5 6;$$

par suite

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 6\,\cos^2 6\,d6 = \frac{1}{3}-\frac{1}{5} = \frac{2}{15},$$

et le rapport cherché

$$\frac{16\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 6\cos^2 6\,d6 = \frac{32\sqrt{2}}{15\pi} = 0{,}960.$$

La limite de l'erreur relative commise en substituant la formule (2) au résultat de l'intégration ne serait plus ici que de 4 centièmes; les conclusions données après le premier exemple subsistent donc à fortiori, et par induction nous admettrons qu'elles se vérifieraient aussi pour d'autres figures que le rectangle et le cercle.

Ainsi donc, en définitive, le calcul de la dépense d'un orifice en mince

paroi se réduirait à multiplier l'aire Ω de la section contractée par la vitesse du filet central, sauf le cas exceptionnel d'une faible charge sur la partie supérieure de la veine. La section contractée n'étant pas ordinairement une donnée immédiate de la question, on introduirait approximativement, au lieu de z_1 dans la valeur $\sqrt{2g\left(z_1+\frac{p-p'}{\Pi}\right)}$ de la vitesse qui anime le filet central, l'ordonnée analogue pour l'orifice lui-même. Quant à l'aire Ω, on la déduirait de l'aire A de l'orifice en prenant (n° 21) $\Omega = 0{,}62\,A$.

Si l'on réfléchit un peu sur la manière dont nous sommes arrivé à la règle qui vient d'être exprimée, on voit que pratiquement le calcul de la dépense présenterait des incertitudes assez graves. On serait exposé à commettre de petites erreurs, 1° sur l'ordonnée z_1, 2° sur la vitesse du filet central, 3° sur l'aire Ω, ces quantités ne pouvant être obtenues qu'avec une approximation plus ou moins satisfaisante : toutes ces erreurs, en se combinant, pourraient fausser le résultat final. Aussi les hydrauliciens préfèrent-ils employer un autre procédé, dans lequel on emprunte aux considérations théoriques seulement la forme de l'expression de la dépense, en se réservant de déterminer expérimentalement un coefficient qui corrige en bloc toutes les inexactitudes dont nous avons parlé.

24. *Calcul pratique de la dépense par un orifice en mince paroi.* — Soient z_2 l'ordonnée du centre de gravité de l'orifice relativement au niveau supérieur du liquide, U la vitesse moyenne dans la section contractée, c'est-à-dire la quantité qui, multipliée par son aire Ω, donne la dépense; les autres notations resteront les mêmes que dans les numéros précédents. On sait (nos 22 et 23) que U diffère peu de $\sqrt{2g\left(z_2+\frac{p-p'}{\Pi}\right)}$; on sait de plus que Ω est avec A dans un rapport sensiblement constant. On doit donc poser

$$(3) \qquad Q = mA\sqrt{2g\left(z_2+\frac{p-p'}{\Pi}\right)},$$

m étant un coefficient numérique donné par l'expérience pour chaque cas particulier qui peut se présenter. Ce coefficient représente principalement l'effet de la contraction, mais il n'est cependant pas identique avec le coefficient de contraction; en effet, ΩU exprimant aussi la dépense, on a

$$\Omega U = mA\sqrt{2g\left(z_2+\frac{p-p'}{\Pi}\right)},$$

d'où résulte

$$m = \frac{\Omega}{A} \cdot \frac{\sqrt{2g\left(z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}\right)}}{U}.$$

Le nombre m est donc le produit du coefficient de contraction par le nombre, peu éloigné de l'unité, qui doit multiplier l'expression $\sqrt{2g\left(z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}\right)}$ pour qu'elle devienne égale à la vitesse moyenne U dans la section contractée.

Le nombre m s'appelle *coefficient de dépense;* dans le langage et dans l'usage on le confond très-souvent avec le coefficient de contraction, ce qui a pratiquement peu d'importance.

Quand l'orifice est circulaire, et que son diamètre varie de $0^m,02$ à $0^m,16$, un grand nombre d'expériences faites, il est vrai, sous des charges inférieures à $6^m,80$ (*) concordent assez bien pour faire attribuer au coefficient de dépense la valeur 0,62. On aurait donc dans ce cas

$$Q = 0,62\, A \sqrt{2g\left(z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}\right)}.$$

Quand l'orifice présente une autre forme, la valeur $m = 0,62$ ne peut plus être conservée que comme une moyenne approximative. MM. Poncelet et Lesbros ont entrepris ensemble et le dernier a plus tard continué seul des expériences très-multipliées au sujet des écoulements par orifices rectangulaires; voici les principales conclusions qui en ressortent pour les orifices en mince paroi débouchant librement dans l'air.

1°. Le coefficient de dépense dépend du plus petit intervalle qui sépare les bords opposés de l'orifice, et reste le même, toutes choses égales d'ailleurs, quelle que soit l'autre dimension, pourvu qu'elle n'excède pas vingt fois la première.

2°. Les orifices pratiqués dans une paroi épaisse donnent, toutes choses égales d'ailleurs, les mêmes résultats que ceux en mince paroi, lorsque la veine se détache de tout leur pourtour

---

(*) *Voir* le *Traité d'Hydraulique* de d'Aubuisson, page 28 de la 1re édition.

et que leurs quatre côtés sont dans un même plan vertical. Cette dernière condition est essentielle; dans un cas où le bord supérieur de l'orifice était formé par une vanne faisant saillie de $0^m,05$ sur le plan des trois autres côtés, M. Lesbros a constaté, comparativement aux orifices pratiqués dans un même plan vertical, des augmentations relatives de dépense variables de 0,02 à 0,06.

3°. La disposition des parois et du fond du réservoir n'a aucune influence appréciable sur la dépense, quand l'orifice en est suffisamment loin; mais l'influence commence à se faire sentir quand la distance des parois ou du fond au bord correspondant de l'orifice est réduite à 2,7 fois la largeur de celui-ci.

Nous donnons à la fin du Cours une Table extraite de celle de M. Lesbros (*), où sont consignés les coefficients de contraction applicables à divers orifices rectangulaires en mince paroi débouchant librement dans l'air et entièrement isolés des parois ou du fond. Mais comme cette Table convient encore à d'autres cas d'écoulement qui nous restent à passer en revue, nous renvoyons plus loin (n° 30) les explications sur son usage.

Les anciens auteurs, faisant abstraction de l'obliquité des filets liquides dans leur passage à travers le plan de l'orifice, admettaient que la théorie devait donner pour expression de la dépense $A\sqrt{2g\left(z_1+\frac{p-p'}{\Pi}\right)}$ et en conséquence ils appelaient cette quantité *dépense théorique*. Cette expression s'est conservée quoiqu'il n'y ait pas besoin d'une théorie bien avancée pour reconnaître que la dépense est en réalité plus faible. En effet, indépendamment de l'obliquité des filets sur le plan de l'orifice, il y a dans ce plan et vers le milieu de la veine une pression plus forte que celle du gaz ambiant, ce qui doit diminuer la vitesse, puisque, dans la formule (1) du n° 22, p' doit recevoir une valeur plus forte. L'excès de pression dont il s'agit

(*) Expériences hydrauliques sur les lois de l'écoulement de l'eau, etc., par M. Lesbros, colonel du génie. Extrait du tome XIII des *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de Paris*. Prix de Mécanique de 1850.

est dû à la courbure des filets, qui tournent leur convexité vers l'axe de la veine, en sorte que les forces d'inertie centrifuges sont aussi dirigées vers le même axe : il en résulte que dans un même plan horizontal les pressions du liquide vont en augmentant depuis les bords de la veine jusque vers son milieu (nº 16).

Navier a essayé de tenir compte approximativement, par le calcul, de l'obliquité des filets. Attribuant sans doute peu d'importance aux variations de pression produites par les forces centrifuges, il supposait que tous les filets traversaient le plan de l'ouverture avec une même vitesse U, sensiblement égale à la valeur $\sqrt{2g\left(z_1+\frac{p-p'}{\Pi}\right)}$, qui convient un peu plus loin, dans la section contractée. Il admettait, en outre, que leur inclinaison variait uniformément depuis zéro jusqu'à l'angle droit. Si γ désigne cette inclinaison pour un filet occupant l'élément α de la surface A, le volume dépensé par α dans l'unité de temps sera un prisme oblique ayant α pour base, U pour longueur d'arêtes et $\alpha \mathrm{U} \sin\gamma$ pour volume. Donc on aura, en faisant la somme des dépenses élémentaires,

$$Q = U\Sigma\alpha\sin\gamma.$$

Cela posé, imaginons que tous les éléments α soient égaux et en nombre infini ; nous pouvons partager l'angle droit en un nombre pareil de fractions égales ayant pour valeur commune $d\gamma$, et alors chaque ligne de division donnera l'inclinaison γ, correspondante à un élément α. De cette manière nous aurons bien exprimé la répartition uniforme des inclinaisons. Or il en résulte immédiatement

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{2d\gamma}{\pi},$$

et par suite

$$Q = \frac{2}{\pi}AU\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\gamma d\gamma,$$

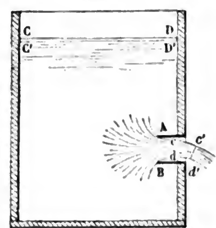
ou bien, à cause de $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\gamma d\gamma = 1$ et de $\frac{2}{\pi} = 0,637$,

$$Q = 0,637\,AU = 0,637\,A\sqrt{2g\left(z_1+\frac{p-p'}{\Pi}\right)},$$

résultat assez rapproché de la vérité, bien qu'on ne l'ait pas déduit d'un raisonnement parfaitement rigoureux.

25. *Écoulement par ajutage rentrant.* — Ce cas est cité ici à cause de son intérêt théorique, plutôt que pour les applications qu'il serait possible d'en faire. L'orifice par lequel le liquide s'écoule, au lieu d'être en mince paroi, se présente sous la forme d'un cylindre pénétrant à l'intérieur du vase, comme l'indique la *fig.* 8. Ce cylindre doit être mince et avoir une longueur comprise dans de justes limites ; car s'il était trop court, son influence tendrait à s'annuler ; s'il était trop long, sa paroi intérieure serait mouillée, ce que nous ne supposerons pas dans l'analyse qui va suivre ; on peut prendre une longueur à peu près égale au diamètre.

Fig. 8.



Dans ces circonstances, il est remarquable qu'on arrive à déterminer théoriquement le coefficient de contraction, tandis que l'orifice étant en mince paroi, nous ne pouvions trouver que la vitesse. Pour le montrer, appliquons au liquide compris entre le niveau CD du vase et la section contractée *cd* de la veine, le théorème général des quantités de mouvement et des impulsions projetées. L'accroissement de la quantité de mouvement de ce système matériel pendant un temps très-court θ, en projection sur l'axe du cylindre, que nous supposerons horizontal pour fixer les idées, sera égale à la quantité de mouvement de la tranche liquide *cdc'd'* qui dans ce temps est sortie par la section *cd*. En effet, si le système matériel CD*cd* est arrivé, au bout du temps θ, en C'D'*c'd'*, à cause de la permanence (n° 11) la quantité de mouvement de la partie intermédiaire C'D'*cd* sera la même dans les deux positions du système ; donc pour avoir l'accroissement en projection sur l'horizontale, on devrait calculer la quantité de mouvement projetée de la tranche *cdc'd'* et celle de la tranche CDC'D', puis retrancher la seconde de la première. Or celle-ci est projetée en vraie grandeur, puisque l'axe de projection est horizontal, comme la vitesse U de sortie ; la seconde est négligeable, d'abord parce que la vitesse des diverses molécules comprises dans CDC'D' est sensiblement verticale, et aussi parce que cette tranche, de même masse que *cdc'd'*, ne possède qu'une vitesse assez petite relativement à U. (L'égalité des masses CDC'D', *cdc'd'* est une conséquence immédiate de l'incompressibilité du liquide ; le volume CD*cd* devant rester toujours plein et contenir la même masse, la tranche qui en sort a même volume et même masse que celle qui entre.) Ainsi, en appelant Π le poids du mètre cube du liquide, Ω l'aire de la section *cd*, $U\theta$ sera la longueur $\overline{cc'}$, $\Omega U\theta$ le volume et $\frac{\Pi}{g}\Omega U\theta$ la masse de la tranche *cdc'd'* ; donc le système matériel CD*cd* aura gagné dans le

temps θ une quantité de mouvement projetée sur l'horizontale qui s'exprimera par $\frac{\Pi}{g}\Omega U^2\theta$.

Calculons maintenant la somme des impulsions des forces extérieures projetées aussi sur un axe horizontal. Ces forces sont : 1° la pesanteur, dont l'impulsion projetée est nulle ; 2° les pressions que le liquide reçoit sur son contour, tant de la part des gaz ambiants que de ses parois. Or la pression sur le niveau CD donne une force verticale qui disparaît en projection, comme la pesanteur ; la pression du gaz qui s'exerce sur le contour extérieur de la veine et se transmet à la surface cd, dans l'hypothèse du jet parabolique (n° 18, 3e règle), donne une résultante égale à la pression que le même gaz exercerait sur la surface plane AB (n° 7) ; p' étant la pression du gaz par mètre carré et A l'aire AB, cette force a pour valeur absolue $p'A$, et son impulsion projetée est $-p'A\theta$. Il ne reste plus qu'à composer toutes les pressions exercées par les parois du vase sur le fluide, lesquelles varient suivant la loi hydrostatique, parce que les vitesses sont très-petites tout le long des parois. A cet effet, on imaginera ce vase décomposé en une série de tranches horizontales : sur chacune de ces tranches, tant qu'elles offriront un contour fermé, la résultante des pressions sera nulle dans le sens horizontal ; or toutes les tranches seraient fermées si l'on remplaçait l'aire AB par une paroi qui supprimerait l'écoulement ; donc la pression résultante projetée sur l'horizontale sera égale à la pression hydrostatique supportée par l'aire AB ou A dans cette hypothèse. Donc, si l'on nomme p la pression par mètre carré sur CD, et z_2 la hauteur de liquide au-dessus du centre de gravité, cette composante horizontale aura pour valeur $(p+\Pi z_2)A$ et produira l'impulsion $(p+\Pi z_2)A\theta$, puisqu'elle est dirigée suivant l'axe de la veine.

Cela posé, l'application du théorème général des quantités de mouvement et des impulsions projetées donnera l'équation

$$\frac{\Pi}{g}\Omega U^2\theta = -p'A\theta + (p+\Pi z_2)A\theta,$$

soit, en divisant par $\Pi\Omega\theta$,

$$\frac{U^2}{g} = \frac{A}{\Omega}\left(z_2 + \frac{p-p'}{\Pi}\right).$$

D'un autre côté, tout ce qui a été dit plus haut sur la détermination de la vitesse s'applique encore ici ; le centre de gravité de la section contractée se trouvant à très-peu près sur la même horizontale que celui de l'orifice, on a

$$\frac{U^2}{2g} = z_2 + \frac{p-p'}{\Pi}.$$

Donc le rapport $\frac{A}{\Omega}$ est égal à 2, et par conséquent le coefficient de contraction doit être $\frac{1}{2}$ ou 0,50. Ce résultat a été vérifié par une expérience de Borda.

Il est naturel de se demander pourquoi la présence d'un ajutage rentrant est nécessaire pour justifier la théorie précédente, et pourquoi elle cesserait de s'appliquer si l'on prenait un orifice en mince paroi. C'est ce dont on se rendra compte en remarquant que nous avons admis plus haut la loi hydrostatique comme celle des pressions le long des parois du vase. Cela est permis dans le cas de l'ajutage rentrant tel que nous l'avons défini, parce que toutes les molécules en contact avec les parois du vase proprement dit sont encore à une distance notable de leur point de sortie, et que, par suite, elles ont peu de vitesse. Mais il n'en est plus de même quand l'ajutage est supprimé, et tout à l'entour de l'orifice il existe alors une zone où les molécules en contact avec la paroi du vase ont déjà une vitesse sensible, ce qui modifie la loi hydrostatique. Si l'on veut savoir dans quel sens, on se rappellera que, conformément au théorème de Bernoulli (n° 15), le niveau piézométrique restant constant au point de départ d'une molécule, ainsi que sa vitesse initiale, la vitesse en un autre point sera d'autant plus forte, que le niveau piézométrique y sera plus bas, et réciproquement. Ainsi la zone dont nous avons parlé aura des pressions moins fortes sans l'ajutage qu'avec l'ajutage. Et comme ces pressions s'exercent de la part du vase sur le liquide en sens contraire de la vitesse U, la résultante totale des pressions dans le même sens se trouverait augmentée. On aurait donc l'égalité

$$\frac{U^2}{g} > \frac{A}{\Omega}\left(z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}\right),$$

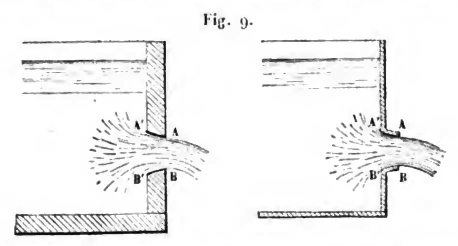
qui, combiné avec la relation $\frac{U^2}{2g} = z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}$, donnerait $\frac{A}{\Omega} < 2$ ou bien $\frac{\Omega}{A} > \frac{1}{2}$, ce qui en effet est conforme à l'expérience.

Les mêmes considérations montrent également que l'ajutage doit être mince, sans quoi les pressions supportées par sa surface donneraient en projection horizontale une résultante difficile à évaluer.

26. *Écoulement par des orifices parfaitement évasés en dedans.* — L'orifice AB (*fig.* 9) dont l'aire a été désignée par A aux nos 21 et suivants peut être précédé d'un évasement, ainsi que le représente la figure. Si le conduit ABA′B′ reçoit à peu près la forme et les dimensions d'une veine contractée, les choses se passeront comme si A′B′ était un orifice en mince

paroi, sauf la faible influence retardatrice du conduit. Dans ce

Fig. 9.



cas la section de l'orifice AB devient en même temps la section contractée de la veine, de sorte que la dépense Q diffère peu du produit $A\sqrt{2g\left(z_2+\frac{p-p'}{\Pi}\right)}$ de l'aire A par la vitesse due à la charge sur le centre de l'orifice. L'écart relatif ne doit probablement atteindre qu'une valeur de quelques centièmes ; et en effet, dans diverses expériences de Michelotti et de d'Aubuisson (dont quelques-unes exécutées sur une assez grande échelle), le rapport $Q:A\sqrt{2g\left(z_2+\frac{p-p'}{\Pi}\right)}$ ou le coefficient de dépense a été trouvé voisin de 0,980.

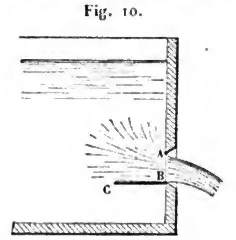
Cependant, comme il est difficile en pratique de réaliser bien complétement la forme d'une veine contractée dans l'évasement ABA'B', nous pensons qu'il sera prudent de compter en général sur une réduction un peu plus forte, de 6 à 8 centièmes, par exemple.

27. *Écoulement par des orifices imparfaitement évasés.* — L'orifice peut être plus ou moins bien évasé, de manière à obtenir une dépense moindre qu'avec la disposition du n° 26, mais plus considérable que celle de l'orifice en mince paroi. Le coefficient de la dépense, c'est-à-dire le rapport de la dépense effective à la quantité $A\sqrt{2g\left(z_2+\frac{p-p'}{\Pi}\right)}$ varierait alors de 0,62 à 1,00.

Par exemple, si une ouverture rectangulaire AB (*fig.* 10) est établie en mince paroi, on augmentera sa dépense au moyen d'une plaque BC qui prolongerait un de ses côtés vers l'intérieur

du liquide; on conçoit, en effet, que les filets liquides qui glisseront sur le plan BC arriveront à leur point de sortie avec des vitesses normales à AB, ce qui diminuera la contraction de la veine. Suivant qu'une portion plus ou moins forte de l'orifice est ainsi prolongée au dedans, le coefficient de la dépense peut varier de 0,62 à 0,73 environ. D'après Bidone, quand l'orifice est rectangulaire, on aurait pour déterminer la valeur de ce coefficient, la formule

Fig. 10.



$$m = 0,62\left(1 + 0,152\,\frac{N}{P}\right),$$

dans laquelle P désigne le périmètre de l'orifice, et N la longueur de la partie prolongée intérieurement. On comprend d'ailleurs que $\frac{N}{P}$ ne peut pas trop se rapprocher de l'unité; car à cette limite l'ensemble des plans BC formerait un ajutage intérieur, ce qui changerait la loi de l'écoulement. On tomberait alors soit dans le cas traité au n° 25, soit dans un autre qui sera examiné plus loin, suivant que cet ajutage serait plus ou moins long.

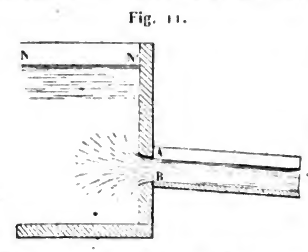
M. Lesbros, dont nous avons déjà cité les expériences sur les écoulements par orifices rectangulaires en mince paroi débouchant librement dans l'air, et complétement isolés du fond et des parois latérales du réservoir, en a également fait un grand nombre avec des dispositions analogues à celles dont il s'agit ici, l'orifice restant rectangulaire. La table II fait connaître en partie les résultats qu'il a obtenus et qui ne sont pas parfaitement d'accord avec la formule ci-dessus : cette formule, déduite seulement de quelques observations, ne mérite donc pas une entière confiance. Sans proposer de la remplacer par une autre plus ou moins analogue, M. Lesbros s'est borné à énoncer la proposition suivante :

Le coefficient de dépense augmente, non en raison du nombre des côtés de l'orifice sur lesquels la contraction est suppri-

mée, mais en raison de la fraction du périmètre total sur laquelle cette suppression a lieu; toutes choses égales d'ailleurs, l'augmentation est plus forte quand la base est au nombre des côtés privés de contraction que lorsqu'elle en est exclue.

28. *Écoulement par un orifice évasé intérieurement, suivi d'un canal découvert de même section.* — On suppose un orifice AB, évasé vers l'intérieur, comme l'indique la *fig.* 11; puis, à la suite, un canal de faible pente, découvert à sa partie supérieure, dans lequel les filets liquides conservent un mouvement sensiblement rectiligne et uniforme après leur sortie. Avec cette disposition, la pression dans la veine liquide n'est plus constante et égale à la pression atmosphérique; mais on doit admettre (n° 18, 4e règle) qu'elle varie suivant la loi hydrostatique, au moins quand on se borne à considérer les différences d'un point à l'autre, dans une même section transversale. Le niveau piézométrique sera donc le même pour tous les points de la section contractée AB; car ce serait celui du point supérieur A, relevé de la hauteur représentant la pression p' du gaz ambiant, c'est-à-dire de $\frac{p'}{\Pi}$, si nous appelons Π le poids du mètre cube de liquide. En second lieu, nous avons déjà remarqué (n° 22) qu'en prenant un point quelconque assez loin de l'orifice, dans le réservoir, son niveau piézométrique se trouverait au-dessus du niveau NN' du réservoir, à la hauteur $\frac{p}{\Pi}$ représentative de la pression p qui s'exerce à la surface NN'. Donc, si l'on désigne par H la distance du bord supérieur A de la veine contractée au plan NN', la charge prise entre le point de départ d'une molécule et celui où elle traverse la section contractée AB sera toujours $H + \frac{p - p'}{\Pi}$; toutes les molécules traverseront donc cette section avec une même vitesse

Fig. 11.



V, ayant pour valeur, d'après le théorème de Bernoulli (nº 15),

$$V = \sqrt{2g\left(H + \frac{p - p'}{\Pi}\right)},$$

puisque la vitesse initiale dans le réservoir est supposée nulle.

Ainsi, l'influence du canal se fait sentir, en ce que dans le calcul de la vitesse moyenne, et, par suite, de la dépense, il faut prendre la charge sur le bord supérieur de la veine contractée, au lieu de la charge sur son centre. Mais il faut remarquer que nos raisonnements ne subsisteraient plus, si l'on modifiait la disposition de l'orifice conforme à la *fig.* 11 et décrite tout à l'heure. Notamment, si l'orifice était un rectangle percé en mince paroi et prolongé par un canal prismatique, les filets pourraient, en vertu de la contraction, se détacher du fond sur une certaine longueur, immédiatement après leur sortie; cela aurait pour effet, comme on le verra plus loin, d'augmenter l'action de la viscosité, et par conséquent de modifier l'écoulement. C'est pourquoi la formule précédente est rarement employée pour arriver à connaître la dépense; on préfère calculer d'abord la dépense dite théorique, en multipliant la surface de l'ouverture par la vitesse due à la charge sur son centre de gravité; puis on multiplie le résultat par un coefficient de dépense que l'on emprunte aux recueils d'expériences, à celui de M. Lesbros, par exemple.

29. *Écoulement par un déversoir.* — On donne le nom de *déversoir* à des orifices découverts à leur partie supérieure, et dont le bord inférieur est une droite horizontale appelée *seuil*. Les bords latéraux sont généralement des droites verticales, de sorte que l'orifice peut être considéré comme un rectangle dont on aurait enlevé le côté supérieur; l'assimilation serait d'ailleurs toujours permise dans le cas où le seuil du déversoir aurait une grande longueur relativement à l'épaisseur de la nappe liquide qui s'écoule au-dessus.

Soient L la longueur du seuil;

y la distance verticale entre le seuil et le niveau du liquide, en un point du réservoir où il serait sensiblement stagnant;

n l'épaisseur de la lame liquide passant sur le déversoir;
Q la dépense par seconde.

L'écoulement est supposé se produire librement dans l'air ou dans un gaz quelconque; on voit alors que pour une molécule partie du réservoir sans vitesse initiale sensible, et traversant actuellement le plan vertical du seuil, la charge varie de y à $y-n$, ce qui montre d'abord que n doit être plus petit que y, car en vertu du théorème de Bernoulli l'écoulement ne peut avoir lieu avec une charge négative. La vitesse qui correspond à la charge moyenne sera donc

$$\sqrt{2g\left(y-\frac{1}{2}n\right)},$$

et comme la section de l'orifice a pour valeur Ln, la dépense théorique s'exprimera par $Ln\sqrt{2g\left(y-\frac{1}{2}n\right)}$. Si donc on désigne par m le coefficient de dépense applicable à l'écoulement dont nous nous occupons, on aura

$$Q = mLn\sqrt{2g\left(y-\frac{1}{2}n\right)}.$$

Dans cette expression n et m sont des inconnues auxiliaires que la théorie ne peut encore déterminer. Nous savons seulement que n doit être moindre que y, et l'expérience montre que le rapport $\frac{n}{y}$ n'est pas constant, mais qu'il ne descend guère au-dessous de 0,72 pour des déversoirs dont le seuil est établi en mince paroi : nous le supposerons donc égal à 0,86, valeur moyenne. Quant à m, puisque l'on a vu plus haut qu'il ne variait pas beaucoup avec la charge et les dimensions d'un orifice en mince paroi, il est assez naturel de le prendre égal à la moyenne 0,62 (nº 24). On obtient ainsi

$$Q = 0{,}62 . 0{,}86\, Ly\sqrt{2g . 0{,}57 . y}$$
$$= 0{,}403\, Ly\sqrt{2gy}.$$

En réalité, si l'on pose

$$Q = rLy\sqrt{2gy},$$

r étant un rapport à déterminer expérimentalement, on reconnaît que r n'a pas une valeur constante. Ainsi, MM. Poncelet et Lesbros, dans une série d'expériences sur un déversoir en mince paroi, de 0,20 de longueur, assez éloigné du fond et des parois latérales du réservoir, ont trouvé r variable de 0,385 à 0,424. La plus forte valeur correspond aux plus petites charges, ce qui s'explique peut-être par l'influence de la contraction latérale, influence d'autant plus grande, que la charge devient une fraction plus forte de la longueur L. La moyenne des nombres 0,385 et 0,424 est 0,405, qui s'écarte bien peu du résultat 0,403 auquel nous a conduit l'aperçu théorique donné plus haut. Ainsi donc, pour les déversoirs en mince paroi, séparés du fond et des parois latérales du réservoir par une distance suffisante, et débouchant librement dans un gaz, on aurait à peu près

(4) $$Q = 0,405\,Ly\sqrt{2gy};$$

mais cette formule pourra donner un résultat un peu trop fort ou trop faible, suivant que le rapport $\frac{y}{L}$ sera grand ou petit.

Il est bien difficile de tenir compte, même par des évaluations approximatives, de toutes les circonstances et dispositions locales qui peuvent influer sur la valeur de r; à cet égard nous ne pouvons encore que renvoyer le lecteur aux recueils d'expériences. Cependant, si un canal se trouvait barré sur toute sa largeur par un déversoir en mince paroi dont le seuil serait assez loin du fond, et si en même temps $\frac{y}{L}$ était petit, il serait convenable de prendre r plus fort et de poser

(5) $$Q = 0,45\,Ly\sqrt{2gy},$$

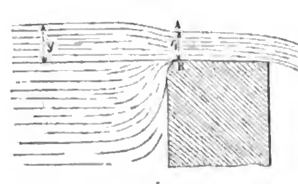
ou, ce qui revient au même,

(6) $$Q = 2\,Ly^{\frac{3}{2}}.$$

Nous citerons encore un cas particulier assez remarquable, en ce que la théorie peut donner une limite supérieure du coefficient r et la valeur correspondante de n. C'est celui où le

seuil B du déversoir (*fig.* 12), raccordé par un évasement avec le réservoir, est prolongé par un canal découvert de faible pente, dans lequel le liquide prend un mouvement sensiblement uniforme. Alors la vitesse commune de tous les filets qui passent en AB est $\sqrt{2g(y-n)}$ (nº 28), et attendu qu'il n'y a plus de contraction sensible au delà de cette section, la dépense Q est donnée par la relation

Fig. 12.



$$Q = Ln\sqrt{2g(y-n)}.$$

Lorsque L et y sont invariables, Q n'est plus fonction que de n, et il est aisé d'en trouver le maximum. On a, en effet,

$$\frac{Q^2}{2gL^2} = n^2(y-n) = yn^2 - n^3;$$

le maximum du second membre, et par suite de Q, s'obtient en égalant à zéro la dérivée prise relativement à n, ce qui donne

$$n(2y - 3n) = 0,$$

d'où

$$n = \frac{2}{3}y,$$

attendu que $n = 0$ conduirait à une dépense nulle. Faisant ensuite $n = \frac{2}{3}y$ dans l'expression de Q, on trouve

$$Q = \frac{2}{3\sqrt{3}} Ly\sqrt{2gy} = 0,385\, Ly\sqrt{2gy}.$$

L'abaissement superficiel $y - n$ auquel correspond la dépense maximum est donc $\frac{1}{3}$ de la hauteur y, et le rapport r correspondant a pour valeur 0,385. Dans la pratique, les hypothèses de la théorie n'étant jamais complétement réalisées, si le seuil du déversoir est suivi d'un canal, r n'atteindra que bien rare-

ment la limite supérieure 0,385. Suivant les expressions de M. Castel et de M. Lesbros, on aurait moyennement, pour le genre de déversoirs dont il s'agit,

$$(7)\qquad Q = 0{,}35\,Ly\sqrt{2gy};$$

mais ici encore le rapport r est susceptible de varier notablement d'un déversoir à un autre.

Lorsqu'en amont du déversoir il y a un courant qui a une vitesse sensible U_0, au lieu d'un réservoir à peu près tranquille, les expressions $\sqrt{2g\left(y-\frac{1}{2}n\right)}$ et $\sqrt{2g(y-n)}$ ci-dessus considérées ne représentent plus la vitesse des filets fluides au-dessus du seuil. Le théorème de Bernoulli donne alors, en appelant U cette vitesse,

$$\frac{U^2-U_0^2}{2g} = y-\frac{1}{2}n$$

ou bien

$$\frac{U^2-U_0^2}{2g} = y-n,$$

suivant qu'il s'agit d'un orifice débouchant librement dans l'air ou suivi d'un canal découvert. La valeur de la vitesse devient la même que si y était augmenté de $\frac{U_0^2}{2g}$. On est donc porté à penser qu'il suffit pour avoir la dépense de remplacer y dans les équations (4), (5), (6) et (7) par $y+\frac{U_0^2}{2g}$.

30. *Conclusion de ce paragraphe ; table des coefficients de dépense.* — Quand on se rappelle l'ensemble des questions traitées dans les n°s 21 à 28, on voit qu'il est ordinairement possible de traverser assez exactement la vitesse d'écoulement d'un liquide par un orifice en mince paroi plane ou évasé intérieurement, ou suivi d'un canal découvert à pente faible, ledit orifice débouchant dans un gaz. Malheureusement il n'en est pas tout à fait de même pour une quantité qui aurait plus d'importance pratique, la dépense. Elle dépend, en effet, non-seulement de la vitesse avec laquelle les molécules traversent

le plan de l'orifice, mais aussi des angles sous lesquels ce plan est coupé par les divers filets liquides, angles qui varient d'un point à l'autre de l'orifice suivant des lois encore inconnues. Tout ce qu'on peut affirmer, c'est que la dépense effective est plus petite que le produit de l'aire de l'orifice par la vitesse des filets qui le traversent, quantité improprement appelée *dépense théorique*. La difficulté consiste à connaître dans chaque cas le rapport variable de 0,50 à 1,00, de la dépense effective à la dépense théorique, ou le *coefficient de dépense*. Dans le cas d'un déversoir une difficulté analogue se présente au sujet du coefficient r (nº 29). Nous avons indiqué divers nombres qui, pour certains cas particuliers, permettront de résoudre approximativement la question. Mais en réalité, dans chacun de ces cas particuliers, le coefficient de la dépense n'est pas constant; il varie suivant des circonstances secondaires dont l'influence est très-imparfaitement connue, telles que les dimensions de l'orifice et sa position relativement au fond ou aux faces latérales du réservoir. Par conséquent, ce qu'on peut conseiller de mieux, quand on ne voudra pas se contenter de l'approximation donnée par les coefficients moyens de dépense que nous avons indiqués, c'est de rechercher dans les recueils d'expériences celles qui se rapprochent le plus du cas que l'on a en vue, pour en déduire le coefficient applicable à ce cas. Parmi les recueils les plus étendus et qui paraissent mériter le plus de confiance, nous avons cité (nºs 24, 27, 28 et 29) celui de M. Lesbros, qui embrasse plus de deux mille expériences, dans les conditions les plus variées.

La table II qui se trouve à la fin du Cours a pour but de suppléer aux tables plus étendues et plus complètes publiées par M. Lesbros, auquel nous avons emprunté les coefficients de dépense qu'il nous a semblé le plus utile de faire connaître. Ces coefficients se rapportent tous aux orifices rectangulaires à bords horizontaux et verticaux, de $0^m,20$ de largeur sur diverses hauteurs; mais en généralisant ce qui a été dit au nº 24 pour les orifices en mince paroi débouchant librement dans l'air, on doit les considérer comme encore bons quand la plus petite dimension du rectangle est une des six hauteurs portées dans les tableaux, c'est-à-dire un des nombres $0^m,20$, $0^m,10$, $0^m,05$,

$0^m,03$, $0^m,02$, $0^m,01$, pourvu que la plus grande n'excède pas vingt fois celle-là. Si l'on avait besoin du coefficient relatif à une dimension minimum comprise entre les nombres précédents, on procéderait par interpolation.

Les orifices soumis à l'observation présentaient deux dispositions principales, savoir :

(A) Orifices en mince paroi débouchant librement dans un gaz ;

(B) Orifices en mince paroi suivis d'un canal découvert, horizontal ou faiblement incliné, de même largeur que l'orifice, ayant son fond en prolongement du bord inférieur de celui-ci.

Dans chaque disposition, quatre variantes ont été admises ; en voici la définition :

1°. L'orifice est complétement isolé, c'est-à-dire séparé par une distance suffisante (n° 24) du fond et des parois latérales du réservoir ;

2°. La contraction est supprimée sur la base inférieure de l'orifice, qui se trouve alors au niveau du fond ;

3°. Les bords verticaux de l'orifice sont en prolongement des faces latérales du réservoir ; mais la même chose n'ayant pas lieu pour le fond, la contraction latérale est seule supprimée ;

4°. Les bords verticaux restant comme on vient de le dire, le bord inférieur est placé au niveau du fond du réservoir, ce qui supprime la contraction sur trois côtés de la veine.

Dans la disposition (B), M. Lesbros n'a pas étudié précisément les variantes 3 et 4 ; il les a modifiées en ce sens que les faces latérales du réservoir, au lieu de prolonger exactement les bords correspondants de l'orifice, en sont séparés par une feuillure de $0^m,02$ de largeur. Ces variantes portent les numéros 3 bis et 4 bis.

Enfin la table se termine par les coefficients *r* relatifs aux déversoirs (n° 29), avec les dispositions et variantes qu'on vient d'indiquer.

Quand il s'agit des écoulements par orifices, la charge portée dans la table est la distance verticale entre le bord supérieur et le niveau du réservoir, en un point où il n'y ait pas de

vitesse sensible : on en déduit sans peine la charge servant au calcul de la dépense théorique, puisqu'il suffit d'ajouter la demi-hauteur de l'orifice, plus la hauteur représentative de la différence des pressions p et p' sur la surface libre du réservoir et sur la veine. Les expériences ont toutes eu lieu dans l'air, c'est-à-dire avec des pressions p et p' égales; s'il en était différemment, il semble (mais ce n'est là qu'une induction) que le coefficient de dépense ne changerait pas à égalité de hauteur de liquide au-dessus de l'orifice.

Pour les déversoirs, l'argument est la hauteur y (nº 29).

Voici un exemple de l'usage de la table. Soit proposé de chercher la dépense d'un orifice rectangulaire en mince paroi débouchant librement dans l'air, de $0^m,14$ de hauteur sur 1 mètre de largeur, le bord supérieur étant à $0^m,25$ en dessous du niveau du réservoir, et la contraction devant avoir lieu sur les quatre côtés. On est ici dans la disposition (A), première variante; si l'on cherche d'abord le coefficient m de la dépense, on aura donc successivement :

Charge de $0^m,20$ sur le bord supérieur.

Hauteur d'orifice	de $0^m,20$....................	$m = 0,598$
Id.	de $0^m,10$....................	$m = 0,615$
Id.	de $0^m,14$ (par interpolation)...	$m = 0,608$

Charge de $0^m,30$ sur le bord supérieur.

Hauteur d'orifice	de $0^m,20$....................	$m = 0,600$
Id.	de $0^m,10$....................	$m = 0,616$
Id.	de $0^m,14$ (par interpolation)...	$m = 0,610$

La comparaison du troisième et du sixième résultat montre que le nombre m cherché serait environ $0,609$, en interpolant relativement à la charge.

Maintenant, pour avoir la dépense Q, on poserait

$$Q = 0,609 . 0,14 . 1,00 . \sqrt{2g\left(0,25 + \frac{1}{2} 0,14\right)}.$$

La table I donnerait le radical $\sqrt{2g . 0,32}$, c'est-à-dire la vitesse due à la hauteur de $0^m,32$, laquelle diffère peu de $2^m,506$; ainsi

$$Q = 0,609 . 0,14 . 2,506 = 0^{mc},21.$$

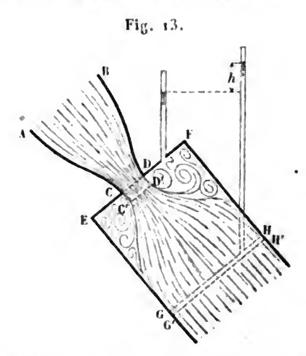
La dépense cherchée se trouverait aux environs de 210 litres par seconde.

Ajoutons enfin que dans la pratique de l'Ingénieur on est ordinairement bien loin des conditions de précision où se trouvent des expérimentateurs opérant sur des appareils construits avec le plus grand soin : les bords des orifices sont plus ou moins inégaux et mal dressés, le fond des canaux raboteux, le réservoir soumis à une agitation et à des variations de niveau incessantes, etc. Par tous ces motifs, la dépense d'un orifice dans les conditions ordinaires est très-difficile à évaluer avec quelque exactitude ; quoique nous n'ayons à l'appui de notre opinion aucune donnée bien positive, il nous semble que des erreurs relatives de 0,05 (et quelquefois davantage) n'auraient rien qui dût être regardé comme surprenant.

§ II. — Cas où il est nécessaire d'avoir égard aux forces produites par la viscosité.

31. *Effet d'un élargissement brusque de section dans un conduit fermé.* — On suppose un liquide coulant dans un vase ABCD (*fig.* 13) ; en CD, la veine débouche tout à coup dans un espace à section transversale plus grande, de forme à peu près cylindrique sur une certaine longueur, et déjà rempli de liquide. Alors on observe que tout le liquide qui entoure la veine au delà de la section CD ne participe que lentement au mouvement général ; il tournoie sur lui-même, et s'écoule peu à peu, pendant que d'autre liquide fourni par le contour de la veine vient le remplacer. Au droit de la veine elle-même, il y a une agitation assez considérable, qui se calme progressivement, de sorte que dans une section transversale GH les molécules se meuvent avec des vitesses parallèles entre elles et normales à cette section. On conçoit que dans ce phénomène le liquide est soumis à des déformations intérieures beaucoup

Fig. 13.



plus grandes et plus rapides que dans un écoulement sans changement brusque de section : on ne pourrait donc appliquer le théorème de Bernoulli entre deux positions d'une molécule, prises l'une à l'amont, l'autre à l'aval de CD, sans avoir égard aux forces produites par la viscosité du liquide et à la perte de charge qui en résulte. Cette perte de charge est ce que nous nous proposons maintenant de déterminer.

Il n'est guère possible, dans l'état actuel de la science, de donner une solution complète et irréprochable de la question, car il faudrait suivre chaque molécule dans son mouvement et se rendre compte des actions qu'elle exerce sur les autres. Faute de pouvoir appliquer cette méthode rationnelle, on est contraint d'avoir recours à des hypothèses secondaires qui simplifient le problème. L'analyse suivante est due à M. Belanger.

Il y a autour de la veine, dans l'espace annulaire ECDF, du fluide animé de mouvements lents : on peut donc admettre que la pression sur la partie de la section EF non occupée par la veine varie suivant la loi hydrostatique (n° 18, 2e règle). Il en serait de même dans les sections CD et GH, si les molécules qui les traversent étaient animées, pendant leur passage, de mouvements sensiblement rectilignes et normaux à ces sections (n° 18, 4e règle), ce que nous admettrons comme suffisamment exact. Par conséquent, si nous élevons par la pensée un tube piézométrique en un point quelconque de CD ou de la section annulaire ECDF, le niveau du liquide dans ce tube sera indépendant de son point de départ inférieur. Un fait exactement semblable se produira en GH; de plus les pressions moyennes sur les surfaces EF, GH s'exerceront en leurs centres de gravité respectifs (n° 8). Cela une fois admis, toute difficulté disparaît.

Soient, en effet,

h la différence des niveaux piézométriques en EF et en GH;
ζ la charge perdue à déterminer;
U_0 et U les vitesses moyennes du liquide en CD et GH;
Π son poids par mètre cube;
S l'aire de la section droite du cylindre EFGH.

Si, comme le représente la figure, le niveau piézométrique en GH dépasse celui qui répond à l'entrée de la veine dans l'espace plus grand, l'abaissement qui aura lieu, dans le passage de la seconde à la première, sera $-h$. Le théorème de Bernoulli (n° 15) donnera donc

$$(1) \qquad \frac{U^2 - U_0^2}{2g} = -h - \zeta,$$

d'où l'on conclura ζ quand on aura pu, d'une manière quelconque, évaluer h. Pour cela, nous appliquerons le théorème général des quantités de mouvement projetées, à tout le système matériel fluide compris, à un certain instant, entre les plans EF et GH. Pendant un temps très-court θ, il sort de la capacité EFGH une tranche GHG'H' ayant pour volume $SU\theta$; et, en même temps, il entre une tranche CDC'D' dont le volume est nécessairement le même, sans quoi la masse totale du liquide compris dans le volume EFGH aurait varié, ce qui est impossible à cause de l'incompressibilité. Aux deux instants extrêmes du temps θ, le liquide compris entre C'D' et GH a la même quantité de mouvement, parce que le phénomène est supposé permanent; donc la variation de la quantité de mouvement du système liquide EFGH, en projection sur une parallèle aux vitesses U_0 et U, pendant l'intervalle de temps θ, sera égale à la différence entre les quantités de mouvement des tranches GH G'H' et CD C'D'. Or ces tranches ont même volume $SU\theta$ et par suite même masse $\frac{\Pi}{g} SU\theta$; la différence dont il s'agit est donc

$$\frac{\Pi}{g} SU\theta\,(U - U_0),$$

quantité à laquelle il faut égaler la somme des impulsions des forces extérieures projetées sur le même axe. Ces forces sont la pesanteur et les pressions exercées sur tout le contour du volume EFGH. Les pressions latérales sur la surface cylindrique sont normales à l'axe de projection, et il n'y a pas lieu d'en tenir compte; nous négligerons l'adhérence entre le liquide et cette surface, ce qui est permis, comme la suite le démon-

trera, en raison de ce que $\overline{EG}$ est une faible longueur. Reste donc la pesanteur et les pressions totales sur les plans EF, GH. Il est aisé de voir que la pesanteur serait équilibrée, si la colonne piézométrique en GH s'élevait exactement au même niveau que celle d'amont menée en EF; car l étant la projection verticale de $\overline{EG}$, $\Pi S l$ représenterait à la fois la composante de la pesanteur suivant l'axe, et l'excès de la pression totale du plan GH sur celle du plan EF. Ainsi les trois forces dont nous nous occupons donneront une résultante, en sens contraire du mouvement, égale à la pression totale produite sur la surface S par la colonne de liquide de hauteur h, c'est-à-dire à $\Pi S h$, force dont l'impulsion projetée est $-\Pi S h \theta$. On a par conséquent

$$\frac{\Pi}{g} S U \theta (U - U_0) = - \Pi S h \theta,$$

ou bien, en divisant les deux membres par $-\Pi S \theta$,

$$(2) \qquad h = \frac{U(U_0 - U)}{g}.$$

L'élimination de h entre les équations (1) et (2) nous donne finalement

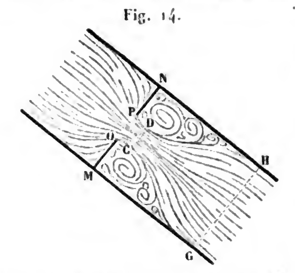
$$(3) \qquad \zeta = \frac{(U_0 - U)^2}{2g};$$

ce qu'on exprime abréviativement en langage ordinaire en disant que la perte de *charge produite par un élargissement brusque de section est égale à la hauteur représentative de la perte de vitesse moyenne*. La démonstration repose d'ailleurs, il ne faut pas l'oublier, sur l'hypothèse du parallélisme des filets, dans les sections où sont mesurées les vitesses U_0 et U.

La *fig.* 13 suppose que la condition d'avoir les filets parallèles dans la section CD est remplie au moyen d'un évasement pratiqué en amont. Si l'évasement n'existait pas, et que le changement brusque fût produit par un diaphragme mince MN (*fig.* 14), ne laissant libre que l'ouverture OP, les filets deviendraient néanmoins parallèles dans la section CD de la veine contractée. Ce serait donc au point de la contraction maximum

que l'on devrait mesurer la vitesse désignée par U_0 dans les calculs précédents. Sous la réserve de cette modification, tous les mêmes raisonnements pourraient être répétés et la formule qui donne ζ ne serait point altérée.

Fig. 14.



Au lieu des vitesses U_0 et U, on pourrait introduire dans la formule (3) des quantités plus commodes à mesurer. Soient en effet Q le volume de liquide débité dans l'unité de temps, et S_0 l'aire CD (*fig.* 13). Nous avons déjà remarqué que dans un temps θ il se débite par les sections GH et CD un même volume exprimé par $SU\theta$; mais ce volume peut aussi s'exprimer par $S_0U_0\theta$: on a donc

$$Q = SU = S_0U_0,$$

et par suite

$$(4) \qquad \zeta = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{S_0} - \frac{1}{S}\right)^2.$$

Dans le cas de la *fig.* 14, si S désigne l'aire OP et m le coefficient de la dépense, qu'on supposera égal approximativement à 0,62, on aura

$$Q = SU = mS_0U_0,$$

d'où l'on tire, en se servant de l'équation (3),

$$(5) \qquad \zeta = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{mS_0} - \frac{1}{S}\right)^2.$$

32. *Vérification expérimentale des résultats précédents ; piézomètre différentiel.* — Si l'on pouvait observer directement la différence h des niveaux piézométriques dans la section CD et GH (*fig.* 13), on conclurait de l'équation (1)

$$\zeta = \frac{U_0^2}{2g} - \frac{U^2}{2g} - h,$$

et le second membre devrait être égal à $\dfrac{(U_0 - U)^2}{2g}$, en suppo-

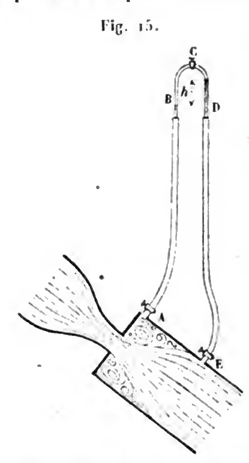
sant vraie la théorie donnée au nº 31. Or U_0 et U pourraient être calculées, comme on vient de le voir, en mesurant le débit Q et les aires S_0, S, des sections CD, GH. Il serait donc facile de constater si l'on a réellement

$$\frac{(U_0 - U)^2}{2g} = \frac{U_0^2}{2g} - \frac{U^2}{2g} - h,$$

ou bien, ce qui revient au même, si h satisfait à l'équation (2).

L'instrument que M. Belanger a nommé *piézomètre différentiel* a précisément pour but de mesurer la hauteur h, et il peut être employé généralement toutes les fois qu'il s'agit de constater par expérience la différence de pression entre deux points peu éloignés. Deux tuyaux flexibles en plomb s'adaptent en A et E (*fig.* 15) aux points dont on veut connaître la différence de pression, et sont réunis par un tube recourbé en verre BCD, percé au point C d'un trou capillaire qu'on peut à volonté ouvrir ou fermer hermétiquement. Les robinets A et E sont d'abord fermés et les tuyaux de l'appareil remplis d'air. On ferme le trou C et on ouvre les deux robinets; le liquide entre alors dans les tubes en vertu de sa pression, mais il ne les remplit pas, puisque l'air n'a pas d'issue. On veille à ce que cet air ne puisse pas rester emprisonné dans les sinuosités des tubes en plomb. Alors si le liquide ne monte pas à la hauteur du tube en verre, on laisse peu à peu échapper l'air par l'ouverture C, et si cela est nécessaire, on aspire pour produire un vide partiel, jusqu'à ce que l'on voie les deux niveaux dans les branches BC, DC. La distance verticale entre ces deux niveaux sera la hauteur h que l'on demande, car ils supportent tous les deux une même pression de la part de l'air qui reste dans le tube. Si l'on ne

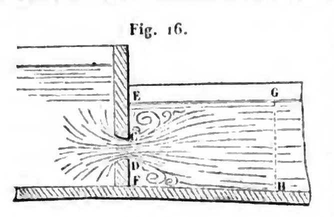
Fig. 15.



pouvait réussir à faire monter le liquide jusqu'au tube en verre, cela montrerait que les tubes en plomb sont trop hauts, et il faudrait recommencer l'expérience en plaçant plus bas leurs extrémités supérieures.

33. *Perte de charge subie par une veine liquide à son entrée dans un réservoir découvert.* — On suppose une veine liquide qui par une cause quelconque a pris une vitesse U_0 normale à la section CD et commune à tous les filets, à l'instant où ils traversent cette section. Au-delà de CD se trouve une capacité de section transversale plus grande, remplie du même liquide, dans laquelle débouche la veine. Le liquide étant toujours supposé homogène et soumis seulement à la pesanteur, quelle perte de charge subira-t-il au delà de la section CD, si le réservoir ou canal CDGH, où entre la veine, est découvert à la partie supérieure?

Fig. 16.



Ici nous ne pourrions pas appliquer sans modification l'analyse du n° 31, parce que la section EF, sur laquelle s'exerce une pression à introduire dans l'équation des quantités de mouvement projetées, n'est plus connue à priori comme l'était la section EF de la *fig.* 13. Ce serait une difficulté de plus.

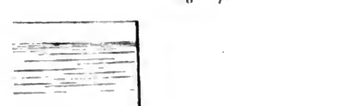
Sans nous y arrêter davantage, nous supposerons le cas particulier où la capacité EFGH et la hauteur $\overline{EG}$ de liquide au-dessus de la veine seraient assez considérables pour que le liquide pût être considéré comme à peu près stagnant, sauf le mouvement dans la veine et tout autour d'elle, sur une certaine étendue. Alors le niveau EG sera horizontal, c'est-à-dire que le niveau piézométrique, pour lequel on peut prendre celui du réservoir EFGH, sera le même en CD et en GH, section où il ne reste plus de vitesse sensible. Donc si l'on applique le théorème de Bernoulli au passage d'une molécule de CD à GH, ζ étant la charge perdue dans cet intervalle, on aura

$$(6)\qquad \zeta = \frac{U_0^2}{2g};$$

mais cette expression ne serait plus vraie si le niveau piézométrique était différent en CD et en GH, ce qui arriverait peut-être pour de faibles valeurs de la hauteur $\overline{EC}$; il y aurait aussi une restriction analogue si la vitesse ne pouvait pas être considérée comme nulle dans une section GH, prise à l'aval de la veine.

34. *Écoulement d'un liquide par un tuyau court, présentant une série d'élargissements brusques.* — On adapte à un réservoir un tuyau composé d'une suite de cellules cylindriques de longueur modérée, séparées les unes des autres par des diaphragmes avec ouvertures en mince paroi (*fig.* 17). Deux ou-

Fig. 17.



vertures de cette espèce permettent au liquide d'entrer dans le tuyau et de s'échapper au dehors. On demande la vitesse d'écoulement, à la sortie du tuyau, et la dépense par seconde.

Soient

$A, A_1, A_2, \ldots$, les sections successives des orifices percés en mince paroi;

$S, S_1, \ldots$, les sections des cylindres qui composent le tuyau;

U la vitesse du liquide dans la veine contractée, après le passage du dernier orifice en mince paroi;

Q le volume dépensé par seconde;

p la pression par unité de surface au niveau du réservoir;

p' la pression du gaz dans lequel s'écoule la veine liquide;

z la hauteur verticale entre le niveau du réservoir et le centre de la veine contractée après l'orifice de sortie;

ζ la perte de charge totale éprouvée par le liquide pendant qu'il traverse le tuyau.

En raisonnant comme au n° 22, on reconnaîtrait que la charge entre un point du bassin et le centre de la veine contractée, après sa sortie, a pour valeur

$$z + \frac{p - p'}{\Pi} = h;$$

et comme la vitesse est supposée insensible dans le bassin, le théorème de Bernoulli (n° 15) donnera

$$(7) \qquad \frac{U^2}{2g} = h - \zeta.$$

Or, si l'on suppose que le tuyau est assez court pour que l'adhérence du liquide contre ses parois puisse être négligée, les pertes de charge seront uniquement produites par les élargissements brusques, et l'on aura (n° 31)

$$(8) \quad \zeta = \frac{Q^2}{2g}\left[\left(\frac{1}{mA} - \frac{1}{S}\right)^2 + \left(\frac{1}{mA_1} - \frac{1}{S_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{mA_2} - \frac{1}{S_2}\right)^2 + \ldots\right],$$

m étant le coefficient de dépense applicable aux orifices en mince paroi du tuyau. De plus, si A_n désigne l'aire de celui de ces orifices qui est situé à l'extrémité d'aval du tuyau, on aura l'équation

$$(9) \qquad Q = mA_nU.$$

Cela fait donc trois équations entre les inconnues U, ζ, Q; il sera bien facile d'en éliminer deux, pour calculer la troisième. Par exemple, on calculerait Q par la relation

$$\frac{Q^2}{2g}\frac{1}{m^2A_n^2} = h - \frac{Q^2}{2g}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{1}{mA} - \frac{1}{S}\right)^2 + \left(\frac{1}{mA_1} - \frac{1}{S_1}\right)^2 \\ + \left(\frac{1}{mA_2} - \frac{1}{S_2}\right)^2 + \ldots\end{array}\right],$$

ou bien encore

$$\frac{Q^2}{2g} = \frac{h}{\frac{1}{m^2A_n^2} + \left(\frac{1}{mA} - \frac{1}{S}\right)^2 + \left(\frac{1}{mA_1} - \frac{1}{S_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{mA_2} - \frac{1}{S_2}\right)^2 + \ldots},$$

ce qu'on peut écrire en abrégé

$$(10)\qquad \frac{Q^2}{2g}=\frac{h}{\frac{1}{m^2A_n^2}+\Sigma\left(\frac{1}{mA}-\frac{1}{S}\right)^2},$$

la somme Σ étant étendue à tous les élargissements brusques. La vitesse U s'obtiendrait ensuite aisément par la combinaison des équations (9) et (10), qui donne

$$(11)\qquad \frac{U^2}{2g}=\frac{h}{1+m^2A_n^2\Sigma\left(\frac{1}{mA}-\frac{1}{S}\right)^2}.$$

Dans une expérience d'Eytelwein, citée par d'Aubuisson, le tuyau se composait d'un cylindre de $0^m,0262$ de diamètre, de $0^m,942$ de longueur, divisé en trois compartiments par des diaphragmes; toutes les aires ci-dessus désignées par A, A_1, $A_2, \ldots A_n$ étaient égales, les orifices en mince paroi étant tous des cercles de $0^m,0065$ de diamètre. Avec ces données la formule (10) devient

$$\frac{Q^2}{2g}=\frac{h}{\frac{1}{m^2A^2}+3\left(\frac{1}{mA}-\frac{1}{S}\right)^2}=\frac{m^2A^2h}{1+3\left(1-\frac{mA}{S}\right)^2},$$

d'où l'on tire

$$Q=A\sqrt{2gh}\,\frac{m}{\sqrt{1+3\left(1-\frac{mA}{S}\right)^2}}.$$

Le coefficient m diffère peu de 0,62 (n° 24); quant au rapport $\frac{A}{S}$, il est ici de $\left(\frac{0,0065}{0,0262}\right)^2$, soit $\frac{1}{16}$. En substituant ces valeurs, on trouverait

$$Q=0,319\,A\sqrt{2gh},$$

tandis que l'expérience a donné

$$Q=0,331\,A\sqrt{2gh}.$$

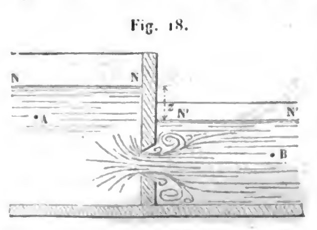
La différence du résultat théorique avec le résultat expérimental est peu sensible, ce qui semble confirmer les formules

du n° 31 ; elle s'explique un peu par l'incertitude qui affecte le coefficient m, et peut-être aussi par le trop grand rapprochement des diaphragmes qui empêchait les filets de prendre tous la même vitesse, après le passage d'un élargissement brusque et avant d'arriver au diaphragme suivant. Eytelwein a en effet constaté que la dépense augmentait quand on diminuait la distance des diaphragmes.

35. *Écoulement par un orifice percé entre deux réservoirs.*— Deux réservoirs dont les niveaux sont différents communiquent entre eux par une ouverture; le niveau est d'ailleurs constant dans chaque réservoir, et la permanence du mouvement existe. Il s'agit de connaître la vitesse d'écoulement et la quantité de liquide qui passe du réservoir supérieur au réservoir inférieur, dans l'unité de temps.

La question se résout sans peine si l'on admet que les deux réservoirs sont assez grands pour que, à une certaine distance de l'orifice, il n'y ait pas de vitesse sensible. En effet, soit en A (*fig.* 18) une molécule qui au bout d'un certain temps sera en B; puisque dans ces deux positions extrêmes la vitesse est à peu près nulle, il faut, d'après le théorème de Bernoulli (n° 15), que la perte de charge ζ dans le parcours AB soit égale à la charge, c'est-à-dire à la différence de niveau des colonnes piézométriques élevées aux points A et B. Or p et p' étant les pressions sur les niveaux N, N', z la distance verticale de ces niveaux, Π le poids du mètre cube de liquide, on reconnaît que la charge a pour valeur $z+\frac{p-p'}{\Pi}$, comme on l'a vu déjà dans plusieurs exemples analogues. Ainsi nous poserons

Fig. 18.



$$\zeta = z + \frac{p-p'}{\Pi}.$$

Mais on a vu (n° 33) que si U désigne la vitesse dans la section

contractée de la veine, l'épanouissement de cette veine dans le réservoir inférieur donne lieu à une perte de charge exprimée par $\frac{U^2}{2g}$: donc en négligeant les pertes, relativement faibles, qui auraient lieu dans le réservoir supérieur, on devra écrire

$$\zeta = \frac{U^2}{2g} = z + \frac{p - p'}{\Pi},$$

d'où l'on tire

$$(12) \qquad U = \sqrt{2g\left(z + \frac{p - p'}{\Pi}\right)},$$

expression tout à fait pareille à la formule (1) du n° 22, à part cette différence que z désigne ici la hauteur entre les niveaux des deux bassins, tandis que cette lettre avait une autre signification au n° 22. Au reste, il est évident que l'on pourrait conserver ici cette même signification, si l'on admettait que p' représente la pression mesurée, non pas sur le niveau du bassin inférieur, mais sur les filets qui s'écoulent à leur passage dans la section contractée : z et $\frac{p'}{\Pi}$ s'augmenteraient ainsi d'une même quantité et la valeur de la vitesse ne changerait pas.

La vitesse étant déterminée, pour avoir la dépense il faudrait multiplier cette vitesse par l'aire de l'orifice et par le coefficient de dépense applicable dans chaque circonstance spéciale. Il semble assez naturel d'admettre que le coefficient de dépense ne dépend que du mouvement du liquide dans le réservoir supérieur, et, d'autre part, que ce mouvement n'est pas sensiblement altéré par l'agitation du bassin inférieur, en sorte qu'il ne serait pas changé si la veine liquide débouchait dans un gaz dont la pression aurait été choisie de manière à ne pas altérer la charge $z + \frac{p - p'}{\Pi}$. Les indications données au § Ier de ce chapitre, pour le cas d'une veine débouchant dans un gaz, seront donc immédiatement applicables.

D'après ce qui a été dit à la fin du n° 33, la valeur de la vitesse U donnée par la formule (12) pourrait offrir de l'incertitude si l'orifice n'était pas assez noyé pour rendre sensiblement horizontal le niveau N'.

36. *Des ajutages cylindriques.* — Lorsqu'un orifice pratiqué dans une paroi plane est prolongé au dehors par un tuyau cylindrique, de longueur égale à $1\frac{1}{2}$ fois le diamètre, il n'y a plus de contraction sensible, à la sortie de la veine. Ainsi la dépense Q doit être égale à la vitesse d'écoulement U multipliée par la section A de l'orifice ou du tuyau, c'est-à-dire qu'on a

$$Q = AU.$$

Mais la vitesse ne reste pas ce qu'elle serait sans l'existence de l'ajutage, et elle éprouve, comme on va le voir, une diminution notable. En effet, si nous nommons, comme dans le § Ier de ce chapitre,

z_1 la différence de hauteur mesurée verticalement, entre le niveau du réservoir et le centre de gravité de l'orifice;

p la pression sur la surface de niveau du réservoir, par unité de surface;

p' la pression exercée sur la veine à sa sortie;

Π le poids du mètre cube de liquide;

on sait (nos 22 et 23) que dans le cas où l'écoulement se produit librement dans un gaz, par un orifice en mince paroi, la vitesse U s'obtient, à quelques centièmes près, par la formule

$$U = \sqrt{2g\left(z_1 + \frac{p - p'}{\Pi}\right)},$$

qui peut être conservée dans le cas examiné au n° 35. Au contraire, lorsque l'orifice est accompagné d'un ajutage cylindrique, l'expérience montre que la vitesse U, mesurée en prenant le quotient du débit Q par l'aire A, n'est plus en moyenne que les 0,82 de celle qui résulterait de la formule précédente: ainsi

$$(14)\quad \begin{cases} U = 0{,}82\sqrt{2g\left(z_1 + \dfrac{p - p'}{\Pi}\right)}, \\ Q = 0{,}82\,A\sqrt{2g\left(z_1 + \dfrac{p - p'}{\Pi}\right)}. \end{cases}$$

La relation qui donne U se met encore sous la forme

$$\frac{U^2}{2g} = \overline{0{,}82}^2\left(z_1 + \frac{p - p'}{\Pi}\right),$$

ou approximativement

$$\frac{U^2}{2g} = \frac{2}{3}\left(z_2 + \frac{p-p'}{\Pi}\right);$$

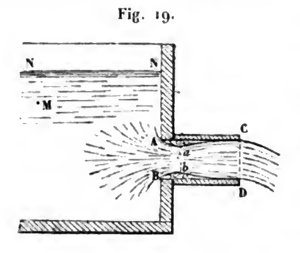
la hauteur due à la vitesse de sortie est donc seulement les deux tiers de la charge, ou en d'autres termes, d'après le théorème de Bernoulli, la charge perdue ζ est un tiers de la charge totale. On peut encore dire, en comparant les valeurs de $\frac{U^2}{2g}$ et de ζ, que la première est double de la seconde; l'égalité

$$\zeta = \frac{1}{2}\frac{U^2}{2g}$$

fournira une seconde expression de la perte de charge.

Voici comment la théorie rend compte de ces faits. Le liquide sortant par l'ouverture AB (*fig.* 19) forme une veine qui se contracte jusqu'en *ab*, à une distance égale au rayon de cette dernière section, si elle est circulaire, puis qui tend à reprendre des dimensions plus fortes (n° 21). Il reste donc dans le tuyau ABCD un espace annulaire tout autour de la veine, lequel est rempli d'air à l'origine du mouvement, si l'écoulement a lieu dans l'air. Mais cet air est peu à peu entraîné par le frottement du liquide; la veine, moins pressée sur son contour, tend à se dilater, et bientôt le liquide remplit complétement le tuyau. On a donc en *ab* une veine qui débouche dans une section plus grande déjà occupée par le même liquide, d'où résulte une agitation et une perte de charge. Cette perte est exprimée par la formule (5) du n° 31, dans laquelle il faut faire $S_0 = S = A$, ce qui donne

Fig. 19.



$$\zeta = \frac{Q^2}{2gA^2}\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2,$$

ou bien, attendu que $\frac{Q}{A} = U$,

$$\zeta = \frac{U^2}{2g}\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2.$$

Cela posé, si l'on applique le théorème de Bernoulli à une molécule qui, partie du réservoir, serait arrivée à la section CD, au lieu de l'égalité $\frac{U^2}{2g} = z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}$, employée au n° 24 dans l'hypothèse d'une perte de charge nulle, nous devons écrire

$$\frac{U^2}{2g} = z_2 + \frac{p - p'}{\Pi} - \frac{U^2}{2g}\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2,$$

d'où nous tirerons

$$\frac{U^2}{2g} = \frac{z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}}{1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2}.$$

Par suite, on aura pour la perte ζ

$$\zeta = \left(z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}\right)\frac{\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2}.$$

Lorsque dans cette expression de ζ on suppose le coefficient de dépense $m = 0{,}62$, ce qui est à peu près sa valeur exacte pour un orifice circulaire, on trouve pour le rapport entre ζ et la charge le nombre $0{,}273$, au lieu de $\frac{1}{3}$ qui résulte des indications expérimentales. Cette différence montre que si la théorie ne donne pas une explication complète de ce qui se passe dans les ajutages cylindriques, du moins elle en rend compte d'une manière à peu près satisfaisante. Au reste l'erreur commise en adoptant la perte de charge théorique se traduirait en une erreur plus faible dans l'évaluation de la vitesse ou de la dépense; car on aurait

$$\frac{U^2}{2g} = (1 - 0{,}273)\left(z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}\right),$$

d'où

$$U=\frac{Q}{A}=0{,}85\sqrt{2g\left(z_2+\frac{p-p'}{\Pi}\right)}$$

expression dont l'emploi n'entraînerait qu'une erreur relative en plus de $\frac{1}{27}$ environ.

On peut se proposer de calculer la pression moyenne p'' qui s'exerce sur la veine contractée. Pour cela, remarquons d'abord que la charge moyenne entre le point de départ M d'une molécule et son passage dans le plan ab a pour valeur $z_2+\frac{p-p''}{\Pi}$, et d'un autre côté que, suivant la définition même du coefficient de dépense m, la vitesse en ab est exprimée par $\frac{Q}{mA}$. Le théorème de Bernoulli, appliqué entre M et ab, donnera donc

$$\frac{Q^2}{2gm^2A^2}=z_2+\frac{p-p''}{\Pi};$$

or la seconde des formules (14) donne

$$\frac{Q^2}{2gA^2}=\left(z_2+\frac{p-p'}{\Pi}\right)\cdot\overline{0{,}82}^2;$$

donc nous aurons aussi

$$m^2\left(z_2+\frac{p-p''}{\Pi}\right)=\overline{0{,}82}^2\left(z_2+\frac{p-p'}{\Pi}\right).$$

La substitution du nombre 0,62 à la place de m nous conduira définitivement à l'expression de la quantité cherchée

$$(15)\qquad \frac{p''}{\Pi}=\frac{p'}{\Pi}-\frac{3}{4}\left(z_2+\frac{p-p'}{\Pi}\right).$$

Ainsi la pression p'' est inférieure à p' et la hauteur représentative de la différence $p'-p''$ serait les trois quarts de la charge sous laquelle a lieu l'écoulement.

Ce résultat a été confirmé par une expérience remarquable de Venturi. Ayant établi un orifice avec ajutage cylindrique de $0^m,0406$ de diamètre, en un point situé à $0^m,018$ de son ori-

fice il a adapté un tube recourbé en verre, qui descendait au-dessous de l'ajutage et allait plonger dans une cuvette remplie d'eau. Ayant ensuite fait couler de l'eau par l'ajutage sous une charge de $0^m,88$, il a constaté que l'eau de la cuvette était aspirée et montait dans le tube à $0^m,65$ au-dessous du niveau de la cuvette. On avait donc $\frac{p'-p''}{\Pi}=0^m,65$, et la théorie donnant pour cette même différence $\frac{3}{4}\,0^m,88$ ou $0^m,66$, on voit qu'elle est d'accord avec l'expérience.

Il y a encore une observation intéressante à faire, au sujet du résultat renfermé dans la formule (15). D'après la définition de la fluidité parfaite (n° 2), les fluides parfaits sont incapables de se trouver dans un état de tension proprement dite, et généralement il en est à peu près de même des fluides naturels, malgré l'effet de la viscosité. Ainsi la pression en un point d'un fluide ne peut jamais devenir une tension, et par conséquent, puisqu'il n'y a pas d'erreur possible dans le sens des forces, quand on calcule une pression inconnue on doit toujours trouver un résultat positif. Le fait contraire indiquerait qu'il y a, dans les hypothèses ou théorèmes servant de base au calcul, quelque chose d'inexact ou tout au moins inapplicable au cas particulier que l'on traite. Il faut donc que l'on ait $p''>0$, c'est-à-dire

$$\frac{p'}{\Pi}-\frac{3}{4}\left(z_2+\frac{p-p'}{\Pi}\right)>0.$$

Par exemple si le liquide est de l'eau et que l'écoulement ait lieu librement dans l'atmosphère, le niveau NN supportant aussi la pression atmosphérique, on aurait

$$\frac{p}{\Pi}=\frac{p'}{\Pi}=10^m,33,$$

et, par suite, la condition ci-dessus deviendrait

$$z_2<13^m,77.$$

Donc, avec les circonstances que nous supposons, si la théorie des ajutages cylindriques donnée tout à l'heure était absolu-

ment vraie, il faudrait que la pression en ab fût nulle quand z_2 serait égal à $13^m,77$ et négative pour de plus fortes valeurs de z_2. Or une pression négative ne peut pas se réaliser; donc finalement il faut conclure que la théorie en question ne peut pas être appliquée quand z_2 atteint ou dépasse $13^m,77$. Il y aurait même du doute avant d'arriver à cette limite, car lorsque la pression devient trop faible, l'air contenu dans l'eau s'en sépare et trouble l'écoulement. Il serait à désirer qu'on eût quelques expériences pour indiquer les formules à employer dans le cas d'exception dont nous venons de parler.

Si l'écoulement avait lieu dans le vide, p' serait nul et l'expression de p'' forcément négative. Ce serait donc encore un cas d'exception où la théorie se trouverait en défaut. Il est vraisemblable que la veine coulerait sans remplir le tuyau ou que le mouvement permanent ne s'établirait pas.

L'emploi des formules (14) et (15) suppose encore que la section AB de l'ajutage est assez loin du fond et des bords du réservoir, et que celui-ci a des dimensions assez grandes pour que le liquide y soit sensiblement stagnant.

Ainsi qu'on l'a vu, l'effet des ajutages cylindriques, comparativement aux orifices en minces parois, est de produire une augmentation de dépense par la suppression de la contraction, en même temps qu'une diminution de vitesse due à la perte de charge. Il n'est pas sans utilité de se rappeler que cette perte de charge correspond à un travail négatif des actions dues à la viscosité (n° 15), lequel annule une partie du travail de la pesanteur et des pressions et diminue d'autant la puissance vive possédée par le fluide sortant. La diminution relative est ici de $\frac{1}{3}$. C'est ce que les formules mettent en évidence. En effet la puissance vive de la masse liquide écoulée par l'ajutage dans l'unité de temps sera $\frac{\Pi}{2g}QU^2$, soit par mètre cube de liquide dépensé $\frac{\Pi U^2}{2g}$, ou enfin $\frac{2}{3}\Pi h$, en représentant par h la charge $z_2+\frac{p-p'}{\Pi}$. Au contraire, si l'orifice eût été en mince paroi, nous aurions trouvé approximativement Πh. Donc l'emploi de

l'ajutage réduit la puissance vive du liquide sortant aux deux tiers environ de ce qu'elle serait pour un orifice en mince paroi, à égalité de volume dépensé. On arriverait à un résultat analogue si l'on comparait les puissances vives des volumes dépensés pendant le même temps, par exemple pendant 1 seconde, car les deux valeurs de l'expression $\Pi Q \frac{U^2}{2g}$ seraient

$$\Pi .0,82 A \sqrt{2gh} . \frac{2}{3} h \quad \text{soit} \quad 0,55 \Pi A h \sqrt{2gh},$$

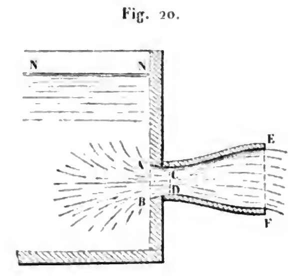
et

$$\Pi .0,62 A \sqrt{2gh} . h ;$$

seulement le désavantage du tuyau cylindrique serait ici moins sensible. Donc, en définitive, l'emploi de l'ajutage n'est utile que si l'on a pour but principal d'augmenter la dépense de liquide dans un temps donné; mais il faut l'éviter dans toutes les circonstances où l'économie du travail de la force motrice est une condition essentielle.

37. *Des ajutages coniques divergents.* — On adapte à un vase ou réservoir un ajutage composé : 1° d'une embouchure ABCD (*fig.* 20) ayant la figure d'une veine qui sortirait librement par l'orifice AB en mince paroi, cette figure étant prise jusqu'à la section contractée; 2° d'un tube CDEF s'élargissant progressivement jusqu'en EF et se raccordant tangentiellement avec l'embouchure. Dans de telles circonstances, si l'écoulement permanent est établi, que le liquide coule à plein tuyau, enfin si les effets de la viscosité peuvent être négligés, la vitesse U de sortie en EF correspondait à la charge sur le centre de cette section ; de sorte qu'en conservant les notations du n° 36, on devrait poser

Fig. 20.



$$\frac{U^2}{2g} = z_1 + \frac{p - p'}{\Pi},$$

formule dont la démonstration serait identique avec celle qu'on a donnée pour le cas des orifices en mince paroi (nos 22 et 23). D'un autre côté, comme la contraction est supprimée après le passage de la section EF, en appelant S l'aire de cette section, la dépense Q serait SU, soit

$$(16) \qquad Q = S\sqrt{2g\left(z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}\right)}.$$

Il semble donc au premier abord qu'on peut accroître autant qu'on veut la dépense faite par une même ouverture AB, en augmentant seulement l'aire S, puisque la vitesse ou le rapport $\frac{Q}{S}$ est une quantité constante. Mais, comme nous allons le montrer, si l'on allait au delà d'une certaine limite, on ne tarderait pas à rendre impossible l'hypothèse d'un écoulement permanent et à plein tuyau. Soient en effet Ω l'aire CD, U_1 la vitesse du liquide et p_1 la pression dans la section CD. A cause de l'incompressibilité, la masse du volume de liquide CDEF doit rester constante, et par conséquent les dépenses qui se font par les sections CD, EF doivent être égales, ce qui donne la première relation

$$\Omega U_1 = SU;$$

en outre, on peut appliquer le théorème de Bernoulli dans le passage d'une molécule de CD à EF, et on trouvera, le tuyau ayant son axe horizontal,

$$\frac{U^2 - U_1^2}{2g} = \frac{p_1 - p'}{\Pi}.$$

Donc en remplaçant U_1 par $\frac{SU}{\Omega}$, on aura

$$\frac{U^2}{2g}\left(1 - \frac{S^2}{\Omega^2}\right) = \frac{p_1 - p'}{\Pi},$$

ou bien encore

$$\left(z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}\right)\left(1 - \frac{S^2}{\Omega^2}\right) = \frac{p_1 - p'}{\Pi}.$$

Cette équation montre que p_1 est au-dessous de la pression ex-

térieure p', car S est plus grand que Ω, d'où résulte que $1 - \frac{S^2}{\Omega^2}$ est négatif; en la résolvant par rapport à p_1, elle donne

$$\frac{p_1}{\Pi} = \frac{p'}{\Pi} \cdot \frac{S^2}{\Omega^2} - \left(z_2 + \frac{p}{\Pi}\right)\left(\frac{S^2}{\Omega^2} - 1\right).$$

Or, on a vu (n° 36) que la pression ne peut jamais devenir négative; donc on a $p_1 > 0$, et par suite

$$\frac{p'}{\Pi} \cdot \frac{S^2}{\Omega^2} - \left(z_2 + \frac{p}{\Pi}\right)\left(\frac{S^2}{\Omega^2} - 1\right) > 0,$$

soit encore

$$\frac{p'}{\Pi} - \left(z_2 + \frac{p}{\Pi}\right)\left(1 - \frac{\Omega^2}{S^2}\right) > 0;$$

d'où l'on tire facilement

$$(17) \qquad \frac{\Omega}{S} > \sqrt{\frac{z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}}{z_2 + \frac{p}{\Pi}}}.$$

Ainsi donc, si dans un appareil particulier $\frac{\Omega}{S}$ descendait au-dessous de la limite ci-dessus, l'hypothèse d'un écoulement permanent à plein tuyau conduirait à la conséquence absurde d'une pression p_1 négative; elle devrait donc être rejetée. On voit par conséquent que l'ouverture AB et, par suite, l'aire Ω étant données, S ne peut pas croître autant qu'on veut, ce qui impose une limite supérieure à la dépense. Cette limite Q' s'obtiendrait en donnant à S, dans la formule (17), sa valeur extrême $\Omega \sqrt{\frac{z_2 + \frac{p}{\Pi}}{z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}}}$; elle serait

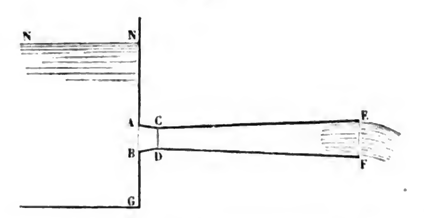
$$Q' = \Omega \sqrt{2g\left(z_2 + \frac{p}{\Pi}\right)},$$

c'est-à-dire la dépense qui se ferait par un orifice CD évasé intérieurement et débouchant dans le vide.

On a plusieurs expériences de Venturi sur les ajutages dont

nous nous occupons; mais malheureusement ces ajutages étaient simplement formés de deux troncs de cône ABCD et CDEF (*fig.* 21), en sorte qu'il n'y avait pas en CD le raccor-

Fig. 21.



dement tangentiel que nous avons supposé. Il devait en résulter probablement que les filets ne suivaient pas exactement les lignes brisées telles que NACE, GBDF, et que des remous se formaient, principalement après le passage de CD, contre les parois de l'ajutage, ce qui donnerait lieu à une perte de charge analogue à celle des ajutages cylindriques.

L'expérience qui, à égalité de charge et de section Ω d'embouchure, a donné la plus grande dépense, avait lieu dans les circonstances suivantes. Les dimensions étaient :

Diamètre $\overline{AB}$	$0^m,04061$
Diamètre $\overline{CD}$	$0^m,03497$
Diamètre $\overline{EF}$	$0^m,06091$
Côté $\overline{AC}$	$0^m,02482$
Côté $\overline{CE}$	$0^m,334$
Hauteur z_2	$0^m,88$
Section AB	$0^{mq},001296$
Section CD	$0^{mq},000960$
Section EF	$0^{mq},002913$

Les pressions p et p' étaient la pression atmosphérique; ainsi le liquide étant de l'eau, on avait

$$\frac{p}{\Pi} = \frac{p'}{\Pi} = 10^m,33.$$

La dépense a été par seconde de $6^l,53$, soit $Q = 0^{mc},00653$. Par l'orifice AB, en mince paroi, on aurait eu le débit

$$Q = 0,62 . 0,001296 \sqrt{2g . 0,88} = 0^{mc},00334,$$

c'est-à-dire environ deux fois moins. Mais le maximum théorique Q' était loin d'être obtenu, car on a

$$Q' = 0,000960 \sqrt{2g(0,88 + 10,33)} = 0^{mc},01411,$$

soit plus du double de la dépense réalisée. D'ailleurs Venturi ne s'était pas beaucoup écarté du rapport $\frac{\Omega}{S}$ auquel correspond une pression nulle en CD; car d'après la formule (17) ce rapport serait $\sqrt{\frac{0,88}{0,88+10,33}}$ ou 0,28, et dans l'appareil en question il était $\frac{0,000960}{0,002913}$ ou 0,33.

Pour se rendre compte de la perte de charge, due aux remous dont nous avons parlé, et sans doute aussi à l'adhérence entre le liquide et les parois solides, on peut remarquer que la vitesse U de sortie était seulement de $\frac{0,00653}{0,002913}$ ou de $2^m,24$ par seconde, laquelle correspond à la hauteur $0^m,256$ environ. Or ζ étant la charge perdue, on sait que

$$\frac{U^2}{2g} = 0^m,88 - \zeta;$$

donc

$$\zeta = 0^m,88 - 0^m,256 = 0^m,624,$$

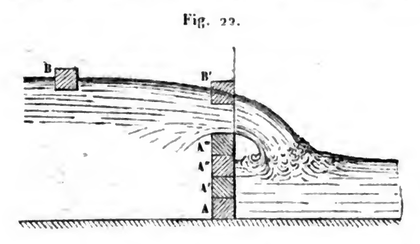
c'est-à-dire 71 pour 100 de la charge totale. Les considérations développées à la fin du n° 36 s'appliqueraient à fortiori à l'ajutage conique divergent dont nous nous occupons.

Venturi a constaté que si l'on perçait quelques trous capillaires sur le périmètre de CD, l'ajutage divergent cessait de produire une augmentation de dépense. Cela suffit pour réfuter une opinion émise par quelques auteurs, qui attribuent cette augmentation à l'attraction du tube, car il serait étrange que cette attraction s'anéantît par la seule présence d'un petit nombre de trous imperceptibles.

§ III. — Applications diverses (*).

38. *Barrage à poutrelles.* — Un cours d'eau passe entre deux bajoyers ou murs parallèles, dont l'intervalle est fermé sur une certaine hauteur par des poutrelles A, A′, A″, A‴,... (*fig.* 22) superposées, formant un déversoir par-dessus le-

Fig. 22.



quel le liquide s'écoule dans le bief inférieur. Quand on veut exhausser le barrage, une autre poutrelle B, qui flotte dans le bief supérieur, est amenée dans la position B′, de manière à faire porter ses extrémités contre les feuillures qui retiennent les autres poutrelles déjà placées. A peine est-elle dans cette position, qu'on la voit tomber d'elle-même sur la poutrelle A‴.

Ce fait s'explique aisément. L'intervalle entre les poutrelles A‴ et B′ forme une espèce d'ajutage; la pression sur la face inférieure de B′ devient moindre que la pression atmosphérique (nº 36) qui s'exerce sur la face supérieure. La poutrelle obéit donc à la différence de ces forces et à son poids qui, seul, serait déjà plus que capable de la faire descendre, malgré le frottement latéral contre les feuillures. Si la faible largeur des poutrelles paraissait, dans certains cas particuliers, un obstacle à la production du phénomène des ajutages, du moins

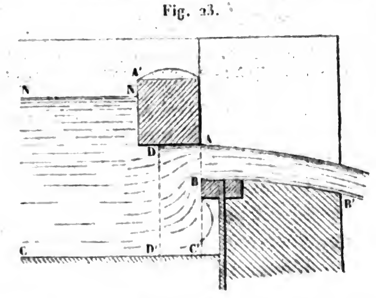
(*) Nous plaçons ici la théorie de divers appareils employés dans les barrages mobiles. Pour quelques-uns il n'y a réellement besoin que des notions d'Hydrostatique; mais pour d'autres il était bon d'avoir vu la théorie des ajutages cylindriques, et de connaître les formules de l'écoulement des liquides. Ne voulant pas d'ailleurs séparer des questions qui avaient entre elles de l'analogie, nous avons dû en différer l'examen jusqu'à présent.

on doit reconnaître que la pression dans la veine jaillissante est peu différente de la pression atmosphérique (n° 18, 3e règle) et que les pressions sur les deux faces horizontales de la poutrelle B′ tendent à s'équilibrer, ce qui serait à la rigueur suffisant.

Il est à remarquer que les premières poutrelles A, A′... qui doivent être posées au-dessous du niveau du bief inférieur, ne descendent pas ainsi d'elles-mêmes à leur place : cela n'a lieu que lorsqu'elles sont en nombre suffisant pour dépasser le niveau du bief inférieur.

39. *Bateau vanne.* — Un bateau AA′ (*fig.* 23), dont la section transversale est rectangulaire, s'appuie contre deux piles en maçonnerie, dont l'intervalle est fermé dans sa partie inférieure par un radier BB′ plus élevé que le fond CC′ de la rivière. L'eau passe entre A et B avec une certaine vitesse U, et les filets qui coulent au-dessous du bateau ont une vitesse moindre U′. Comme on est dans des circonstances qui présentent de l'analogie avec celles que l'on considérait au n° 28, en appelant h la hauteur de A au-dessous du niveau N, on doit poser

Fig. 23.



$$\frac{U^2}{2g} = h.$$

D'un autre côté, si dans une section DD′ tous les filets pouvaient être considérés comme parallèles et d'égale vitesse, a et b désignant les hauteurs $\overline{AB}$ et $\overline{DD'}$, et le canal étant supposé rectangulaire, l'incompressibilité de l'eau donnerait

$$Ua = U'b,$$

relation nécessaire pour que la masse de l'eau comprise dans l'intervalle ABDD′ reste toujours la même. Enfin, l'application

du théorème de Bernoulli, pour une molécule passant du point D où elle a la pression p' et la vitesse U' au point A où ces quantités deviennent p et U, donnera l'équation

$$\frac{p'-p}{\Pi} = \frac{U^2 - U'^2}{2g}.$$

On déduit sans peine de ces trois relations

$$\frac{p'-p}{\Pi} = h\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right).$$

Ce calcul de la pression p' sur le fond du bateau peut offrir de l'incertitude, surtout parce que les vitesses de toutes les molécules qui traversent la section DD' ne sont pas égales, et que la convergence des filets vers l'orifice AB empêche aussi ces vitesses d'être horizontales; mais il suffit pour faire comprendre que p' doit être supérieur à p et que l'excès est croissant avec h. Le poids du bateau et son frottement contre les piles peuvent être trop faibles pour faire équilibre à la force verticale produite par cet excès $p'-p$; dans ce cas, on ouvre des robinets placés sur la face d'amont du bateau; on y introduit ainsi la quantité d'eau nécessaire pour l'équilibre du bateau, dans la position qu'il doit occuper. Quand on veut faire descendre le bateau, on augmente cette quantité; quand on veut le faire remonter, on ouvre d'autres robinets placés sur la face d'aval pour faire écouler l'eau.

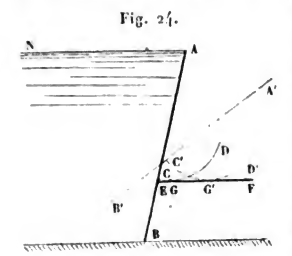
Le bateau, une fois équilibré, s'élève de lui-même et agrandit l'ouverture, si le niveau N vient à monter, puisque h et par suite $p'-p$ seraient augmentés; il descendrait dans le cas contraire. On voit par conséquent que ce bateau, dont l'idée première est due à M. Sartoris, pourrait être employé pour maintenir le niveau N à peu près constant, malgré les variations du débit qui passe par l'ouverture AB.

40. *Premier système de vannes Chaubart* (*). — Dans un canal à section rectangulaire se trouve une vanne inclinée AB

(*) Ce système de vannes est décrit avec soin dans un Rapport de M. l'Ingénieur Schlœsing, inséré dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, 1855, 2e semestre.

(*fig.* 24) occupant toute la largeur du canal. Cette vanne porte une courbe en fonte CD, invariablement liée avec elle, et assujettie à rouler sur un plan horizontal EF. Dans la position initiale de la vanne, le niveau N de l'eau affleure son sommet, et l'on s'arrange pour que la résultante des actions exercées sur l'appareil par la pesanteur et par les pressions de l'eau vienne passer en G, point actuel de contact de CD avec EF. Alors l'équilibre existe. Mais si par une cause quelconque il arrive plus d'eau dans le bief avec lequel communique cette vanne et que le niveau N vienne à monter, le centre de pression se relève, ce qui tend à faire passer la résultante en avant de G. Il se produit alors un mouvement de bascule par suite duquel le point de contact se déplace de G en G'; la vanne s'incline davantage, prend la position A'B', et le trop-plein s'écoule, tant au-dessus de A' qu'au-dessous de B'.

Fig. 24.

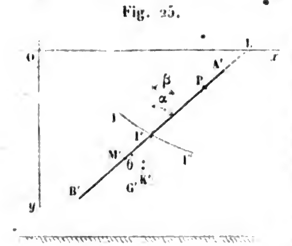


Dans cette nouvelle position A'B', il peut arriver, si la courbe CD a été convenablement déterminée, que la résultante passe en G' quand le niveau sera redescendu en N. Il est clair que, moyennant cette condition, la vanne s'arrêtera dans la position A'B' et qu'elle la quittera seulement quand un nouvel exhaussement de niveau la forcera de s'incliner davantage encore, ou qu'un abaissement la fera se relever. En un mot, elle ne restera en équilibre dans une des positions qu'elle peut prendre que si le niveau du bief atteint sa hauteur normale; pour une hauteur plus grande, elle prendrait un mouvement qui accroîtrait le débouché; pour une hauteur moindre, elle se mouvrait de manière à produire l'effet inverse. L'appareil, comme on le voit, pourra donc être employé pour obtenir dans un bief un niveau constant malgré que l'alimentation soit variable; mais il faut pouvoir résoudre le problème suivant : Quelles doivent être la forme et la position de la courbe CD pour que, si elle roule sur l'horizontale EF en entraînant la vanne avec elle, dans toutes les positions la résultante des forces agissant sur

la vanne passe toujours par le point de contact, la pression de l'eau étant, bien entendu, calculée d'après l'hypothèse d'un niveau N invariable? Ce problème, l'inventeur M. Chaubart l'a résolu par des tâtonnements qui l'ont conduit à adopter pour la courbe CD un arc de cercle dont il détermine le rayon à l'aide d'une formule empirique. Voici comment on peut théoriquement en trouver la solution.

Prenons la vanne dans une position quelconque A′B′ (*fig.* 25). La figure représente une coupe faite par un plan vertical mené perpendiculairement à la vanne en son milieu; A′B′ est la coupe de la surface plane rectangulaire pressée par l'eau, I′ son centre de figure, K′ le centre de gravité de la vanne, M′ le centre de pression. Ayant en outre tracé deux axes dans le plan de la figure, l'un Ox horizontal suivant le niveau normal de l'eau, l'autre Oy vertical et descendant, appelons :

Fig. 25.



- x, y les coordonnées du point I′ relativement aux axes Ox, Oy;
- α l'angle de A′B′ avec la verticale;
- β l'angle fait avec la verticale par la ligne I′G′ normale au lieu décrit par le point I′ pendant le déplacement de l'appareil;
- θ l'angle constant K′I′B′, lequel dépend de la construction de la vanne;
- a et b les longueurs, également constantes, $\overline{\text{I}'\text{K}'}$ et $\overline{\text{A}'\text{B}'}$;
- c la distance variable $\overline{\text{M}'\text{I}'}$;
- l la largeur horizontale de la vanne;
- Π le poids du mètre cube d'eau;
- h une longueur tellement déterminée par le calcul, que Πblh exprime le poids total de la vanne, agissant en K′.

Pour simplifier, nous admettrons que la pression de l'eau sur les divers éléments de A′B′ varie suivant la loi hydrostatique, bien que cela puisse offrir du doute, surtout près des

extrémités A′, B′, où les molécules d'eau possèdent déjà une vitesse notable. La pression totale sur A′B′ aura donc une intensité Πlby, produit de la surface totale pressée par la pression Πy au centre de gravité I′ de cette surface (n° 8) (*). Quant au point d'application M′ de cette résultante, on l'obtiendra par le théorème des moments; en effet, la pression par unité de surface en un point quelconque P de A′B′ est proportionnelle à la hauteur de ce point au-dessous de Ox, ou bien à la distance $\overline{\text{PL}}$ mesurée suivant le prolongement de A′B′ jusqu'à Ox. Soit donc $z = \text{PL}$; une tranche horizontale de surface ldz, comprenant le point P, supportera une pression totale proportionnelle à $lzdz$. Par suite, si z_1 est la valeur de z pour le point M′, l'équation des moments par rapport à l'axe projeté en L donnera

$$z_1 \int z\,dz = \int z^2\,dz,$$

les deux intégrales devront être prises depuis $z = \overline{\text{A}'\text{L}} = z'$ jusqu'à $z = \overline{\text{B}'\text{L}} = z''$. On tire de là

$$z_1 = \frac{2}{3}\,\frac{z''^3 - z'^3}{z''^2 - z'^2} = \frac{2}{3}\,\frac{z''^2 + z'z'' + z'^2}{z' + z''};$$

d'autre part

$$\overline{\text{M}'\text{I}'} = z_1 - \text{I}'\text{L} = z_1 - \frac{1}{2}(z' + z''),$$

donc

$$\overline{\text{M}'\text{I}'} = c = \frac{2}{3}\,\frac{z''^2 + z'z'' + z'^2}{z' + z''} - \frac{1}{2}(z' + z'')$$
$$= \frac{1}{6}\,\frac{(z'' - z')^2}{z' + z''} = \frac{1}{12}\,\frac{b^2}{\text{LI}'} \quad (^{**});$$

(*) On fait ici abstraction de la pression atmosphérique, parce qu'elle s'exerce sur tout le contour de la vanne et donne ainsi lieu à une résultante nulle (n° 7); on suppose de plus que l'eau ne presse pas la vanne du côté d'aval.

(**) Ce résultat serait établi sans aucun calcul au moyen de la propriété démontrée au n° 27 du Cours de Résistance des Matériaux. Il suffirait de se rappeler que le carré du rayon de gyration de la surface A′B′ relativement à l'axe horizontal I′ a pour valeur $\frac{1}{12}b^2$.

et attendu que $\overline{\text{LI}'} = \frac{y}{\cos\alpha}$, nous aurons finalement

$$(1) \qquad e = \frac{1}{12}\,\frac{b^2\cos\alpha}{y}.$$

Cela établi, soit II′I″ la courbe décrite par le point I′; le centre instantané de rotation de la ligne A′B′ sera en un point G′ de la normale I′G′ à la courbe II′I″, et si l'on appelle ds le déplacement de I′ correspondant à un changement $d\alpha$ d'inclinaison de la vanne, on aura

$$\overline{\text{I}'\text{G}'} = \frac{ds}{d\alpha};$$

en effet $d\alpha$ exprime la rotation élémentaire autour du centre instantané, laquelle multipliée par $\overline{\text{I}'\text{G}'}$ doit donner le chemin ds parcouru par I′. Donc, le mouvement de A′B′ pouvant toujours (d'après un théorème de Cinématique bien connu) être produit par le roulement d'une courbe mobile sur une courbe fixe, comme dans la *fig.* 24, G′ serait la position actuelle du point de contact : G′ désigne donc un même point dans les *fig.* 24 et 25. Pour satisfaire à la condition du problème, il faut en conséquence égaler à zéro la somme des moments, relativement à G′, de la pression de l'eau et du poids de la vanne. Cherchons maintenant l'expression algébrique de cette somme.

Le moment de la pression exercée par l'eau sera en valeur absolue

$$\Pi lby\left[\overline{\text{I}'\text{M}'} - \overline{\text{I}'\text{G}'}\cos(\alpha-\beta)\right],$$

soit

$$\Pi lby\left[\frac{1}{12}\,\frac{b^2\cos\alpha}{y} - \frac{ds}{d\alpha}\cos(\alpha-\beta)\right].$$

Or on a

$$\cos\beta = \frac{dx}{ds}, \qquad \sin\beta = \frac{dy}{ds},$$

d'où l'on tire

$$ds\cos(\alpha-\beta) = (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)\,ds = dx\cos\alpha + dy\sin\alpha:$$

donc le moment de la pression de l'eau devient

$$\Pi lb\left(\frac{1}{12}\,b^2\cos\alpha - y\cos\alpha\frac{dx}{d\alpha} - y\sin\alpha\frac{dy}{d\alpha}\right),$$

et ce moment est évalué dans le sens d'une rotation de Oy vers Ox. Pour avoir celui du poids Πlbh de la vanne, il faut multiplier ce poids par la différence des projections horizontales de $\overline{I'G'}$ et de $\overline{I'K'}$, et on trouvera

$$\Pi lbh\left[\overline{I'G'}\sin\beta - \overline{I'K'}\sin(\alpha-\theta)\right]$$

ou plus simplement

$$\Pi lbh\left[\frac{dy}{d\alpha} - a\sin(\alpha-\theta)\right].$$

Comme ce moment est évalué dans le sens d'une rotation de Ox vers Oy, c'est-à-dire en sens contraire du précédent, leur somme algébrique sera la différence des deux expressions; en l'égalant à zéro, nous aurons

$$(2)\qquad \frac{1}{12}b^2\cos\alpha + ah\sin(\alpha-\theta) - y\cos\alpha\frac{dx}{d\alpha} - (h+y\sin\alpha)\frac{dy}{d\alpha} = 0.$$

L'équation (2) est la seule qui doive nécessairement lier entre elles les variables x, y et α : il en résulte qu'on pourrait se donner arbitrairement la courbe I'I'', c'est-à-dire une relation entre x et y, et alors l'équation (2) ferait connaître α en fonction de x ou de y. Le mouvement de la vanne serait déterminé, puisque l'on connaîtrait la translation de l'un de ses points I' et ses rotations successives $d\alpha$ autour de ce point. On en conclurait les courbes qui roulant l'une sur l'autre peuvent produire ce mouvement. Le problème consistant dans la recherche de ces courbes est donc indéterminé, puisqu'il dépend d'une relation arbitraire entre x et y. Parmi toutes les solutions qui peuvent être déduites de l'équation (2), la suivante est remarquable par sa grande simplicité.

On prendra pour le lieu géométrique des points I' une droite horizontale, parallèle à l'axe des x; alors y est une constante C et $\frac{dy}{d\alpha} = 0$. Si de plus on suppose $\theta = 90°$, l'équation (2) devient

$$\frac{1}{12}b^2 - ah - C\frac{dx}{d\alpha} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{\frac{1}{12}b^2 - ah}{C} = r.$$

Or puisque $dy = 0$, $ds = dx$ et $\frac{ds}{d\alpha} = \frac{dx}{d\alpha}$; donc la distance $\overline{I'G'}$ est constante, ce qui montre que le centre instantané de rotation décrit, relativement à la vanne, un cercle ayant r pour rayon et I' pour centre. D'un autre côté la distance verticale de G' à l'axe des x aura pour valeur $C + \overline{I'G'} \cos\beta = C + r$, car β est constamment nul, puisque le point I' se meut horizontalement. Il en résulte que relativement aux axes fixes Ox, Oy, le centre instantané G' se meut sur une droite horizontale. Maintenant il suffit de se rappeler cette propriété générale du mouvement des figures planes dans leur plan, savoir : que ce mouvement peut toujours être produit en faisant rouler le lieu géométrique des points de la figure mobile qui coïncident successivement avec le centre instantané de rotation, sur le lieu géométrique de ces centres tracé dans le plan fixe. On en conclura sans peine que dans le cas actuel il faut lier à la vanne un cercle décrit autour du point I' avec r pour rayon, et le faire rouler sur l'horizontale menée en dessous de l'axe des x à la distance $C + r$. La constante C sera d'ailleurs connue par la position initiale que l'on veut donner à la vanne, et qui peut être choisie arbitrairement, dans certaines limites, sans que la théorie précédente cesse de s'appliquer.

Si, par exemple, la position initiale était verticale et que l'extrémité A' affleurât le niveau normal de l'eau, on aurait $C = \frac{b}{2}$, et par suite

$$r = \frac{1}{6}b - \frac{2ah}{b},$$

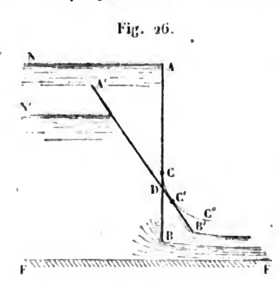
$$C + r = \frac{2}{3}b - \frac{2ah}{b}.$$

Dans les applications, il faut se rappeler qu'on a fait $\theta = 90°$; il faudrait donc construire la vanne de manière à satisfaire à cette condition, dont l'expression en langage ordinaire est que la ligne joignant le centre de gravité de la vanne au centre de figure de la surface pressée par l'eau doit être perpendiculaire à cette surface.

41. *Second système de vannes Chaubart.* — Par le moyen des vannes ci-dessus décrites, M. Chaubart a résolu le problème consistant à obtenir dans un bief un niveau constant malgré une alimentation variable; maintenant il s'agit, au contraire, de débiter un volume d'eau constant par un pertuis rectangulaire ouvert dans un bief dont le niveau varie : c'est le but dans lequel M. Chaubart a imaginé les vannes dont nous allons parler.

Dans sa position initiale, la vanne AB (*fig.* 26) laisse une ouverture libre entre son arête inférieure B et le fond du pertuis; le niveau N du bief, qui est alors à son maximum d'élévation, affleure à peu près le dessus A de la vanne; un certain volume d'eau Q se débite dans l'unité de temps par l'ouverture libre convenablement déterminée à cet effet.

Fig. 26.



Pour que la vanne reste en équilibre, la ligne AB s'appuie contre une courbe fixe CC'C", et la résultante des actions exercées tant par les pressions de l'eau que par la pesanteur passe au point de contact actuel C. Lorsque le niveau s'abaisse et vient en N', la pression totale doit également s'abaisser, et la vanne bascule pour prendre une autre position d'équilibre A'B', en s'appuyant sur un autre point C' de la courbe fixe. Le point B se relève en B', ce qui augmente la section d'écoulement. On conçoit donc que si la courbe CC'C" a été convenablement tracée, l'augmentation de hauteur de l'orifice puisse compenser l'abaissement du niveau, et que la dépense reste toujours la même. En appelant l la largeur du pertuis, y la hauteur du point B' au-dessus du fond FF, Y la hauteur du niveau N' au-dessus de la même horizontale, m le coefficient de dépense applicable dans le cas actuel, on aurait, pour exprimer l'invariabilité de la dépense (nº 28),

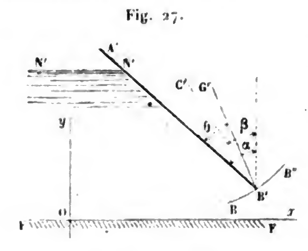
$$(3) \qquad Q = mly\sqrt{2g\left(Y - \frac{1}{2}y\right)},$$

équation d'où l'on déduirait les valeurs de Y correspondantes à celles de y, ou inversement. La condition à remplir pour que l'appareil fonctionne convenablement peut en conséquence être ainsi posée : le niveau de l'eau étant descendu en N', à la hauteur Y au-dessus du fond FF, on fait rouler la ligne AB de la vanne sur la courbe fixe CC'C" jusqu'à ce que le point B vienne en B', à la hauteur y au-dessus de FF, de manière à satisfaire à l'équation (3); on demande quelle doit être la courbe CC'C" pour que la résultante des pressions de l'eau et du poids de la vanne passe au point

de contact de A'B' (position nouvelle de AB après le roulement), avec cette courbe.

La mise en équation du problème se fait au moyen de procédés analogues à ceux qui ont été employés au n° 40. Soit, en effet (*fig.* 27), BB'B" la courbe décrite par le point B; la question serait résolue si l'on connaissait cette courbe et l'inclinaison α de A'B' sur la verticale pour chaque position B' du point décrivant. Il serait facile d'en déduire le lieu des centres instantanés de rotation C' par rapport à la ligne mobile A'B', et le lieu analogue dans le plan fixe; on aurait ainsi les deux courbes qui, roulant l'une sur l'autre, produiraient le mouvement de la ligne A'B'. Les inconnues principales que nous adopterons seront donc l'angle α et les coordonnées x, y du point B' relativement à deux axes Ox, Oy, l'un coïncidant avec la ligne du fond FF, l'autre vertical. Le centre instantané de rotation C' de A'B' se trouve sur la normale B'C' à la courbe BB'B", à une distance $\overline{B'C'} = \frac{ds}{d\alpha}$, ds étant l'élément de cette courbe, qui répond au changement $d\alpha$ d'inclinaison à partir de A'B' : nous devons par conséquent égaler à zéro la somme des moments des forces relativement à C'.

Fig. 27.



Or, si l'on admet pour simplifier que les pressions varient suivant la loi hydrostatique, la pression totale de l'eau est appliquée normalement à A'B', au tiers de la longueur $\overline{B'N'}$ à partir de B'; son intensité est exprimée par $\Pi l.\overline{B'N'}.\frac{1}{2}(Y-y)$ ou par $\frac{1}{2}\Pi l\frac{(Y-y)^2}{\cos\alpha}$, Π désignant le poids du mètre cube d'eau et l la largeur de la vanne; la distance de cette force au centre C' est d'ailleurs égale à la projection de $\overline{B'C'}$ sur A'B', moins $\frac{1}{3}\overline{B'N'}$; donc en appelant β l'angle de B'C' avec la verticale, son moment s'exprimera par

$$\frac{1}{2}\Pi l\frac{(Y-y)^2}{\cos\alpha}\left[\frac{ds}{d\alpha}\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{3}\frac{Y-y}{\cos\alpha}\right],$$

ou bien, à cause de $\cos\beta = \frac{dx}{ds}$, $\sin\beta = \frac{dy}{ds}$, par

$$\frac{1}{2}\Pi l\frac{(Y-y)^2}{\cos\alpha}\left(\frac{dx}{d\alpha}\cos\alpha+\frac{dy}{d\alpha}\sin\alpha-\frac{1}{3}\frac{Y-y}{\cos\alpha}\right).$$

Le moment, par rapport au même point C′ du poids P de la vanne, appliqué en son centre de gravité G′, sera égal à ce poids multiplié par la différence entre les projections horizontales de $\overline{B'C'}$ et de $\overline{B'G'}$, soit à

$$P\left[\overline{B'C'}\sin\beta - \overline{B'G'}\sin(\alpha - G'B'A')\right],$$

soit enfin, en posant les constantes $\overline{B'G'} = a$, $G'B'A' = \theta$,

$$P\left[\frac{dy}{d\alpha} - a\sin(\alpha - \theta)\right].$$

Donc on a la relation

$$(4)\qquad \frac{1}{2}\Pi l\frac{(Y-y)^2}{\cos\alpha}\left(\frac{dx}{d\alpha}\cos\alpha + \frac{dy}{d\alpha}\sin\alpha - \frac{1}{3}\frac{Y-y}{\cos\alpha}\right) = P\left[\frac{dy}{d\alpha} - a\sin(\alpha - \theta)\right].$$

On pourrait substituer à la place de Y sa valeur tirée de l'équation (3), et l'on aurait finalement une relation unique entre les inconnues x, y, α, ce qui montre que le problème est encore indéterminé.

Malheureusement, même en profitant de l'indétermination pour simplifier l'équation (4) par des hypothèses particulières, il est encore fort difficile d'arriver à deux relations, sous forme finie, entre x, y et α. Aussi laisserons-nous là cette étude théorique pour indiquer un procédé graphique approximatif.

Nous admettrons, comme M. Chaubart, que pendant le déplacement de la vanne la droite AB doit rouler sur une certaine courbe, qu'il s'agit de déterminer de manière à satisfaire à la condition essentielle du problème. D'abord le point initial C de cette courbe (*fig.* 26) sera connu en prenant l'intersection de AB avec la résultante R du poids de la vanne et des pressions de l'eau. Imaginons ensuite que la droite AB subisse un petit déplacement et vienne en A′B′; dans ce mouvement elle aura tourné autour d'un centre instantané de rotation variable entre C et C′, et par suite on peut approximativement supposer que sa rotation totale s'est effectuée autour de D, point de rencontre des tangentes DC et DC′ à la courbe CC′. Ce point n'étant pas connu, on le prend, au sentiment, un peu au-dessous de C, et l'on fait tourner la ligne AB d'un petit angle autour du centre D; dans cette nouvelle position, l'extrémité B, venue en B′, étant à une hauteur y au-dessus du fond FF, on calcule Y par l'équation (3), puis on construit la nouvelle résultante R′ du poids et des pressions et l'on cherche son intersection C′ avec la nouvelle position de AB. On reconnaît que le point D, autour duquel on a fait tourner AB, a été bien choisi, s'il est à peu près à la même distance de C′ et de C; si cela n'a pas lieu, on modifie le point D primitivement adopté, et un second essai donne, avec une approximation suffisante, la ligne A′B′ ainsi que le second point C′ de la

courbe cherchée. De celui-là on passera de même à un autre, et ainsi de suite; la courbe CC'C" se trouve donc dessinée par points ou par une série de tangentes telles que AB, A'B', etc.

Les deux systèmes de vannes que nous venons de décrire ont été expérimentés sur le canal latéral de la Garonne, et ont donné des résultats très-satisfaisants, pour lesquels l'inventeur a reçu les encouragements de l'Administration supérieure. Il semble donc que ces systèmes peuvent être utilement employés dans le service des canaux de navigation et d'irrigation, ainsi que dans le règlement des niveaux des biefs d'usine.

CHAPITRE TROISIÈME.

ÉCOULEMENT PERMANENT DE L'EAU DANS LES TUYAUX DE CONDUITE.

§ I. — Étude théorique du mouvement rectiligne et uniforme d'un liquide pesant et homogène, dans un tuyau cylindrique à section circulaire.

42. *Évaluation des forces produites par la viscosité du liquide.*— Une expérience bien simple permet de constater que la viscosité produit des forces retardatrices, quand un liquide s'écoule par un tuyau : il suffit d'adapter à un orifice, percé dans un réservoir, un tuyau de diamètre constant, mais de longueur variable, dont l'extrémité libre déboucherait dans l'atmosphère toujours au même niveau. Si le niveau du réservoir est en outre maintenu à une hauteur et à une pression constantes, et si la pression atmosphérique ne change pas non plus, on voit alors la dépense diminuer en même temps que la longueur du tuyau va en augmentant. La seule explication plausible de ce fait, c'est qu'il existe, entre le liquide et les parois solides qui le contiennent, une certaine adhérence qui s'oppose au mouvement, et que cette force est une fonction croissante de la longueur du tuyau. Mais il ne suffit pas d'admettre l'existence de cette action résistante : en effet, tous les phénomènes physiques tendent à prouver que les attractions ou répulsions moléculaires ne s'exercent qu'à des distances insensibles; la résistance des parois solides ne doit donc se faire sentir directement que sur une couche contiguë de liquide, ayant une épaisseur presque nulle, et par conséquent elle ne peut altérer la dépense que d'une fraction excessivement petite. Comme, au contraire, l'altération est en réalité très-notable, on est forcé de reconnaître que les différentes couches fluides concentriques, dans lesquelles on peut décomposer le liquide remplissant le tuyau, ne se meuvent pas les unes sur les autres sans

qu'il y ait une force opposée à leur glissement réciproque. Ainsi, la couche extérieure est retardée par son adhérence à la paroi; la couche qui vient après est retardée par la première, la troisième par la seconde, et ainsi de suite; d'où il résulte immédiatement, à cause du principe de la réaction égale à l'action, que la seconde couche entraîne la première, la troisième entraîne la seconde, etc. : en d'autres termes, quand on traverse les couches de la circonférence au centre, on voit chacune d'elles retardée par celle qui la précède et entraînée par celle qui la suit, de manière toutefois à supporter de la part de ces deux couches une force résultante en sens contraire du mouvement.

Quand un liquide se meut dans un tuyau cylindrique à génératrices droites, il n'est pas certain pour cela que le mouvement des diverses molécules sera rectiligne; ce mouvement serait même certainement curviligne aux environs du point où le tuyau communique avec le réservoir, s'il n'y avait pas là un évasement parfait. Mais nous admettrons ici qu'il s'agit d'une portion de tuyau cylindrique à section circulaire, dans laquelle il y a un mouvement permanent rectiligne, chaque vitesse étant parallèle à l'axe : ainsi qu'on l'a vu au n° **18**, cela entraîne comme conséquence immédiate que la vitesse de chaque molécule est constante, c'est-à-dire que le mouvement est aussi uniforme. Dans ces circonstances, quelles sont les forces mises en jeu par la viscosité du liquide ?

D'abord, si l'on consulte l'expérience, en mesurant les vitesses de divers filets au moyen d'instruments dont il sera question plus loin, on reconnaît que pour une même couche concentrique au tuyau les vitesses des molécules sont égales, et que les vitesses sont croissantes d'une couche à l'autre quand on va de la circonférence au centre. Il en résulte que ces différentes couches sont comme des cylindres solides glissant les uns dans les autres, à la manière des tuyaux qui composent une lunette, et l'on conçoit par suite que leur adhérence réciproque donne lieu à des forces analogues au frottement et parallèles à l'axe des cylindres. Nous connaissons donc déjà, par cette considération, la direction des forces à évaluer.

L'expérience montre encore que, dans certaines limites, les forces dont nous nous occupons sont indépendantes de la pression du fluide, au point où elles s'exercent. Ainsi, Dubuat ayant fait communiquer deux bassins par un tuyau, reconnut que le volume d'eau qui s'écoulait de l'un à l'autre restait toujours le même, pourvu que leur différence de niveau et la différence des pressions à la surface de chacun d'eux ne changeassent pas, quoique la pression dans un point quelconque du tuyau fût variable d'une expérience à l'autre, comme on le constaterait aisément au moyen de tubes piézométriques. Ce résultat a été confirmé par les expériences plus récentes de M. Darcy, qui a eu soin de faire varier les pressions absolues entre des limites beaucoup plus écartées l'une de l'autre que ne l'avait fait Dubuat. S'il en est ainsi, la résistance opposée au glissement du liquide, par un élément de paroi solide, rapportée à l'unité de surface, ne doit plus être fonction que de la vitesse de glissement, c'est-à-dire de la vitesse des molécules formant la couche liquide extérieure ; cette fonction peut d'ailleurs varier d'un liquide à un autre et d'un tuyau à un autre, suivant leur constitution intime. Quant à la résistance au glissement réciproque de deux couches fluides en contact, on est porté à croire (n° 14) qu'elle doit être proportionnelle à une certaine puissance de la vitesse relative de ces deux couches, qui serait la première d'après Navier, et la seconde d'après M. Darcy. On remarquera d'ailleurs que si l'on désigne par v la vitesse d'une couche quelconque située à la distance r de l'axe, et par Δr la distance très-petite qui sépare les milieux des épaisseurs des deux couches, la vitesse relative en question sera exprimée par $\frac{dv}{dr}\Delta r$; et comme Δr doit être supposé constant quand il s'agit de comparer les adhérences de divers groupes de deux couches, on voit que la résistance en question, rapportée au mètre carré, pour chaque élément de surface commun à deux couches contiguës, est proportionnelle à $\frac{dv}{dr}$ ou à $\left(\frac{dv}{dr}\right)^2$ suivant qu'on admet la théorie de Navier ou celle de M. Darcy. Le coefficient de la proportionnalité varie probablement d'un liquide à l'autre ; et même quand il ne s'agit

que de l'eau, M. Darcy pense qu'il varie également avec la température et avec le rayon du tuyau (*).

En résumé, si nous appelons

W la vitesse des molécules qui glissent le long des parois du tuyau,

v la vitesse des molécules appartenant à la couche de rayon r concentrique au tuyau;

toutes les inductions qu'on peut tirer des faits d'expérience nous conduisent

1°. A représenter l'adhérence à la paroi, par mètre carré, par une fonction f de la vitesse W, soit $f(\mathrm{W})$;

2°. A exprimer la cohésion de deux couches contiguës, également rapportée au mètre carré, par $\varepsilon\left(\frac{dv}{dr}\right)^m$, m étant un exposant égal à 1 ou à 2, et ε une constante pour un même tuyau.

Nous nous bornerons pour le moment à ces indications, qui sont suffisantes pour traiter le problème ci-après.

43. *Loi de la distribution des vitesses dans la section transversale du tuyau.* — Dans une même section transversale la pression varie suivant la loi hydrostatique (n° 18, 4ᵉ règle), et par conséquent on peut ajouter que le niveau piézométrique y est le même pour tous les points, puisque la différence de hauteur des colonnes doit égaler la différence de niveau de leurs bases; connaissant ce niveau pour deux sections AB, CD (*fig.* 28), ou plutôt l'abaissement du niveau piézométrique entre ces mêmes sections, nous nous proposons de trouver la vitesse de l'un quelconque des filets

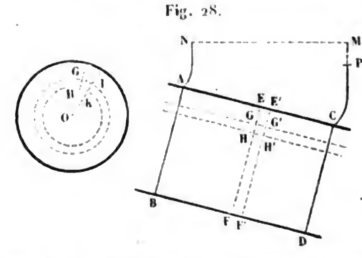
(*) Cette influence du rayon du tuyau sur la viscosité de l'eau est un fait assez inattendu dont il est difficile de donner à priori une explication satisfaisante. Sans doute, comme l'observe M. Darcy, l'hypothèse d'un mouvement par couches concentriques à l'axe du tuyau n'est jamais réalisée rigoureusement; les aspérités de la paroi donnent naissance à des mouvements gyratoires plus ou moins irréguliers, pour les molécules voisines. Mais alors il semblerait naturel que cet effet eût une influence relativement plus forte dans les petits tuyaux que dans les grands, tandis que M. Darcy conclut le contraire. Il suppose les forces produites par la viscosité proportionnelles au carré du rayon.

Peut-être de nouvelles expériences sont-elles encore à désirer pour qu'il ne subsiste plus aucun doute à ce sujet.

fluides, dont chacun se meut uniformément, par hypothèse, suivant une ligne droite parallèle à l'axe du tuyau.

Soient N et P les deux niveaux piézométriques en AB et CD, et par conséquent $\overline{MP}$ la charge d'une molécule entre deux positions extrêmes, l'une prise dans le plan AB, l'autre dans le plan CD; posons $\overline{MP} = \zeta$. La vitesse de la molécule étant constante, d'après le théorème de Bernoulli (n° 15) la charge ζ doit être égale à la perte de charge exprimée par $-\frac{1}{g}\int \varphi \cos\gamma ds$, suivant les notations du n° 15. Or les explications préliminaires du n° 42 montrent que γ est un angle de 180° dans le cas actuel, et de plus que φ est constant sur tout le parcours d'une molécule, car en chaque point de ce parcours φ dépend uniquement de la loi de variation des vitesses d'une couche à l'autre : donc on a la relation

Fig. 28.



$$(1) \qquad \zeta = \frac{\varphi L}{g},$$

L désignant la longueur $\overline{AC}$. On voit, par conséquent, que φ est le même pour toutes les molécules comprises dans le volume ABCD, puisque l'expression $\frac{g\zeta}{L}$ n'a rien qui appartienne à l'une plutôt qu'à l'autre. Donc φ peut encore se calculer en prenant la force totale que la viscosité produit pour le volume fini ABCD et la divisant par la masse de ce volume. Or la force totale dont il s'agit est simplement celle qui s'exerce sur la surface de la paroi, car les réactions mutuelles des couches se composent de forces égales deux à deux et de sens contraire; sa valeur, rapportée au mètre carré, s'exprime par $f(W)$, W étant la vitesse à la paroi (n° 42); d'où il suit que si l'on appelle R le rayon du tuyau, son intensité totale sera $2\pi RL.f(W)$; comme d'ailleurs la masse ABCD est égale au volume $\pi R^2 L$ multiplié par le poids Π du mètre cube de liquide et divisé par g, on a

$$(2) \qquad \varphi = \frac{2\pi RL.f(W)}{\pi R^2 L} \cdot \frac{g}{\Pi} = \frac{2g}{\Pi R} f(W),$$

équation qui, combinée avec (1), donne

$$\frac{R\zeta}{2L} = \frac{1}{\Pi} f(W).$$

Si l'on connaissait la fonction f, cette équation ne contiendrait plus que l'inconnue W, et servirait par conséquent à la déterminer.

Nous remarquerons en passant que si l'on nomme L' la longueur qui sépare deux sections transversales entre AB et CD, ζ' la charge correspondante, on aurait, d'après ce qui a été dit tout à l'heure,

$$\zeta' = \frac{\varphi L'}{g},$$

φ conservant la même valeur que dans l'équation (1). Donc $\frac{\zeta'}{L'} = \frac{\zeta}{L}$, c'est-à-dire qu'en passant de AB à CD, le niveau piézométrique descend uniformément. Cette observation permet de trouver aisément le niveau piézométrique correspondant à une section quelconque, et par suite la pression en tout point du volume ABCD.

Maintenant nous allons chercher une troisième expression de φ, qui nous permettra de trouver la loi suivant laquelle les vitesses varient d'une couche à l'autre. Pour cela, soient EF, E'F' deux sections infiniment voisines séparées par une distance ds, dont l'une EF est représentée à part; divisons cette surface en éléments infiniment petits par des cercles concentriques et par des rayons; soit GHIK l'un de ces éléments, défini par les rayons $\overline{OH} = r$, $\overline{OG} = r + dr$, et par l'angle $HOK = d\alpha$; soient enfin v et $v + dv$ les vitesses en H et G. Le quadrilatère infinitésimal GHIK est la base d'un prisme GHG'H', dont le volume et la masse ont respectivement pour valeurs $r\,d\alpha\,dr\,ds$ et $\frac{\Pi}{g} r\,d\alpha\,dr\,ds$. Ce prisme ne supporte le frottement des couches voisines que sur les faces projetées en HK et GI, car les autres faces sont à l'intérieur d'une même couche d'égale vitesse, qui se meut sans se déformer; sur HK, ce frottement est (n° 42) par unité de surface $\varepsilon\left(\frac{dv}{dr}\right)^m$, et comme il s'exerce sur la surface $r\,d\alpha\,ds$, il a pour intensité totale $\varepsilon r\,d\alpha\,ds\left(\frac{dv}{dr}\right)^m$; il tend d'ailleurs à entraîner le prisme GHG'H' dans le sens du mouvement, en sorte que la dérivée $\frac{dv}{dr}$ étant négative, puisque v décroît quand r augmente, on pourra l'exprimer par

$$\varepsilon r\,d\alpha\,ds\left(-\frac{dv}{dr}\right)^m,$$

quel que soit m, pourvu qu'on prenne pour sens positif celui de la vitesse v. Sur GI on aura pareillement une force de sens contraire, égale à la précédente augmentée de sa différentielle par rapport à r : la force totale due à la viscosité pour l'élément de volume GHG'H' sera donc, en

valeur absolue,

$$\varepsilon\, d\alpha\, ds . \frac{d}{dr}\left[r\left(-\frac{dv}{dr}\right)^m\right] dr.$$

Donc on a

$$(4) \qquad \varphi = \frac{\varepsilon\, d\alpha\, ds . \frac{d}{dr}\left[r\left(-\frac{dv}{dr}\right)^m\right] dr}{\frac{\Pi}{g}\, r\, d\alpha\, ds\, dr} = \frac{\varepsilon g}{\Pi r}\,\frac{d}{dr}\left[r\left(-\frac{dv}{dr}\right)^m\right].$$

Les équations (1) et (4) donnent aisément, par l'élimination de φ,

$$\frac{\Pi\zeta}{\varepsilon L} r = \frac{d}{dr}\left[r\left(-\frac{dv}{dr}\right)^m\right];$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\frac{1}{2}\,\frac{\Pi\zeta}{\varepsilon L} r^2 = r\left(-\frac{dv}{dr}\right)^m,$$

sans constante dans le premier membre, puisque le second s'annule pour $r = 0$. On a par suite

$$-\frac{dv}{dr} = \left(\frac{\Pi\zeta}{2\varepsilon L}\right)^{\frac{1}{m}} r^{\frac{1}{m}};$$

une seconde intégration donnera donc

$$-v = \left(\frac{\Pi\zeta}{2\varepsilon L}\right)^{\frac{1}{m}} \frac{r^{\frac{1}{m}+1}}{\frac{1}{m}+1} + \text{const.},$$

soit, en nommant V la vitesse du filet central qui correspond à $r = 0$,

$$(5) \qquad v = V - \frac{m}{m+1}\left(\frac{\Pi\zeta}{2\varepsilon L}\right)^{\frac{1}{m}} r^{\frac{m+1}{m}}.$$

L'équation (5) doit donner la vitesse W à la paroi, en y faisant $r = R$; ainsi nous poserons

$$(6) \qquad W = V - \frac{m}{m+1}\left(\frac{\Pi\zeta}{2\varepsilon L}\right)^{\frac{1}{m}} R^{\frac{m+1}{m}}.$$

Cette relation déterminera V en fonction de W que nous connaissons déjà; puis V étant connu, l'équation (5) donnerait la vitesse d'un filet quelconque.

L'ensemble des deux dernières équations fournit encore la suivante :

$$(7) \qquad \frac{V - v}{V - W} = \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{m+1}{m}},$$

qui exprime aussi la loi des vitesses dans une même section transversale. Or M. Darcy ayant constaté dans plusieurs séries d'expériences, et par une mesure directe des vitesses, les valeurs du rapport $\frac{V-v}{V-W}$, a reconnu que l'égalité (7) était convenablement satisfaite en posant

$$\frac{m+1}{m}=\frac{1}{2};$$

d'où résulte la valeur adoptée par lui

$$m=2.$$

D'après les conceptions purement hypothétiques de Navier, il faudrait prendre $m=1$; par suite l'équation (7) deviendrait

$$\frac{V-v}{V-W}=\left(\frac{r}{R}\right)^2,$$

soit encore

$$v=V-(V-W)\frac{r^2}{R^2};$$

ce qui montre que les vitesses décroîtraient, à partir du filet central, comme les ordonnées d'un paraboloïde de révolution ayant même axe que le tuyau.

44. *Vitesse moyenne.* — On appelle vitesse moyenne dans une section celle qui, multipliée par l'aire de la section, donnerait le débit. Si nous conservons les notations du n° 43, le débit par l'élément de surface GHIK (*fig.* 28) sera $vr\,d\alpha\,dr$, et par conséquent le débit total Q s'exprimera par

$$Q=\int\int vr\,d\alpha\,dr,$$

v étant une fonction de la seule variable r, définie par l'une des équations (5) ou (7). D'un autre côté, l'aire totale de la section est πR^2; donc, pour déterminer la vitesse moyenne U, on devra poser

$$\pi R^2 U=\int\int vr\,d\alpha\,dr.$$

L'intégrale double doit être étendue à tous les éléments, tels que GHIK; on peut prendre d'abord tous ceux qui sont entre les circonférences OH, OG; pour ceux-là r et v sont constants, de sorte que l'intégration relativement à la variable α, entre les limites 0 et 2π, nous donnera

$$\pi R^2 U=\int_0^R 2\pi vr\,dr.$$

Supprimant ensuite le facteur commun π, remplaçant v par sa valeur tirée de l'équation (7), nous aurons

$$R^2 U = 2\int_0^R \left[V - (V - W)\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{m+1}{m}} \right] r\,dr,$$

soit, après avoir effectué l'intégration,

$$R^2 U = R^2 V - \frac{2m}{3m+1}(V - W)\frac{R^{\frac{3m+1}{m}}}{R^{\frac{m+1}{m}}},$$

ou enfin

$$(8) \qquad U = V - \frac{2m}{3m+1}(V - W).$$

Lorsqu'on fait $m = 1$, il en résulte

$$U = \frac{1}{2}(V + W),$$

c'est-à-dire que la vitesse moyenne est la moyenne des vitesses extrêmes; si $m = 2$, on obtient

$$U = \frac{3}{7}V + \frac{4}{7}W = \frac{1}{2}(V + W) - \frac{1}{14}(V - W),$$

valeur un peu différente.

Si l'on veut savoir à quelle distance r' du centre se trouvent les filets qui possèdent la vitesse moyenne, on remarquera que l'équation (8) peut s'écrire

$$\frac{V - U}{V - W} = \frac{2m}{3m+1};$$

d'un autre côté l'équation (7) nous aurait donné, en y faisant $v = U$, $r = r'$,

$$\frac{V - U}{V - W} = \left(\frac{r'}{R}\right)^{\frac{m+1}{m}}.$$

On a donc, pour déterminer r',

$$\left(\frac{r'}{R}\right)^{\frac{m+1}{m}} = \frac{2m}{3m+1};$$

d'où l'on tire

$$(9) \qquad r' = \left(\frac{2m}{3m+1}\right)^{\frac{m}{m+1}} R.$$

Le rapport $\frac{r'}{R}$ est égal à $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ou à $0,707$ quand $m = 1$; pour $m = 2$,

il change peu et devient $\sqrt{\frac{16}{49}}$ ou 0,689 environ. Si l'on faisait encore m successivement égal à

$$3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\ldots,\quad \infty,$$

on aurait pour valeurs correspondantes de $\frac{r'}{R}$ les nombres

$$0,682,\quad 0,678,\quad 0,676,\quad 0,674,\ldots,\quad 0,667.$$

Ainsi, quelque valeur qu'on attribue à l'exposant m entre 1 et ∞, le filet qui possède la vitesse moyenne est toujours à une distance du centre comprise entre les $\frac{2}{3}$ et les 0,707 du rayon du tuyau; mais vraisemblablement $\frac{r'}{R}$ se rapproche plus de ce dernier nombre, eu égard aux indications théoriques et expérimentales qui tendent à faire prendre m dans le voisinage de 1 ou 2.

45. ***De la détermination expérimentale du coefficient de viscosité ε et de la fonction $f(W)$.*** — Dans une série d'expériences, on pourrait faire varier les quantités R et $\frac{\zeta}{L}$, en opérant toujours sur le même liquide, de manière à laisser Π constant; on mesurerait les vitesses V et W correspondantes à des valeurs données de ces deux variables. Cela posé, l'équation (6), dans laquelle on mettrait pour V et W les valeurs fournies par l'expérience, ne contiendrait plus comme inconnues que m et ε; deux expériences suffiraient donc à la rigueur pour les déterminer; un plus grand nombre d'expériences donnerait plus de certitude à cette détermination et permettrait de contrôler les hypothèses et inductions qui servent de base à la théorie. Quant à la fonction $f(W)$, l'équation (3) nous apprend qu'elle doit être égale à $\frac{1}{2}\Pi R\frac{\zeta}{L}$: on pourrait donc calculer sa valeur, correspondante à la valeur de W donnée par l'expérience, c'est-à-dire qu'on aurait la grandeur de la fonction pour chaque valeur de sa variable W. On pourrait ensuite essayer de la représenter analytiquement de diverses manières, par exemple au moyen d'un développement de la forme

$$a + bW + cW^2 + dW^3 + \ldots,$$

a, b, c, d étant des constantes.

M. Sonnet, dans un Mémoire qui avait principalement pour base les idées de Navier, en se fondant sur d'anciennes expériences citées par de Prony, a proposé pour l'eau les valeurs

$$m = 1, \quad \varepsilon = \frac{1}{3,2} \quad \text{et} \quad f(W) = 0,019\,W + 0,371\,W^2;$$

le mètre carré et le kilogramme étant pris pour unités, et la vitesse étant exprimée en mètres par seconde sexagésimale. Cette expression ne tient pas compte de la nature des parois, ce qui en rend la complète exactitude peu vraisemblable.

M. Darcy a été conduit, comme nous l'avons déjà dit, à faire $m = 2$; l'équation (6) devient alors

$$v = V - \frac{2}{3}\left(\frac{\Pi\zeta}{2\varepsilon L}\right)^{\frac{1}{2}} r^{\frac{3}{2}}.$$

Suivant le même ingénieur, le facteur $\frac{2}{3}\left(\frac{\Pi}{2\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$ n'est pas constant d'un tuyau à l'autre, mais varie en raison inverse du rayon R; on aurait donc

$$\frac{2}{3}\left(\frac{\Pi}{2\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{K}{R},$$

K étant un nombre constant, et par conséquent

$$\varepsilon = \frac{2}{9}\frac{\Pi R^2}{K^2}.$$

M. Darcy fixe à 1,74 la valeur de la constante $\frac{2\Pi}{9K^2}$ quand il s'agit de l'eau; on aurait donc définitivement, d'après lui, pour l'eau coulant uniformément dans un tuyau cylindrique à la température ordinaire,

$$\varepsilon = 1,74\,R^2.$$

Il ne s'est pas occupé de la fonction $f(W)$, parce que, suivant la méthode ordinairement usitée, dont nous allons maintenant nous occuper, il a représenté d'une autre manière la résistance qui s'exerce à la paroi.

§ II. — Formules pratiques relatives au mouvement permanent et uniforme de l'eau dans les conduites cylindriques simples à débit constant.

46. *Observations générales.* — La marche suivie dans le paragraphe précédent pour résoudre le problème de l'écoulement uniforme de l'eau dans les tuyaux cylindriques paraît assez rationnelle, et c'est dans son perfectionnement que pourrait consister, quant à présent, le progrès de la science hydraulique. A la vérité, nous n'avons considéré que le cas des tuyaux rectilignes; cependant on conçoit que si les tuyaux étaient composés de parties droites raccordées entre elles par des courbes d'assez grand rayon, les mêmes résultats pourraient encore être conservés comme donnant une approximation suffisante. Mais les formules que nous avons établies ont un autre inconvénient plus grave au point de vue pratique : c'est d'introduire dans les calculs deux vitesses V et W, l'une appartenant au filet central, l'autre aux filets en contact avec la paroi, tandis qu'on a seulement besoin de connaître en général la vitesse moyenne U, liée par une relation très-simple à la dépense Q, qui est ordinairement la donnée ou l'inconnue principale du problème. Il en résulterait une complication très-notable dans les calculs que les ingénieurs peuvent avoir à faire sur ce sujet, calculs déjà laborieux dans beaucoup de cas, malgré les simplifications qu'on a successivement introduites dans leur marche.

C'est pourquoi nous allons maintenant nous occuper exclusivement des méthodes pratiques, pour résoudre les questions que présente le mouvement de l'eau dans les tuyaux. Ces méthodes sont d'ailleurs consacrées par un long usage, et par conséquent on ne risque pas de s'égarer quand on les emploie.

47. *Expression du frottement contre la paroi, par unité de surface.* — La modification la plus essentielle de la théorie donnée au § I porte sur l'expression de la force retardatrice ou frottement exercé par le tuyau sur le liquide; au lieu de représenter cette force, rapportée à l'unité de surface, par une fonction de la vitesse à la paroi $f(W)$, nous la repré-

senterons, comme l'a d'abord fait de Prony, par une fonction de la vitesse moyenne F(U). Cela serait très-légitime si U était déterminé quand on donne W; car alors une fonction de W serait par cela même une fonction de U. Mais en éliminant V entre les équations (6) et (8) des n°s 43 et 44, on voit que la relation qui lie les quantités W et U contient d'autres variables, savoir le rayon R et le rapport $\frac{\Pi\zeta}{2\varepsilon L}$; de sorte que, même pour un tuyau unique conduisant toujours le même liquide, cette relation changerait avec $\frac{\zeta}{L}$. Il n'est donc pas tout à fait rationnel de chercher à représenter par F(U) la résistance dont il s'agit; et cependant, comme l'a dit M. Darcy, cette manière de procéder n'entraîne pas d'erreur sensible en pratique.

De Prony, s'appuyant sur 51 expériences de Couplet, Bossut et Dubuat, a proposé pour F(U) l'expression $\Pi(aU + bU^2)$, Π étant le poids du mètre cube d'eau exprimé en kilogrammes, et les deux constantes a, b ayant les valeurs ci-après :

$$a = 0,0000173, \qquad b = 0,000348.$$

Plus tard, Eytelwein et d'Aubuisson ont indiqué pour ces coefficients a et b d'autres valeurs, savoir :

$$a = 0,0000222, \qquad b = 0,000280 \quad \text{(Eytelwein)};$$
$$a = 0,0000188, \qquad b = 0,000343 \quad \text{(d'Aubuisson)}.$$

D'autres personnes, pour simplifier les calculs, ont encore proposé de supprimer le terme aU dans le binôme $aU + bU^2$; le coefficient a, donné par de Prony, n'est guère en effet que $\frac{1}{20}$ de b, en sorte que si U n'est pas très-petit, on ne commet pas ainsi d'erreur bien notable. D'ailleurs, comme le fait observer M. l'inspecteur général Dupuit (*), lorsque U est petit le frottement des parois est lui-même très-petit, et il est rare dans les applications qu'il soit alors utile de l'évaluer avec une complète exactitude; en outre, quelque coefficient que l'on

(*) *Traité théorique et pratique de la conduite et de la distribution des eaux.*

adopte, il peut se trouver en défaut dans certains cas particuliers : il est donc bon de procéder ici, dans une juste mesure, comme on le fait dans les calculs sur la résistance des matériaux, en évaluant largement le nombre b, pour être à l'abri des éventualités. Ainsi M. Dupuit n'hésite pas à poser une formule qui revient à prendre

$$a = 0, \quad b = 0{,}0003855;$$

en adoptant ainsi une valeur de b un peu plus forte que celles données ci-dessus, on compense jusqu'à un certain point la suppression du terme aU.

M. Barré de Saint-Venant a reconnu que les résultats des 51 expériences dont s'était servi de Prony pouvaient être assez bien représentés en remplaçant le binôme $aU + bU^2$ par un monôme cU^m; il a indiqué pour m et c les valeurs

$$m = \frac{12}{7}, \quad c = 0{,}0002955.$$

Enfin, M. Darcy, par ses belles recherches expérimentales sur l'écoulement de l'eau dans les tuyaux, que nous avons déjà citées plusieurs fois, a montré :

1°. Que lorsqu'il s'agit de tuyaux neufs, le frottement de l'eau contre les parois varie considérablement avec la nature et le poli des surfaces; ainsi la fonte neuve donnerait lieu à un frottement une fois et demie égal à celui qui aurait lieu sur une surface en bitume ;

2°. Que la nature de la surface tend à perdre son influence à mesure que les tuyaux se recouvrent d'une couche de dépôts amenés par l'eau elle-même ; que cette circonstance, dans le cas de la fonte, donne lieu à un frottement deux fois plus grand que lorsque le tuyau était neuf (*) ;

(*) En réalité, M. Darcy a déterminé ses coefficients pour les tuyaux de fonte neuve; il a ensuite admis (peut-être sur la foi d'un trop petit nombre d'expériences) que l'existence de dépôts dans des tuyaux de nature quelconque devait faire doubler ces coefficients. Nous nous en tenons cependant à cette conclusion, parce qu'elle conduit à évaluer la résistance due au frottement plus haut qu'on ne le fait en général, ce qui peut éviter des mécomptes dans les applications pratiques.

3°. Que le frottement par unité de surface peut être représenté par $\Pi(aU + bU^2)$; mais que dans les tuyaux qui ont quelque temps d'usage on peut se contenter du monôme $\Pi b_1 U^2$, le nombre b_1 variant seulement avec le rayon R du tuyau, tandis que a et b varieraient en outre avec la nature des surfaces si les tuyaux étaient neufs ;

4°. Que les coefficients a, b, b_1 peuvent être calculés par les relations suivantes, dans le cas de tuyaux recouverts de dépôts :

$$(1) \qquad a = 0{,}000\,032 + \frac{0{,}000\,000\,003\,76}{R^2},$$

$$(2) \qquad b = 0{,}000\,443 + \frac{0{,}000\,006\,2}{R},$$

$$(3) \qquad b_1 = 0{,}000\,507 + \frac{0{,}000\,006\,47}{R}.$$

Pour la fonte neuve, il faudrait diminuer les nombres a et b environ de moitié.

Comme en pratique il faut toujours compter sur l'existence de dépôts au bout d'un temps plus ou moins long, on voit qu'en définitive on peut adopter le monôme $b_1 U^2$ au lieu du binôme $aU + bU^2$; seulement il paraît que ce nombre b_1 varie avec le rayon du tuyau, contrairement à l'opinion de Prony, et qu'il est plus grand pour les petits tuyaux que pour ceux d'un calibre assez fort. Toutefois il faut dire que ces variations ne sont pas considérables quand on ne prend que les tuyaux analogues à ceux qu'on peut rencontrer dans les distributions d'eau : les rayons au-dessous de $0^m,03$ n'y sont en effet employés que sur de faibles longueurs, en quelque sorte exceptionnellement, et il n'existe guère de tuyaux au-dessus de $0^m,50$ de rayon. Voici entre ces limites extrêmes les valeurs de b_1 :

Rayons R.	b_1.
m	
0,03	0,000 723
0,04	0,000 669
0,05	0,000 636
0,06	0,000 615
0,08	0,000 558
0,10	0,000 572
0,15	0,000 550
0,20	0,000 539
0,25	0,000 533
0,30	0,000 529
0,40	0,000 523
0,50	0,000 520

La moyenne entre les valeurs extrêmes de ce tableau est à peu près $(0,025)^2$ soit 0,000625, nombre que l'on pourra adopter quand on aura besoin d'une expression analytique très-simple de la fonction F (U); dans les autres cas il serait mieux de recourir à l'expression (3) de b_1, ou au tableau précédent.

Nous allons maintenant examiner quelques problèmes auxquels peut donner lieu l'écoulement permanent et uniforme de l'eau dans les conduites cylindriques simples à débit constant. Nous appellerons conduites *cylindriques* celles dont la section transversale est constante, le profil longitudinal pouvant d'ailleurs présenter des accidents quelconques, pourvu que les alignements dont il est composé se raccordent par des courbes assez adoucies; une conduite sera dite *simple*, si aucune autre conduite ne s'embranche sur elle entre les points extrêmes; enfin elle est *à débit constant* quand il n'y a pas d'orifice percé sur elle dans son parcours. Nous désignerons toujours, dans nos calculs, par

D le diamètre constant de la section transversale;

L la longueur du tuyau;

ζ la charge entre les sections extrêmes, laquelle est aussi la perte de charge dans le même intervalle, puisque la vitesse ne varie pas;

J le quotient $\frac{\zeta}{L}$, c'est-à-dire la charge ou perte de charge par mètre courant de conduite;

Q le débit par seconde qui s'écoule par une section transversale quelconque;

U la vitesse moyenne, également constante pour toutes les sections, puisqu'elle est égale au quotient $\frac{Q}{\frac{1}{4}\pi D^2}$.

48. *Relations entre les quatre quantités* D, J, U, Q. — Si nous répétions sans aucune modification les raisonnements par lesquels a été démontrée l'équation (3) du n° 43, en ayant soin seulement de remplacer R par $\frac{1}{2}$ D et $f(W)$ par F(U), nous trouverions

$$\frac{1}{4} D \frac{\zeta}{L} = \frac{1}{\Pi} F(U),$$

ou bien encore

$$(4) \qquad \frac{1}{4} DJ = \frac{1}{\Pi} F(U).$$

D'un autre côté, par la définition même de la vitesse U, l'on a

$$(5) \qquad \frac{1}{4} \pi D^2 U = Q.$$

Les relations (4) et (5) entre les quantités D, J, U, Q, permettent de résoudre tous les problèmes dans lesquels, donnant deux de ces quantités, on demande les deux autres. Ces problèmes seraient au nombre de six; on les a indiqués dans le tableau ci-après :

Données.	Inconnues.
D, J;	U, Q;
D, U;	J, Q;
D, Q;	J, U;
J, U;	D, Q;
J, Q;	D, U;
U, Q;	D, J.

Nous nous bornerons à examiner avec détail le premier et le cinquième, qui se rencontrent fréquemment dans la pratique.

49. Problème. *Connaissant le diamètre d'une conduite, ainsi que la charge par mètre courant, déterminer la vitesse et la dépense.* — On connaît J et D, on demande U et Q. La relation (4) ci-dessus, dans laquelle tout est connu excepté U, fournira cette inconnue; puis U étant calculé, Q s'obtiendra par la relation (5).

Dans les idées de Prony, Eytelwein et autres, F (U) était une fonction de U seulement, et ces auteurs ont donné des tables à simple entrée, indiquant les valeurs de $\frac{1}{\Pi}$ F (U) pour une série de valeurs de U. Avec une telle table le calcul de U est on ne peut plus simple. Il suffit de faire le produit $\frac{1}{4}$ DJ, et de chercher le nombre égal à ce produit dans la colonne $\frac{1}{\Pi}$ F (U); en regard se trouve la valeur de U.

Suivant M. Darcy, F (U) est à la fois fonction de U et de D (n° 47); il faudrait donc, pour suivre une marche analogue, avoir une table à double entrée dont les arguments seraient U et D, ou bien, ce qui revient au même, une série de tables simples comme celles de Prony, dont chacune serait relative à un diamètre déterminé. Dans chaque problème on prendrait celle qui convient au diamètre donné; rien ne serait d'ailleurs changé à ce qui vient d'être dit. Si l'on voulait traiter la question par l'analyse, on poserait

$$(6) \qquad \frac{1}{4}\mathrm{DJ} = b_1 \mathrm{U}^2 = \left(0,000507 + \frac{0,00001294}{\mathrm{D}}\right)\mathrm{U}^2,$$

d'où

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{DJ}}{0,000507 + \frac{0,00001294}{\mathrm{D}}}}$$

ou bien encore

$$(7) \qquad \mathrm{U} = 22,2\sqrt{\frac{\mathrm{DJ}}{1 + \frac{0,0255}{\mathrm{D}}}} = 22,2\,\mathrm{D}\sqrt{\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{D} + 0,0255}}.$$

En adoptant la valeur moyenne $b_1 = 0,000625 = (0,025)^2$, on

aurait

$$\frac{1}{4}\,DJ = (0,025)^2\,U^2,$$

et par suite

$$(8)\qquad U = 20\sqrt{DJ}.$$

Les équations (7) et (8) s'accordent quand on fait $D = 0^m,11$; pour les diamètres plus faibles, on a $U < 20\sqrt{DJ}$, et pour les diamètres plus forts $U > 20\sqrt{DJ}$. L'erreur relative sur U, commise en prenant toujours $U = 20\sqrt{DJ}$ est d'environ 7 pour 100 si $D = 0^m,06$, et 9 pour 100 si $D = 1^m,00$.

Lorsque la vitesse U sera calculée, la relation (5) donnera aisément la dépense.

La table III qu'on trouve à la fin du Cours, et que nous avons construite d'après les données expérimentales de M. Darcy, permet également de résoudre avec facilité le problème actuel. En regard du diamètre D, on y a inscrit les valeurs correspondantes de l'aire $\frac{1}{4}\pi D^2$, du coefficient b_1, de $\frac{J}{Q^2}$ et du logarithme de $\frac{J}{Q^2}$. Toutes ces quantités ne sont en effet fonctions que de la variable D, comme on le sait déjà pour les deux premières; quant à $\frac{J}{Q^2}$, on le voit en éliminant U entre les relations (5) et (6), ce qui donne

$$\frac{1}{4}\,DJ = \left(0,000507 + \frac{0,00001294}{D}\right)\frac{16Q^2}{\pi^2 D^4}$$

ou bien

$$(9)\qquad \frac{J}{Q^2} = \frac{64}{\pi^2 D^5}\left(0,000507 + \frac{0,00001294}{D}\right).$$

Cela posé, quand on donnera D, la table fera connaître $\frac{J}{Q^2}$, directement ou par son logarithme; on en déduira Q, puisque J est, ainsi que D, une donnée du problème. Ensuite on calculerait U par la relation (5) en divisant Q par l'aire $\frac{1}{4}\pi D^2$; mais le plus souvent en pratique U n'est qu'une inconnue auxi-

liaire, et lorsqu'on a la dépense, on n'a pas besoin de chercher la vitesse moyenne.

Afin de faciliter les interpolations destinées à fournir les valeurs de $\frac{J}{Q^2}$ correspondantes à des diamètres compris entre ceux qui figurent dans la table, on a indiqué les différences premières et secondes des logarithmes de $\frac{J}{Q^2}$. Les différences des logarithmes étant beaucoup plus faibles que celles des nombres, on aura plus d'exactitude en faisant de préférence l'interpolation sur le logarithme; pour plus d'exactitude encore, on interpolerait paraboliquement, en se servant des différences secondes. Toutefois, comme à partir de $D = 0^m,50$ les différences premières deviennent faibles et lentement variables, on a pensé que l'interpolation par parties proportionnelles suffirait, et on a supprimé, en conséquence, l'indication des différences secondes.

Deux exemples vont rendre ces explications plus claires.

Premièrement, soit donné $J = 0,00357$, $D = 0^m,15$. On trouvera dans la table III, en regard de $D = 0^m,15$, la valeur $\frac{J}{Q^2} = 50,66$; donc

$$Q^2 = \frac{J}{50,66} = \frac{0,00357}{50,66} = 0,00007047,$$

et par suite

$$Q = \sqrt{0,00007047} = 0^{mc},00839;$$

la dépense serait de $8^{lit},4$ par seconde environ. Pour avoir U, on diviserait 0,00839 par $\frac{1}{4}\pi D^2$, nombre égal, d'après la table, à $0^{mq},01767$. On aurait ainsi

$$U = \frac{0,00839}{0,01767} = 0^m,475.$$

Si l'on avait voulu se servir des logarithmes, la table aurait fourni celui de $\frac{J}{Q^2}$, et voici comment on aurait disposé le calcul :

$$\log \frac{J}{Q^2} = 7,70467$$

$$\log J = \bar{3},55267$$

$$\log \frac{1}{Q^2} = 4,15200 \quad \text{(Par soustraction des deux précédents.)}$$

$$\log \frac{1}{Q} = 2,07600$$

$$\log Q = \bar{3},92400$$

$$Q = 0,0083946$$

$$\log Q = \bar{3},92400$$

$$\log \frac{1}{4}\pi D^2 = \bar{2},24724$$

$$\log U = \bar{1},67676 \quad \text{(Par soustraction des deux précédents.)}$$

$$U = 0^m,4751$$

Le second exemple montrera l'usage de l'interpolation pour obtenir la valeur de $\frac{J}{Q^2}$. On demande cette quantité en donnant le diamètre $D = 0^m,0106$. Le calcul direct fait avec la formule générale conduirait au résultat $\frac{J}{Q^2} = 83720700$ environ. Il s'agit de voir comment on approcherait plus ou moins de ce nombre au moyen de la table et de l'interpolation linéaire ou parabolique.

D'abord on pourrait employer l'interpolation linéaire entre les valeurs de $\frac{J}{Q^2}$ correspondant à $D = 0^m,010$ et $D = 0^m,011$. On a, suivant la table,

$$\text{Pour } D = 0^m,010 \ldots\ldots \quad \frac{J}{Q^2} = 116790000,$$

$$0^m,011 \ldots\ldots \quad 67779000;$$

il faudrait ensuite prendre la différence entre ces deux résultats, la multiplier par 0,6 et retrancher le produit de 116790000. En d'autres termes, on admet que depuis $D = 0^m,0100$ jusqu'à $D = 0^m,0110$, $\frac{J}{Q^2}$ varie uniformément avec D, et l'on pose en conséquence, pour $D = 0^m,0106$,

$$\frac{J}{Q^2} = 116790000 - \frac{0^m,0106 - 0^m,0100}{0^m,0110 - 0^m,0100}(116790000 - 67779000)$$
$$= 87383400,$$

valeur qui, comparée à la valeur exacte, nous permet de constater une

erreur absolue en plus de 3662700, soit une erreur relative, dans le même sens, de 0,044 ou $\frac{1}{23}$ environ.

Quoique, eu égard à l'incertitude des coefficients numériques entrant dans l'expression de h_1, une telle erreur n'ait rien qui puisse effrayer un praticien, nous pensons qu'il convient de l'atténuer, parce qu'on peut le faire sans compliquer le calcul, en opérant d'une manière toute semblable sur les logarithmes de $\frac{J}{Q^2}$. On poserait donc

$$\text{Pour } D = 0^m,010\ldots\ldots \quad \log\frac{J}{Q^2} = 8,06739,$$
$$0^m,011\ldots\ldots \quad 7,83109;$$

d'où l'on déduit pour $D = 0^m,0106$,

$$\log\frac{J}{Q^2} = 8,06739 - 0,6\,(8,06739 - 7,83109).$$

On prend encore dans la table la différence $7,83109 - 8,06739 = -0,23630$, et en achevant le calcul on arrive à

$$\log\frac{J}{Q^2} = 7,92561,$$

et définitivement

$$\frac{J}{Q^2} = 84258000.$$

L'erreur absolue se trouve donc réduite à 537300, et l'erreur relative à 0,0064 ou à $\frac{1}{156}$ environ.

Rappelons enfin la formule d'interpolation parabolique. Pour trois abscisses en progression arithmétique de raison h, on a les trois ordonnées y_0, y_1, y_2 d'une courbe, et on veut avoir l'ordonnée y répondant à une abscisse déterminée prise entre celles de y_0 et y_1. Dans l'interpolation linéaire on admet que, entre les points définis par deux ordonnées consécutives, la courbe peut se remplacer approximativement par une droite joignant ses deux extrémités, ce qui a lieu en effet si les ordonnées sont suffisamment rapprochées, et que les différences $y_1 - y_0$ et $y_2 - y_1$ aient des valeurs presque égales. Ici nous admettrons que les trois points situés sur y_0, y_1, y_2 appartiennent à une même parabole ayant son axe parallèle aux y. Nous placerons de plus l'origine arbitraire des abscisses x sur y_0, et alors, nommant α et β deux constantes, nous devrons avoir généralement, entre y_0 et y_2,

$$y = y_0 + \alpha x + \beta x^2.$$

Les abscisses qui répondent à y_1 et y_2 étant h et $2h$, on a, pour déterminer α et β,

$$y_1 = y_0 + \alpha h + \beta h^2,$$
$$y_2 = y_0 + 2\alpha h + 4\beta h^2;$$

de là résultent les relations

$$\alpha = \frac{4y_1 - 3y_0 - y_2}{2h},$$

$$\beta = \frac{y_0 + y_2 - 2y_1}{2h^2},$$

$$y = y_0 + \frac{x}{2h}(4y_1 - 3y_0 - y_2) + \frac{x^2}{2h^2}(y_0 + y_2 - 2y_1).$$

Suivant les notations usitées dans le calcul des différences finies, on peut écrire

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0,$$
$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = y_0 + \Delta y_0 + \Delta(y_0 + \Delta y_0) = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0;$$

si en outre on désigne par m le rapport $\frac{x}{h}$, m étant un nombre variable entre 0 et 1, la valeur ci-dessus de y deviendra

$$y = y_0 + \frac{m}{2}(4y_0 + 4\Delta y_0 - 3y_0 - y_0 - 2\Delta y_0 - \Delta^2 y_0)$$
$$+ \frac{m^2}{2}(y_0 + y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 - 2y_0 - 2\Delta y_0),$$

ou, après toute réduction,

$$y = y_0 + m\Delta y_0 - \frac{1}{2}m(1 - m)\Delta^2 y_0.$$

La valeur $y = y_0 + m\Delta y_0$ serait celle que fournirait l'interpolation linéaire: le surplus du second membre s'introduit par l'emploi des courbes paraboliques du second degré.

Dans l'exemple numérique ci-dessus traité, quand il s'agit de déterminer $\log \frac{J}{Q^2}$ pour $D = 0^m,0106$, on a comme données fournies par la table, les nombres

$$y_0 = 8,06739, \quad \Delta y_0 = -0,23630, \quad \Delta^2 y_0 = 0,02130;$$

d'ailleurs $m = \frac{0,0106 - 0,010}{0,011 - 0,010} = 0,6$. Par suite la formule précédente

donnera,

$$\log \frac{J}{Q^2} = 8,06739 - 0,14178 - 0,00256 = 7,92305;$$

d'où l'on tire

$$\frac{J}{Q^2} = 83763000,$$

valeur exacte à $0,000505$ ou $\frac{1}{1980}$ près.

50. Problème. *Connaissant la charge par mètre courant et la dépense d'une conduite, calculer son diamètre et la vitesse moyenne.* — Ici J et Q sont les données, U et D les inconnues. Pour les trouver on peut d'abord employer une méthode de tâtonnements. On suppose à D une certaine valeur; alors au moyen de D et J, en suivant la marche indiquée au n° 49, on détermine U et Q: la valeur de D qu'on a essayée est bonne lorsque Q ainsi calculé se trouve égal au nombre donné.

Quand on admet que le frottement de l'eau sur chaque mètre carré de paroi est exprimé par $\Pi\,(aU + bU^2)$, comme l'a fait de Prony, on peut se servir avec avantage de tables dressées par M. Mary, Inspecteur général de Ponts et-Chaussées, et par M. Fourneyron.

La table de M. Mary (*), est une table à double entrée, faisant connaître U et J au moyen des arguments Q et D. Pour la construire, avec les données Q et D on calcule immédiatement U par la relation (5); puis, comme la relation (4) devient

$$(10) \qquad \frac{1}{4}\,DJ = aU + bU^2,$$

on en tire sans peine la valeur de J. Cette table permet de résoudre immédiatement le problème dont nous nous occupons. Parmi les valeurs de J qui répondent à la valeur donnée de Q (et qui sont en même nombre que les diamètres figurant dans la table), on cherche le nombre donné auquel J doit être égal;

(*) Cette table est reproduite à la suite des leçons lithographiées faites à l'École des Ponts et Chaussées, sur les distributions d'eau, par M. Mary.

l'argument D correspondant est un des nombres demandés, et l'autre, la vitesse U, est celle qui répond aux arguments Q et D, maintenant connus. Comme les données ne se retrouveront pas inscrites exactement dans la table, on pourra se contenter des résultats correspondant aux nombres les plus rapprochés des données, ou bien faire des interpolations.

La table de M. Fourneyron donne les valeurs de J^2Q en fonction de U. Si l'on élimine D entre les relations (5) et (10), on obtient

$$J^2Q = 4\pi U(aU + bU^2)^2; \qquad (11)$$

on voit donc que J et Q étant donnés, J^2Q est un nombre connu et que l'équation (11) détermine U. Cette détermination est immédiate par la table de M. Fourneyron, dans laquelle sont inscrites les valeurs de $4\pi U(aU + bU^2)^2$ ou de J^2Q qui correspondent à des valeurs données de U : il suffit de chercher le nombre connu J^2Q dans la colonne intitulée J^2Q, en regard on aura la vitesse U. On en déduira D par l'équation (5).

Les expériences de M. Darcy n'étant pas complétement d'accord avec l'expression du frottement adoptée par de Prony, cet auteur a également donné une table à double entrée, qui fait connaître J et Q en fonction des arguments D et U. D et U étant donnés, on calcule $\frac{1}{4}$DJ, et par suite J au moyen de l'équation (6), puis Q au moyen de l'équation (5); on conçoit que la table puisse être construite au moyen d'un ensemble d'opérations analogues. L'usage de cette table ressemblerait beaucoup à celui de la table de M. Mary; avec l'une ou l'autre, on résoudrait sans peine toutes les questions qui consistent à trouver deux des quatre quantités D, J, U, Q, connaissant les deux autres. Seulement il faut se rappeler que M. Darcy a calculé sa table en adoptant la valeur de b_1 relative à la fonte neuve, c'est-à-dire la moitié de celle qui résulte de la formule (3); comme b_1 devrait être doublé au bout d'un certain temps d'usage, il convient, si la charge par mètre courant J est une donnée, de faire le calcul de D, U ou Q en ne comptant que sur la moitié de cette charge; ou bien si J est une inconnue, de doubler le résultat que le calcul aura donné pour cette

quantité. Cela se justifie en remarquant que, d'après l'équation (6), J est proportionnel à b_1, toutes choses égales d'ailleurs : si les équations (5) et (6), qui sont celles du problème, sont satisfaites par un système de valeurs de D, J, U, Q, elles seront encore satisfaites en doublant J et b_1. M. Darcy conseille en outre, quand on a déterminé un diamètre D, de l'augmenter un peu pour tenir compte par aperçu de l'épaisseur de la couche déposée par les eaux.

La disposition adoptée par M. Darcy pour sa table n'est pas sans inconvénient au point de vue pratique; son défaut principal consiste en ce que ni la dépense Q ni la charge J ne figurent parmi les arguments pour entrer dans la table. Par suite, quand J et Q sont comme ici les données immédiates de la question, la table ne fournit pas facilement les inconnues D et U; on ne peut les obtenir que par un tâtonnement, lequel se fait du reste avec la table elle-même. On essaye une valeur de U; avec les données U et Q on trouve Q et D; on reconnaît que U a été bien choisie quand la dépense Q ainsi obtenue est égale au nombre donné.

La table III que nous avons déjà citée (n° 49) permet de procéder d'une manière plus directe. Connaissant J et Q, on calcule $\frac{J}{Q^2}$ ou bien son logarithme; on cherche ce nombre dans la table, et en regard sur la même ligne horizontale, on trouve le diamètre D, avec une approximation variable de $0^m,001$ à $0^m,01$ (pourvu que D soit au-dessous de $1^m,00$), sans qu'on ait besoin d'aucune interpolation. La table s'applique aux diamètres compris entre $0^m,01$ et $1^m,20$, ce qui est plus que suffisant dans les cas ordinaires. Quand on aura le diamètre, puisque l'on connaît déjà la dépense, on calculera sans peine la vitesse moyenne, comme on l'a vu au n° 49.

Indiquons enfin une solution analytique du problème dont nous nous occupons, et qui consiste à déduire directement le diamètre des données J et Q. A cet effet, on éliminera U entre les relations

$$\frac{1}{4}DJ = b_1U^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{4}\pi D^2U = Q.$$

ce qui donne

$$JD^5 = \frac{64\,b_1}{\pi^2}\,Q^2,$$

et par suite

(12)
$$D = \sqrt[5]{\frac{64\,b_1}{\pi^2}}\,\sqrt[5]{\frac{Q^2}{J}}.$$

Le nombre b_1 étant à la rigueur variable avec D, le rapport de D à $\sqrt[5]{\frac{Q^2}{J}}$ est aussi variable; mais si l'on prend les valeurs extrêmes de b_1 données au n° 47, savoir 0,000723 et 0,000520, qui se rapportent aux diamètres $0^m,06$ et $1^m,00$, on trouve que les valeurs correspondantes de $\sqrt[5]{\frac{64\,b_1}{\pi^2}}$ sont 0,3421 et 0,3203; on aurait donc une solution suffisante pour la pratique en prenant

(13)
$$D = \frac{1}{3}\sqrt[5]{\frac{Q^2}{J}};$$

mais cette solution ne serait pas applicable si elle conduisait à une valeur de D de beaucoup inférieure à $0^m,06$, car pour les diamètres très-petits b_1 peut s'écarter beaucoup de 0,000723: ainsi, quand $D = 0^m,01$, l'expression $\sqrt[5]{\frac{64\,b_1}{\pi^2}}$ devient égale à 0,41, nombre assez différent de $\frac{1}{3}$.

En procédant comme il suit, nous obtiendrons une autre formule approximative aussi simple que l'équation (13), mais applicable seulement sous le bénéfice des mêmes restrictions. Dans l'équation (12) nous remplacerons b_1 par sa valeur $0,000507 + \frac{0,00001294}{D}$ ou par $0,000507\left(1 + \frac{0,0255}{D}\right)$, et nous aurons

$$D = \sqrt[5]{\frac{64 \cdot 0,000507}{\pi^2}\left(1 + \frac{0,0255}{D}\right)}\,\sqrt[5]{\frac{Q^2}{J}}$$
$$= 0,32\,\sqrt[5]{\frac{Q^2}{J}} \cdot \sqrt[5]{1 + \frac{0,0255}{D}}.$$

Or, pour peu que D atteigne $0^m,05$ ou $0^m,06$, le facteur

$\sqrt[5]{1+\frac{0,0255}{D}}$ peut être approximativement remplacé par $1+\frac{0,005}{D}$, car la formule du binôme de Newton donne

$$\left(1+\frac{0,0255}{D}\right)^{\frac{1}{5}} = 1+\frac{1}{5}\left(\frac{0,0255}{D}\right)-\frac{2}{25}\left(\frac{0,0255}{D}\right)^2+\ldots,$$

développement qu'on peut borner aux deux premiers termes, si $\frac{0,0255}{D}$ est une fraction plus petite que $\frac{1}{2}$. On aura donc

$$D = 0,32\sqrt[5]{\frac{Q^2}{J}}\left(1+\frac{0,005}{D}\right),$$

et attendu que $0,32\sqrt[5]{\frac{Q^2}{J}}$ est déjà une valeur approchée de D,

$$(14)\qquad D = 0,32\sqrt[5]{\frac{Q^2}{J}}+0,005.$$

Voici trois exemples numériques :

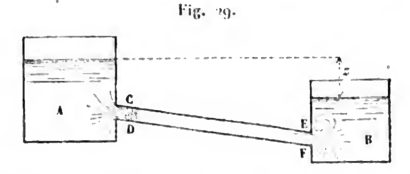
1°. $Q = 0^{mc},22$, $J = 0,000163$. On obtient par la formule (13) $D = 1^m,04$; par la formule (14), $D = 1^m,00$; par la table III ou par celle de M. Darcy, $D = 1^m,00$. La table de M. Fourneyron aurait donné $D = 0^m,95$.

2°. $Q = 0^{mc},000302$, $J = 0,2127$. Au moyen des formules (13) et (14), nous trouvons $D = 0^m,018$ et $D = 0^m,022$; par la table III, $D = 0^m,02$; par celle de M. Fourneyron, $D = 0^m,016$.

3°. $Q = 0^{mc},006283$, $J = 0,01649$. Résultats des formules (13) et (14), $D = 0^m,100$ et $D = 0^m,101$; par la table III on trouve $D = 0^m,100$; par celle de M. Fourneyron, $D = 0^m,089$.

51. *Cas d'une conduite cylindrique simple faisant communiquer deux réservoirs ou débouchant dans l'atmosphère.* — On

Fig. 29.



donne deux bassins A et B (*fig.* 29), la différence de leurs ni-

veaux z, les pressions p et p' sur ces niveaux; une conduite cylindrique simple, à diamètre et à débit constants, amène l'eau de A dans B; la longueur L de la conduite étant donnée et le mouvement étant supposé permanent, il s'agit soit de déterminer la dépense Q correspondante à un diamètre D, soit de résoudre le problème inverse, c'est-à-dire d'avoir D au moyen de Q.

La question rentrerait immédiatement dans les termes où elle a été posée aux nos 49 et 50, si l'on connaissait les niveaux piézométriques en deux sections CD, EF, l'une prise à peu de distance de l'entrée de la conduite dans le réservoir A, l'autre à son extrémité d'aval. Pour les trouver, appelons U la vitesse moyenne dans la conduite; supposons en outre que le tuyau pénètre dans le réservoir A sans raccordement, comme un ajutage cylindrique, et qu'on prenne la section CD assez loin de l'origine pour que les filets y soient redevenus parallèles; alors, en allant de l'intérieur du réservoir à la section CD, une molécule quelconque aura dû se mouvoir sous une charge exprimée par $\frac{3}{2}\frac{U^2}{2g}$ (no 36); donc le niveau piézométrique en CD dépasse le niveau de la surface libre dans A d'une hauteur $\frac{p}{\Pi}-\frac{3}{2}\frac{U^2}{2g}$. D'ailleurs la veine qui arrive en EF perdant rapidement sa vitesse, elle se trouve entourée d'une eau sensiblement stagnante et le niveau piézométrique dans EF est à peu près le niveau de la surface libre dans B, relevé de $\frac{p'}{\Pi}$. La charge totale et la perte de charge entre CD et EF sont donc exprimées par $z+\frac{p-p'}{\Pi}-\frac{3}{2}\frac{U^2}{2g}$, soit en posant $h=z+\frac{p-p'}{\Pi}$, par $h-\frac{3}{2}\frac{U^2}{2g}$, et la quantité J est égale à $\frac{h}{L}-\frac{3}{2}\frac{U^2}{2gL}$. On aura donc (no 48)

$$(15)\qquad \frac{1}{4}D\left(\frac{h}{L}-\frac{3}{2}\frac{U^2}{2gL}\right)=\frac{1}{\Pi}F(U),$$

équation qui, jointe à $\frac{1}{4}\pi D^2 U=Q$, suffit pour résoudre les questions proposées.

Quand on admet que $F(U) = u b_1 U^2$, cette équation devient

$$\frac{1}{4} D \left(\frac{h}{L} - \frac{3}{2}\frac{U^2}{2gL}\right) = b_1 U^2,$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{1}{4} D \frac{h}{L} = \left(b_1 + \frac{3D}{16gL}\right) U^2 = b_1 U^2 \left(1 + \frac{3D}{16 b_1 g L}\right),$$

ou bien

(16) $$\frac{1}{4} D \frac{h}{L + \frac{3D}{16 b_1 g}} = b_1 U^2.$$

Ordinairement, dans les applications, la longueur L étant assez considérable, $\frac{3D}{16 b_1 g}$ n'est qu'une petite fraction de L: on peut donc poser, au moins comme première approximation,

$$\frac{1}{4} \frac{Dh}{L} = b_1 U^2,$$

ce qui revient à supposer que la charge totale h disponible entre les deux bassins est complétement absorbée par le frottement de la conduite. Cette simplification étant admise, on rentre dans les problèmes des nos 49 et 50, sans aucun changement, puisque l'on connaît $J = \frac{h}{L}$, et qu'il s'agit de calculer Q quand on donne D, ou inversement. Lorsque D est l'inconnue, on l'obtient facilement ainsi d'une manière approximative; pour plus d'exactitude, on peut recommencer le calcul avec une nouvelle valeur de J égale au quotient de h par la longueur corrigée $L + \frac{3D}{16 b_1 g}$. Si au contraire D est donné et Q inconnue, on applique les formules et procédés du n° 49, en prenant pour J le quotient de h par L augmenté de $\frac{3D}{16 b_1 g}$: cette longueur additive varie de 26 à 37 fois le diamètre quand le diamètre varie lui-même de $0^m,06$ à $1^m,00$; elle aura généralement peu d'importance comparativement à L, au moins dans le cas où il s'agit de grandes conduites d'eau.

Il est bon de remarquer que l'équation (15) aurait pu être immédiatement obtenue par l'application du théorème de Bernoulli (nº 15), à une molécule qui passe du bassin A au bassin B. Les vitesses initiale et finale étant nulles, la charge h égale la somme des pertes de charge éprouvées pendant le trajet. Or ces pertes sont :

1°. A l'entrée de l'ajutage cylindrique $\frac{1}{2}\frac{U^2}{2g}$ (nº 36);

2°. Dans la conduite, par chaque mètre courant, $\frac{4}{nD}$ F (U), puisque telle est la valeur de J, d'après l'équation (4) du nº 48; cela fait par conséquent, pour le parcours entier du tuyau, $\frac{4L}{nD}$ F (U);

3°. A l'entrée dans le bassin B, $\frac{U^2}{2g}$ (nº 33).

Donc nous aurons

$$h = \frac{1}{2}\frac{U^2}{2g} + \frac{4L}{nD}\,F(U) + \frac{U^2}{2g},$$

ou bien

$$\frac{1}{4}D\left(\frac{h}{L} - \frac{3}{2}\frac{U^2}{2gL}\right) = \frac{1}{n}\,F(U),$$

ce qui est précisément l'équation (15).

Si la conduite débouchait dans une atmosphère gazeuse à la pression p', il n'y aurait rien à changer aux calculs qui précèdent; seulement z désignerait la hauteur verticale entre le niveau de A et le centre de la section CD formant l'orifice d'écoulement.

Voyons encore ce qui arriverait dans le cas où le tuyau présenterait entre les sections CD et EF un robinet dont nous assimilerons l'effet à celui d'un diaphragme réduisant le diamètre D dans le rapport de n à 1. Il faudrait alors ajouter aux pertes de charge énoncées tout à l'heure, une perte exprimée par $\frac{(U' - U)^2}{2g}$, U' étant la vitesse dans la section contractée qui suit l'étranglement. On aurait donc

$$h = \frac{3}{2}\frac{U^2}{2g} + \frac{(U' - U)^2}{2g} + \frac{4L}{nD}\,F(U).$$

Si m désigne le coefficient de contraction applicable dans le cas actuel, la section contractée sera $\frac{1}{4}\pi n^2 D^2 m$; l'égalité entre le débit par cette section et une autre quelconque où la vitesse moyenne est U, fournirait par conséquent l'égalité

$$\frac{1}{4}\pi n^2 D^2 m U' = \frac{1}{4}\pi D^2 U,$$

ou bien

$$U' = \frac{1}{n^2 m}.$$

Cette valeur de U' substituée dans celle de h donne

$$h = \frac{U^2}{2g}\left[\frac{3}{2} + \left(\frac{1}{n^2 m} - 1\right)^2\right] + \frac{4L}{\Pi D} F(U);$$

on voit que dans l'équation (15) le coefficient $\frac{3}{2}$ de $\frac{U^2}{2g}$ doit être augmenté de $\left(\frac{1}{n^2 m} - 1\right)^2$. Remplaçant ensuite F (U) par $\Pi b_1 U^2$, et multipliant l'équation par $\frac{1}{4}\frac{D}{L}$, elle deviendra

$$\frac{1}{4} D \frac{h}{L} = b_1 U^2 \left[1 + \frac{3 + 2\left(\frac{1}{n^2 m} - 1\right)^2}{16 b_1 g L} D\right],$$

ou encore

$$(17) \qquad \frac{1}{4} D \frac{h}{L + \left[\frac{3 + 2\left(\frac{1}{n^2 m} - 1\right)^2}{16 b_1 g}\right] D} = b_1 U^2.$$

La longueur fictive qu'il faudrait ajouter à L, pour pouvoir faire abstraction des charges non consommées par le frottement de la conduite, serait donc ici $\frac{3 + 2\left(\frac{1}{n^2 m} - 1\right)^2}{16 b_1 g}$ D, au lieu de $\frac{3D}{16 b_1 g}$ que nous avions dans l'équation (16).

Si le robinet se trouvait placé dans la section EF, la perte de charge qu'il occasionne serait alors $\frac{U'^2}{2g}$ au lieu de $\frac{(U'-U)^2}{2g}$ (nº 33), et le coefficient $\left(\frac{1}{n^2 m}-1\right)^2$ devrait être remplacé tout simplement par $\frac{1}{n^4 m^2}$. Rien ne serait d'ailleurs changé aux calculs précédents. On poserait donc

$$(18) \qquad \frac{1}{4} D \frac{h}{L + \frac{3 + \frac{2}{n^4 m^2}}{16 b_1 g} D} = b_1 U^2.$$

Il est clair que n peut toujours être supposé assez petit pour que la valeur de U tirée de l'une des équations (17) ou (18) soit aussi petite qu'on le voudra. Le cas de $n = 0$ répondrait à la fermeture complète du robinet; alors on trouverait $U = 0$, comme cela doit être. Mais dans les conduites très-longues il faut que n soit assez petit pour influer d'une manière bien sensible sur le débit. Exemple :

$$L = 2000^m, \quad D = 0^m,15, \quad h = 20^m, \quad n = \frac{1}{3};$$

comme le robinet obstrue les $\frac{8}{9}$ de la section, on peut supposer $m = 0,62$; on sait d'ailleurs que $b_1 = 0,00055$. La formule (18) donne alors $U = 0^m,707$, tandis que la formule (16) donnerait $U = 0^m,825$. Ainsi donc, dans cet exemple, la section d'écoulement étant diminuée dans le rapport de 9 à 1 par le robinet, la vitesse et, par suite, la dépense ne seraient diminuées que dans le rapport de 0,825 à 0,707, ou, en nombres ronds, de 7 à 6.

32. *Calcul de la pression en un point quelconque d'une conduite cylindrique simple; exception dans l'application des formules.* — La charge par mètre courant d'une conduite cylindrique, ou la perte de charge (ce qui est la même chose dans le cas actuel), a pour valeur, comme on vient de le rappeler, $\frac{4}{\Pi D} F(U)$; cette quantité ne varie pas dans toute l'étendue de

la conduite si celle-ci est simple et à débit constant, car D, U et Π conservent toujours la même valeur. Donc, si la conduite est en outre composée de parties raccordées entre elles par des courbes peu sensibles, de manière que le frottement des parois soit la seule cause des pertes de charge, on voit que l'abaissement du niveau piézométrique, à partir de l'origine, sera proportionnel à la distance entre cette origine et la section considérée. Il sera donc bien facile d'avoir le sommet de la colonne piézométrique répondant à une section quelconque. Soient, en effet, ζ la charge entre les deux extrémités du tuyau, dont la longueur totale est L; l la distance entre une section et l'origine du tuyau ; le niveau piézométrique répondant à cette section sera en dessous de celui qui répond à l'origine, d'une quantité $\frac{\zeta l}{L}$. Dans le cas où la conduite est en ligne droite, le lieu des sommets des colonnes piézométriques, représentées en chaque point par une verticale, serait une autre ligne droite; il en serait encore de même, approximativement, pour une conduite composée de lignes à faible pente dont la longueur pourrait être confondue avec la projection horizontale. Le lieu géométrique dont il s'agit est ce que M. Dupuit a nommé *ligne de pression* ou *ligne de charge* suivant que les colonnes piézométriques comprennent ou ne comprennent pas la hauteur représentative de la pression atmosphérique.

En supposant que les colonnes menées en chaque point débouchent dans l'atmosphère, leurs hauteurs représenteront les pressions diminuées de la pression atmosphérique. Par suite, quand la ligne de charge sera, dans une section, au-dessus de l'axe longitudinal du tuyau, cela voudra dire que, dans la même section, la pression moyenne dépasse la pression atmosphérique; quand, au contraire, le lieu dont il s'agit passera en dessous de l'axe, la pression moyenne deviendra inférieure à celle de l'atmosphère. En général Π étant le poids du mètre cube d'eau, y la distance verticale prise positivement en montant, entre l'axe du tuyau et la ligne de charge, p_a la pression atmosphérique, p la pression moyenne dans la section à laquelle se rapporte y, on aura

$$p = p_a + \Pi y.$$

Cette expression montre que pour y négatif et supérieur en valeur absolue à $\frac{p_a}{\Pi}$, c'est-à-dire à $10^m,33$ s'il s'agit de conduites d'eau, p devient négatif. Or on a déjà vu (n° 36) que la pression ne peut pas être négative, et que les formules doivent alors cesser de s'appliquer, parce qu'elles reposent sur des hypothèses impossibles à réaliser dans le cas dont il s'agit. Il faut même éviter, en établissant des conduites d'eau, que la pression ne devienne notablement inférieure à la pression atmosphérique, en aucun point des tuyaux; car l'air en dissolution dans l'eau pourrait s'en dégager; la continuité du mouvement serait peut-être troublée, et d'ailleurs l'eau privée d'air devient moins salubre et moins convenable pour la boisson.

On devra donc toujours s'assurer que la ligne de charge ne passe pas notablement en dessous de l'axe longitudinal du tuyau, pour aucun point de celui-ci. Cette vérification sera inutile pour les tuyaux rectilignes, pourvu que y soit positif aux deux extrémités; la ligne de charge étant droite, y sera nécessairement positif dans l'intervalle. Mais il peut en être différemment, quand l'axe est une ligne courbe ou brisée.

53. *Détermination expérimentale des coefficients numériques de la fonction* F (U). — Il a été démontré plus haut (n° 48) qu'on a l'équation

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{DJ} = \frac{1}{\Pi}\,\mathrm{F}\,(\mathrm{U}),$$

entre la vitesse moyenne U, le poids Π du mètre cube de liquide, le diamètre D du tuyau, et la charge par mètre courant J. Concevons maintenant qu'on ait exécuté une série d'expériences sur l'écoulement de l'eau dans les tuyaux cylindriques, en notant pour chacune d'elles la valeur numérique des quantités D, J, U, lesquelles sont faciles à observer. Pour D, il n'y aura en effet qu'à prendre une mesure directe; J sera connu au moyen de piézomètres placés en divers points, qui donneront la charge totale entre ces points, et par suite la charge pour chaque mètre courant; U se mesurera en recueillant le liquide écoulé dans un certain temps, d'où l'on déduira d'abord

la dépense Q par seconde, puis la vitesse moyenne, égale au quotient $\frac{4Q}{\pi D^2}$.

De Prony, ayant eu à sa disposition 51 expériences, comme nous l'avons déjà dit, chercha les valeurs de $\frac{1}{4}\frac{DJ}{U}$; puis il construisit une courbe dont les U étaient les abscisses et $\frac{1}{4}\frac{DJ}{U}$ les ordonnées. Cette courbe différait peu d'une droite; par conséquent de Prony en conclut qu'on pouvait poser

$$\frac{1}{4}\frac{DJ}{U} = a + bU,$$

a et *b* désignant des constantes, ou bien

$$\frac{1}{4} DJ = aU + bU^2,$$

ou enfin

$$F(U) = \Pi (aU + bU^2).$$

La construction de la droite représentative de $\frac{1}{4}\frac{DJ}{U}$ donnait les valeurs de *a* et de *b*; *a* était l'ordonnée de la droite à l'origine, pour $U = 0$; *b* était son coefficient angulaire.

M. Darcy a procédé avec un peu plus de rigueur. Il a cherché à part les valeurs de *a* et de *b*, pour une nature déterminée de paroi et pour des diamètres également déterminés; faisant ensuite varier successivement la nature de la paroi et le diamètre, il a pu constater les lois énoncées au n° 47.

La méthode graphique indiquée ci-dessus est extrêmement simple et son emploi peu sujet à erreur. Cependant on a souvent fait usage d'une méthode dite *des moindres carrés*. Il s'agit de satisfaire le mieux possible aux résultats d'un certain nombre d'expériences auxquelles on accorde une confiance égale, en exprimant $\frac{1}{4}$ DJ par un binôme de la forme $aU + bU^2$. Les valeurs de *a* et de *b* ne pouvant vraisemblablement pas satisfaire d'une manière rigoureuse à toutes les expériences, l'erreur absolue sera pour l'une d'elles $\frac{1}{4} DJ - (aU + bU^2)$, et

par conséquent l'erreur relative aura pour expression

$$1 - \frac{4(aU + bU^2)}{DJ}.$$

Or Laplace a démontré que pour réduire au minimum l'erreur relative moyenne à craindre, il fallait prendre a et b de manière à rendre minimum la somme des carrés des erreurs relatives. Posant donc

$$S = \sum \left[1 - \frac{4(aU + bU^2)}{DJ}\right]^2,$$

on aura pour déterminer a et b les équations

$$\frac{dS}{da} = 0, \quad \frac{dS}{db} = 0,$$

ou bien

$$\sum \left[1 - \frac{4(aU + bU^2)}{DJ}\right] \frac{U}{DJ} = 0,$$

$$\sum \left[1 - \frac{4(aU + bU^2)}{DJ}\right] \frac{U^2}{DJ} = 0,$$

ce qu'on peut encore écrire

$$a \sum \frac{U^2}{D^2J^2} + b \sum \frac{U^3}{D^2J^2} = \frac{1}{4} \sum \frac{U}{DJ},$$

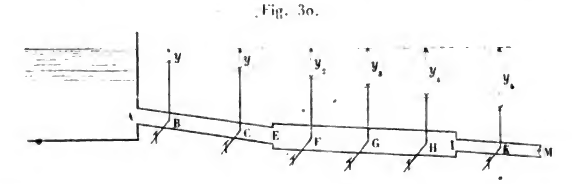
$$a \sum \frac{U^3}{D^2J^2} + b \sum \frac{U^4}{D^2J^2} = \frac{1}{4} \sum \frac{U^2}{DJ}.$$

C'est un système de deux équations du premier degré entre les deux inconnues a et b. Les calculs des six sommes qui entrent dans ces deux équations sont nécessairement longs et pénibles quand il y a beaucoup d'expériences; d'ailleurs le procédé a l'inconvénient d'accorder aveuglément la même confiance à une série d'observations dont quelques-unes peuvent être mal faites, tandis que la méthode graphique rend les anomalies sensibles aux yeux.

§ III. — Du mouvement permanent de l'eau dans les conduites simples à diamètre ou à débit variable d'une section à l'autre.

54. *Cas où les variations de diamètre et de débit ne sont pas continues.* — Supposons une conduite recevant l'eau d'un bassin (*fig.* 30) et la débitant sur son parcours, au moyen de

Fig. 30.



tuyaux très-courts adaptés en B, C, F, G, H, K,..., et terminés par des robinets qui permettent de régler le volume dépensé. Le diamètre de la conduite n'est pas constant : il change brusquement en des points tels que E, I.... La situation de ces points, ainsi que celle des tuyaux secondaires, est définie par les longueurs données

$$\overline{AB} = l,\quad \overline{BC} = l_1,\quad \overline{CE} = l_2,\quad \overline{EF} = l_3,\ \ldots.$$

Appelons

d, d_1, d_2,..., les diamètres des portions AE, EI, IM,... ;

y, y_1, y_2, y_3,..., les distances verticales mesurées en descendant, entre le plan de niveau du bassin et les sommets des colonnes piézométriques élevées en B, C, F, G,..., ces sommets étant soumis, comme le niveau du bassin, à la pression atmosphérique ;

u, u_1, u_2, u_3,..., les vitesses dans les portions AB, BC, CE, EF....

Une charge exprimée par $\frac{1}{2}\,\frac{u^2}{2g}$ est perdue à l'entrée de l'eau du réservoir dans le cylindre AB ; une autre charge, dont la valeur par mètre courant est $\frac{4}{\Pi d}\,\mathrm{F}(u)$ se trouve consommée par le frottement de la conduite entre A et B ; on aura donc,

d'après le théorème de Bernoulli (n° 15), la vitesse étant sensiblement nulle dans le réservoir,

$$\frac{u^2}{2g} = y - \frac{1}{2}\,\frac{u^2}{2g} - \frac{4l}{\Pi d}\,\mathrm{F}(u),$$

ou bien

$$y = \frac{3}{2}\,\frac{u^2}{2g} + \frac{4l}{\Pi d}\,\mathrm{F}(u).$$

Dans la partie BC il n'y aura que les pertes de charge dues au frottement de la conduite; on trouvera donc, en appliquant l'équation (4) du n° 48, et remarquant que J peut être remplacé par $\frac{y_1 - y}{l_1}$,

$$y_1 - y = \frac{4l_1}{\Pi d}\,\mathrm{F}(u_1).$$

Entre C et F il y aura une partie de la charge consommée par le frottement et une autre par le changement brusque de section en E; cette dernière perte s'exprime par $\frac{(u_2 - u_3)^2}{2g}$ (n° 31), et alors le théorème de Bernoulli, appliqué entre C et F, donne

$$\frac{u_3^2}{2g} - \frac{u_2^2}{2g} = y_2 - y_1 - \frac{(u_2 - u_3)^2}{2g} - \frac{4l_2}{\Pi d}\,\mathrm{F}(u_2) - \frac{4l_3}{\Pi d_1}\,\mathrm{F}(u_3),$$

soit encore

$$y_2 - y_1 = \frac{u_3^2}{2g} - \frac{u_2^2}{2g} + \frac{(u_2 - u_3)^2}{2g} + \frac{4l_2}{\Pi d}\,\mathrm{F}(u_2) + \frac{4l_3}{\Pi d_1}\,\mathrm{F}(u_3).$$

De même on trouverait facilement, pour les portions FG, GH,

$$y_3 - y_2 = \frac{4l_4}{\Pi d_1}\,\mathrm{F}(u_4), \qquad y_4 - y_3 = \frac{4l_5}{\Pi d_1}\,\mathrm{F}(u_5).$$

Pour HK, il faudrait tenir compte d'une perte produite par le changement brusque de section en I, perte analogue à celle qui a lieu à l'entrée d'un ajutage cylindrique, et dont l'expression est (n° 36) $\frac{u_5^2}{2g}\left(\frac{1}{m} - 1\right)$, en appelant m le coefficient de contraction à l'entrée du tuyau IK; le théorème de Bernoulli,

appliqué à l'intervalle HK, donnerait alors en fin de compte

$$y_5 - y_4 = \frac{u_7^2}{2g} - \frac{u_6^2}{2g} + \frac{u_7^2}{2g}\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 + \frac{4 l_6}{\Pi d_1} F(u_6) + \frac{4 l_7}{\Pi d_2} F(u_7).$$

On pourrait continuer et exprimer ainsi, de proche en proche, l'abaissement piézométrique en passant d'un orifice à l'autre, au moyen des vitesses moyennes successives.

Maintenant, supposons qu'on donne le volume d'eau qu'un orifice quelconque doit dépenser par seconde. On en conclura sans peine le débit de chaque portion de la conduite : il suffira en effet d'additionner les débits de tous les orifices situés en aval de la partie considérée. Par suite, si les diamètres sont également donnés, on aura toutes les vitesses u, u_1, u_2, u_3,...., car il suffira d'appliquer la relation (5) du nº 48 successivement à toutes les portions AB, BC, CE, EF.... Les équations ci-dessus posées permettront alors de connaître les quantités y, y_1, y_2, y_3,..., c'est-à-dire les niveaux piézométriques aux points B, C, F, G,.... Il faudra que ces niveaux soient au-dessus de ceux des orifices correspondants, car une certaine charge est nécessaire pour produire l'écoulement par lesdits orifices. D'ailleurs, pour peu que la charge fût sensible, on dépenserait le volume voulu, en prenant l'orifice suffisamment grand ; mais dans la pratique des distributions d'eau, les orifices ont des dimensions à peu près fixes, et pour obtenir une dépense convenable, on s'arrange de manière à ce qu'il y ait toujours sur chacun d'eux, immédiatement en amont, une charge de $0^m,50$ à $0^m,60$ environ. Comme les orifices ne peuvent pas être percés immédiatement dans les parois mêmes de la conduite, mais qu'ils en sont séparés par des tuyaux plus ou moins longs, la charge consommée par cet appendice doit encore s'ajouter à celle de $0^m,50$ ou $0^m,60$. Par exemple, si le tuyau de dérivation avait $10^m,00$ de longueur, $0^m,03$ de diamètre, et que sa dépense fût de $0^{mc},0005$ par seconde, son frottement absorberait une charge de $0^m,63$ environ ; le niveau piézométrique dans la conduite devrait donc dépasser de $1^m,20$ ou $1^m,25$ celui de l'orifice en regard.

Cette considération montre que les niveaux piézométriques dans la conduite, en regard des points B, C, F, G,..., sont assez

souvent des données, car ils doivent se trouver à des hauteurs connues au-dessus des orifices correspondants, dont la situation est fixée à priori par des convenances locales. Le problème qu'on doit alors résoudre, c'est de calculer les divers diamètres de manière à ne dépenser qu'une charge déterminée, avec un volume d'eau connu, sur chaque portion de la conduite. On comprend que la solution peut s'obtenir par tâtonnement, puisque si l'on avait la valeur des inconnues, les équations posées tout à l'heure permettraient de trouver les abaissements successifs du niveau piézométrique.

Ordinairement les tuyaux de conduite ayant des longueurs assez considérables, les pertes de charge occasionnées par les changements brusques de section, et les différences des hauteurs dues aux vitesses, sont négligeables devant les charges absorbées par le frottement et proportionnelles aux longueurs $l, l_1, l_2, l_3, \ldots$. Si à cette simplification on joint l'hypothèse d'un diamètre constant entre deux orifices consécutifs, le problème que nous venons de mentionner rentrera complétement dans les termes de celui que nous avons résolu au n° 50. La solution ainsi obtenue sera tout au moins une approximation; pour plus d'exactitude, on pourra évaluer les termes négligés, en se servant des vitesses calculées par ce moyen, et recommencer la recherche des diamètres, après avoir défalqué des charges $y, y_1-y, y_2-y_1, y_3-y_2, \ldots$, la valeur approximative des termes négligés dans le premier essai.

55. ***Cas où les diamètres et les débits varient par degrés insensibles. Relation différentielle entre la charge et la vitesse moyenne.*** — On emploie rarement des conduites qui ne seraient par composées de tuyaux cylindriques mis les uns à la suite des autres; cependant on peut avoir à considérer accidentellement un écoulement par un tuyau de section progressivement variable. De même les orifices B, C, F, G,..., sont quelquefois rapprochés au point que la distance entre deux consécutifs n'est qu'une faible fraction de la longueur totale de la conduite, et il semble alors qu'il est permis de regarder les distances $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CF}, \ldots$ comme des éléments infiniment petits de cette longueur totale. Nous avons ainsi une conduite dont le

diamètre et la dépense sont censés varier d'une manière continue, quand on passe d'une section à l'autre ; nous n'admettons pas d'ailleurs de variation avec le temps dans une même section, c'est-à-dire que le mouvement est toujours censé permanent.

Pour arriver à l'équation du mouvement dans un tuyau défini comme on vient de le dire, quelques hypothèses et considérations nouvelles sont encore nécessaires. D'abord nous admettrons que les variations du profil transversal sont assez lentes pour que les filets traversant une section puissent toujours être regardés comme sensiblement parallèles entre eux et à l'axe du tuyau ; il en résulte immédiatement que leur glissement réciproque, et, par suite, les forces dues à la viscosité, ont à peu près la même direction ; donc aussi, dans chaque section, la pression variera suivant la loi hydrostatique (nº 18, 4ᵉ règle). Il n'y a donc encore qu'un niveau piézométrique pour tous les points d'une même section, comme nous l'avons vu dans un autre cas (nº 43).

Maintenant considérons deux sections distantes d'une longueur ds infiniment petite, entre lesquelles le niveau piézométrique aura baissé d'une hauteur dy ; soit v la vitesse d'une molécule de masse m, à l'instant où elle traverse la première ; $v + dv$ la vitesse après le parcours ds, φ la force retardatrice due à la viscosité et rapportée à l'unité de masse. Le théorème de Bernoulli (nº 15) donne immédiatement, l'angle γ étant ici de 180 degrés,

$$\frac{v\,dv}{g} = dy - \frac{1}{g}\varphi\,ds,$$

ou, en multipliant par m,

$$\frac{mv\,dv}{g} = m\,dy - \frac{1}{g}m\varphi\,ds.$$

Faisons la somme des équations pareilles à la dernière pour toutes les molécules comprises entre les deux sections dont il s'agit, et divisons par la masse totale Σm ; comme dy et ds sont les mêmes pour toutes les masses m, on aura, si l'on isole

dy dans le premier membre,

$$dy = \frac{\Sigma m v dv}{g \Sigma m} + \frac{1}{g} ds \frac{\Sigma m \varphi}{\Sigma m}.$$

Le premier terme du second membre est la valeur moyenne de l'accroissement $\frac{v dv}{g}$ que prend $\frac{v^2}{2g}$, pour le groupe de molécules considéré; dans l'impossibilité de l'évaluer exactement, on la remplace par la différentielle de la hauteur due à la vitesse moyenne, ou par $\frac{U dU}{g}$, U désignant cette vitesse. Quant à $m\varphi$, c'est la force due à la viscosité pour la molécule m; dans la somme $\Sigma m\varphi$, il est donc évident que les forces $m\varphi$ vont se détruire deux à deux, comme actions mutuelles des divers points d'un système, à l'exception toutefois du frottement exercé par la paroi sur les molécules contiguës, lequel frottement est une force extérieure (*). $\Sigma m\varphi$ exprime donc ce frottement, que nous pouvons aussi représenter par le produit de la surface mouillée et d'une fonction $f(W)$ de la vitesse W des filets contigus à la paroi (n° 42). Donc si l'on nomme Ω l'aire de la section, χ son périmètre, Π le poids du mètre cube de liquide, on aura

$$\Sigma m = \frac{\Pi}{g} \Omega ds \quad \text{et} \quad \Sigma m\varphi = \chi ds f(W);$$

par suite

$$dy = \frac{U dU}{g} + \frac{1}{\Pi} \frac{\chi}{\Omega} f(W) ds.$$

Ici encore, pour n'avoir pas à s'occuper des variations de vitesse dans une même section transversale, il est naturel de chercher à mettre au lieu de $f(W)$ une fonction de la vitesse moyenne. Mais cette fonction doit-elle être la même que dans

(*) A la rigueur, la cohésion du liquide pourrait encore produire des forces exercées sur les deux sections transversales qui limitent la tranche considérée; mais attendu que ces forces, dans le cas du mouvement uniforme, se détruisent réciproquement (n° 43) et que nous supposons le mouvement lentement varié, nous pouvons supprimer leur résultante comme négligeable devant le frottement de la paroi.

le mouvement uniforme? Une réponse affirmative supposerait que la loi des vitesses dans une même section est identique pour le mouvement uniforme et le mouvement varié, car on admettrait dans les deux cas une même relation entre W et U. Or ce serait là une hypothèse gratuite et même peu vraisemblable, comme le montrent des considérations sur lesquelles nous reviendrons ultérieurement. Cependant, pour ne pas trop compliquer une analyse où existe déjà de l'incertitude, on prend le parti de remplacer $f(W)$ par $F(U)$, F étant la fonction définie au nº 47. Nous écrirons donc

$$(\alpha) \qquad dy = \frac{U\,dU}{g} + \frac{1}{\Pi}\frac{\chi}{\Omega}F(U)\,ds,$$

équation dont nous aurons à faire de nombreuses applications, non-seulement dans le cas des tuyaux fermés, mais aussi quand il sera question de canaux découverts. Malheureusement la démonstration qui l'établit est loin d'être bien rigoureuse, et l'on ne peut guère compter sur la parfaite exactitude du résultat : cependant, comme cette formule devient exacte dans le cas particulier du mouvement uniforme, il y a lieu de croire qu'elle est assez approchée de la vérité lorsque le mouvement est lentement varié, sans être complétement uniforme.

La section transversale des tuyaux employés dans les conduites d'eau étant toujours circulaire, on a, en appelant D le diamètre,

$$\chi = \pi D, \qquad \Omega = \frac{1}{4}\pi D^2;$$

si nous faisons en outre

$$F(U) = \Pi b_1 U^2,$$

l'équation (α) deviendra, par la substitution de ces valeurs,

$$(1) \qquad dy = \frac{U\,dU}{g} + \frac{4b_1}{D}U^2\,ds.$$

On aurait de plus

$$(2) \qquad Q = \frac{1}{4}\pi D^2 U;$$

cela fait donc deux relations entre les quatre quantités y, U, D, Q, toutes fonctions de la seule variable s. Si l'on donne deux d'entre elles, les deux autres pourront être déterminées. Nous allons indiquer quelques exemples particuliers des recherches qui ont leur point de départ dans cette théorie.

56. ***Des conduites simples à diamètre variable et à débit constant.*** — Soit y la charge totale correspondante à la longueur entière L de la conduite ; U_0 et U_1 les deux vitesses moyennes pour $s = 0$ et $s = L$; l'équation (1) intégrée entre les limites 0 et L devient dans l'hypothèse du débit Q invariable

$$y = \frac{U_1^2 - U_0^2}{2g} + 4\int_0^L \frac{b_1 U^2}{D}\,ds.$$

Ordinairement on simplifie cette relation en observant que dans les grandes conduites le terme $\frac{U_1^2 - U_0^2}{2g}$ est une assez petite fraction de la charge totale y, laquelle est absorbée presque complétement par le frottement de la conduite. De plus, les variations de b_1 deviennent peu importantes, quand il s'agit de diamètres supérieurs à $0^m,06$; il serait superflu d'en tenir compte, d'autant plus que nous avons admis (n° 55) une expression assez incertaine du frottement, et que nos calculs manquent déjà de précision par cette cause. Nous poserons donc

$$(3) \qquad y = 4b_1 \int_0^L \frac{U^2 ds}{D} = \frac{64 b_1}{\pi^2} \int_0^L \frac{Q^2 ds}{D^5},$$

soit, puisque nous supposons Q constant quand s varie,

$$(4) \qquad y = \frac{64 b_1 Q^2}{\pi^2} \int_0^L \frac{ds}{D^5}.$$

L'intégrale $\int_0^L \frac{ds}{D^5}$ ne dépend que des dimensions de la conduite et nullement de son débit ou de la charge y ; la relation entre ces deux quantités reste donc la même, pourvu que l'on considère une série de conduites pour lesquelles l'intégrale

ne varierait pas. Par exemple, une conduite de longueur L′ et de diamètre constant D′ serait, à ce point de vue, équivalente à la conduite primitive, si l'on avait

$$\frac{L'}{D'^5} = \int_0^L \frac{ds}{D^5}.$$

D'une manière générale, nous arrivons à l'énoncé d'une loi remarquable signalée par M. Dupuit :

Deux conduites simples à débit constant, mais à diamètre variable suivant des lois quelconques, débiteront le même volume d'eau sous la même charge et seront alors dites équivalentes, lorsque la somme des produits des longueurs élémentaires qui composent chaque conduite, multipliées chacune par la cinquième puissance de l'inverse du diamètre correspondant, conserve la même valeur dans les deux conduites.

Nous avons dit que le diamètre pouvait varier suivant une loi quelconque : cela comprend le cas de diamètres constants sur une certaine longueur, puis variant brusquement. Alors si l'on nomme d le diamètre constant sur la longueur l faisant partie d'une des conduites, il est clair que $\int_0^L \frac{ds}{D^5}$ serait remplacée par une somme de termes de la forme $\frac{l}{d^5}$ ou par $\Sigma \frac{l}{d^5}$.

Le théorème qui vient d'être énoncé montre que si la conduite a un petit diamètre sur une fraction notable de sa longueur, sur la moitié par exemple, la dépense sous une charge donnée serait peu supérieure à ce que l'on obtiendrait si ce petit diamètre régnait sur la longueur entière. Exemple : Une conduite a un diamètre constant D sur la longueur L ; sa dépense étant reconnue insuffisante, on veut l'augmenter, et on double, à cet effet, le diamètre, sur la longueur $\frac{1}{2}$ L. L'intégrale $\int_0^L \frac{ds}{D^5}$, primitivement égale à $\frac{L}{D^5}$, devient par cette modification

$$\frac{1}{2}\frac{L}{D^5} + \frac{1}{2}\frac{L}{(2D)^5} \quad \text{ou} \quad \frac{33}{64}\frac{L}{D^5};$$

Q est donc augmenté dans le rapport de 1 à $\sqrt{\frac{64}{33}}$, comme le montre l'équation (4), c'est-à-dire dans le rapport de 1 à 1,39. Au contraire, si le diamètre avait été doublé sur la longueur entière, l'intégrale eût été réduite à $\frac{1}{32}$ de sa valeur première, et la dépense multipliée par $\sqrt{32}$ ou par 5,66.

Cas particulier : le diamètre varie uniformément avec la longueur. — Si nous appelons D_1 et D_0 les diamètres qui répondent à $s = L$ et $s = 0$, nous aurons par hypothèse

$$D = D_0 + \frac{D_1 - D_0}{L} s \quad \text{et} \quad ds = \frac{L}{D_1 - D_0} dD.$$

Par suite l'équation (4) deviendra

$$(5) \quad y = \frac{64 b_1}{\pi^2} \frac{Q^2 L}{D_1 - D_0} \int_0^L \frac{dD}{D^5} = \frac{16 b_1}{\pi^2} \frac{LQ^2}{D_1 - D_0} \left(\frac{1}{D_0^4} - \frac{1}{D_1^4} \right).$$

Le terme $\frac{U_1^2 - U_0^2}{2g}$, que nous avons négligé, aurait pour valeur

$$\frac{16}{\pi^2} \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{D_1^4} - \frac{1}{D_0^4} \right);$$

son rapport absolu avec celui que nous avons conservé serait par conséquent $\frac{D_1 - D_0}{2 b_1 g L}$, soit au maximum $\frac{100(D_1 - D_0)}{L}$, puisque b_1 est supérieur à 0,000507 (n° 47). Ce rapport sera effectivement petit pour peu que L soit grand, ce qui justifie la suppression de la quantité $\frac{U_1^2 - U_0^2}{2g}$.

L'équation (5) permet de calculer sans peine y en fonction de Q ou inversement, pour une conduite dont les dimensions sont connues.

En terminant, nous remarquerons que si le diamètre augmente avec s, c'est-à-dire en suivant le mouvement de l'eau, il convient que l'augmentation soit lente ; un évasement trop rapide pourrait empêcher les filets liquides de suivre les parois, ce qui entraînerait des remous le long de ces parois et des pertes de charge plus ou moins sensibles.

57. *Conduite à diamètre constant, débitant uniformément de l'eau sur sa route.* — Reprenons la relation ci-dessus établie

$$y = 4 b_1 \int_0^L \frac{U^2 ds}{D};$$

D est supposé constant, mais U est variable avec s, en vertu de la relation $Q = \frac{1}{4}\pi D^2 U$, dans laquelle Q est une fonction donnée de s. Ici nous supposons Q décroissant uniformément; en d'autres termes, nous posons

$$Q = Q_0 - ks,$$

Q_0 et k étant des constantes. Appelons encore P le volume total débité en route par les orifices percés sur la conduite, pendant l'unité de temps, et Q_1 le volume débité simultanément par la section extrême, nous aurons

$$Q_1 = Q_0 - kL,$$
$$Q_0 = P + Q_1,$$

et en éliminant Q_0 et k entre les trois dernières équations,

$$Q = P + Q_1 - \frac{Ps}{L}.$$

Maintenant il est facile de calculer l'intégrale $\int_0^L \frac{U^2 ds}{D}$. On y remplace U par $\frac{4Q}{\pi D^2}$ et ds par $-\frac{L}{P}dQ$, ce qui donne, D étant une constante,

$$y = \frac{64 b_1 L}{\pi^2 D^5 P} \int_{Q_1}^{P+Q_1} Q^2 dQ,$$

soit, tout calcul effectué,

$$y = \frac{64 b_1 L}{\pi^2 D^5}\left(Q_1^2 + PQ_1 + \frac{1}{3}P^2\right).$$

On tirerait de là une quelconque des quantités $\frac{y}{L}$, D, Q_1, P, si les autres étaient connues.

On peut se demander quelle est en fonction de Q_1 et de P,

la dépense Q′ qui coulerait dans le même tuyau, sous la même charge, le service en route P étant supprimé. Q′ serait évidemment donné par l'équation

$$Q'^2 = Q_1^2 + PQ_1 + \frac{1}{3}P^2;$$

on en déduit sans peine

$$Q' > Q_1 + \frac{1}{2}P \quad \text{et} \quad Q' < Q_1 + P\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Or $\sqrt{\frac{1}{3}} = 0,577$; ces deux limites sont donc assez rapprochées, et l'on prendra, sans grande erreur,

$$Q' = Q_1 + 0,55\,P,$$

comme l'a indiqué M. Dupuit (*).

Si l'on voulait comparer le volume Q_1 qu'une même conduite cylindrique peut porter à son extrémité, sous une charge donnée et sans aucun service en route, avec le volume P qu'elle

---

(*) La quantité $\sqrt{Q_1^2 + PQ_1 + \frac{1}{3}P^2}$ se mettant sous la forme

$$\sqrt{\left(Q_1 + \frac{P}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{2\sqrt{3}}\right)^2},$$

on pourrait la changer approximativement en fonction linéaire de Q_1 et de P, au moyen de l'ingénieuse méthode indiquée par M. le général Poncelet, dans son Cours lithographié de l'École de Metz. On serait ainsi conduit à l'expression

$$Q' = 0,9827\,Q_1 + 0,5673\,P,$$

et l'erreur relative possible ne dépasserait guère $\frac{1}{58}$. Mais les coefficients 0,9827 et 0,5673 ont l'inconvénient d'être plus compliqués que ceux de M. Dupuit. La limite de l'erreur relative possible avec ceux-ci est à peu près de $\frac{1}{21}$; elle répond à $Q_1 = 0$. Cette limite s'abaisserait à moins de $\frac{1}{40}$ si l'on prenait l'expression

$$Q' = Q_1 + 0,5635\,P,$$

et à $\frac{1}{39}$ environ, en adoptant la valeur plus simple

$$Q' = Q_1 + \frac{9}{16}P$$

débiterait uniformément en route, sous la même charge, le débit extrême Q_1 étant supposé nul dans le second cas, on devrait poser

$$y = \frac{64 b_1 L}{\pi^2 D^5} Q_1^2 = \frac{64 b_1 L}{\pi^2 D^5} \cdot \frac{1}{3} P^2,$$

d'où résulte

$$Q_1 = P\sqrt{\frac{1}{3}} = 0,577\, P.$$

Enfin, si l'on voulait connaître les charges y, y' qui rendraient ces quantités Q_1 et P égales entre elles, on aurait

$$y = \frac{64 b_1 L}{\pi^2 D^5} Q_1^2, \qquad y' = \frac{64 b_1 L}{3\pi^2 D^5} P^2,$$

c'est-à-dire que la charge doit être triplée quand, au lieu de dépenser complétement en route, d'une manière uniforme, un certain volume d'eau, il faut le porter intégralement à l'extrémité de la conduite.

Toutes ces remarques sont susceptibles d'être utilisées dans les calculs qui doivent accompagner un projet de distribution d'eau. Par exemple, les conduites sont souvent destinées à un service mixte composé d'un débit en route et d'un débit extrême : si le débit en route est uniforme, il sera facile de calculer y au moyen de Q' ou inversement : puis, en se donnant l'une des deux quantités P ou Q_1, on calculerait bien facilement l'autre par la relation $Q' = Q_1 + 0,55\, P$ ou mieux $Q' = Q_1 + \frac{9}{16} P$. Si Q_1 et P sont données, on en déduirait Q', puis y ou D par l'équation $y = \frac{64 b_1 Q'^2 L}{\pi^2 D^5}$.

On pourrait imaginer une grande variété de questions du même genre : ce qui précède servirait d'exemple pour les résoudre.

§ IV. — Des conduites complexes ou à plusieurs branches.

58. *Des variations de niveau piézométrique aux environs d'un point d'embranchement.* — Lorsqu'une conduite c (*fig.* 31)

s'embranche sur une autre C qui l'alimente, il y a une variation de niveau piézométrique entre les sections AB et *ab*, tant à cause du changement de vitesse que de la perte de charge qui a lieu dans l'intervalle. Cette perte est principalement due à ce que la veine liquide entrant dans la dérivation se contracte d'abord et n'occupe pas toute la section du tuyau *c*: il se passe là un phénomène analogue à celui des ajutages cylindriques. La théorie ne peut encore déterminer la perte dont il s'agit; quelques expériences exécutées par Genieys, de concert avec M. Belanger, semblent indiquer qu'elle serait double de la hauteur due à la vitesse en *ab*; mais ces expériences sont trop peu étendues pour qu'on puisse compter d'une manière générale sur l'exactitude de cette évaluation, applicable d'ailleurs au seul cas d'un embranchement à angle droit. Ainsi donc, en appelant

Fig. 31.

u la vitesse en *ab*;
U la vitesse en AB;
h l'abaissement du niveau piézométrique dans le passage de AB à *ab*;
ζ la charge perdue dans le même intervalle;

nous sommes conduit à poser

$$\zeta = 2\frac{u^2}{2g},$$

et par suite le théorème de Bernoulli nous donne

$$h = \frac{u^2}{2g} - \frac{U^2}{2g} + 2\frac{u^2}{2g} = 3\frac{u^2}{2g} - \frac{U^2}{2g}.$$

Dans le passage de AB à A′B′, sur la conduite principale, s'il n'y avait aucune perte de charge, le niveau piézométrique devrait se relever d'une quantité égale à la diminution de la hauteur due à la vitesse; la vitesse est en effet moindre en A′B′, puisque, la section restant la même, la dépense a diminué de tout le volume qui s'écoule par l'embranchement. Mais comme

il y a toujours une perte de charge, et qu'ici en particulier il est difficile d'admettre que la présence de l'embranchement ne cause aucun trouble dans l'écoulement en aval, on pourra supposer que le niveau piézométrique est sensiblement le même qu'en **AB** : une expérience citée par d'Aubuisson est conforme à cette opinion.

Au surplus, l'évaluation exacte des différences dont il s'agit n'a qu'une faible importance pratique, pour les conduites d'une grande longueur. Là c'est le frottement dû à l'action des parois qui joue le rôle principal et qui détermine, pour ainsi dire seul, les lois de l'écoulement, comme nous l'avons déjà vu précédemment.

59. *Solution succincte de deux problèmes généraux que peuvent présenter les conduites complexes.* — Les deux problèmes que nous avons en vue sont les suivants :

1°. Étant donné un système de conduites, avec toutes ses dimensions, ainsi que les niveaux de l'eau dans les bassins, trouver la vitesse et la dépense dans chaque partie du système.

2°. Étant données les mêmes choses que précédemment, sauf les diamètres des différentes portions, on demande de déterminer ces diamètres, de manière à ce qu'à chacun d'eux réponde une dépense donnée.

Pour résoudre la première question, nous négligerons d'abord les pertes de charge secondaires et généralement toutes les charges non consommées par le frottement des conduites. Alors le niveau piézométrique sera le même, en chaque point d'embranchement, dans tous les tuyaux qui s'y réunissent (nº 58). S'il y a m points d'embranchement, on aurait ainsi à considérer m niveaux piézométriques; on prendra pour inconnues auxiliaires les m cotes de nivellement qui définiraient leurs positions relativement à un même plan horizontal. Supposons en outre qu'il y ait n tuyaux à diamètre constant ou variable, avec ou sans service en route, la dépense en route étant connue pour chacun d'eux, s'il y en a une ; ces n tuyaux vont d'un embranchement à un autre, d'un embranchement à un bassin, ou réciproquement. Au moyen des m cotes prises pour inconnues auxiliaires, et des cotes définissant le niveau des bassins, on

exprimera la charge totale entre les extrémités de chacun des n tuyaux : on pourra donc poser une équation entre cette charge, la dépense inconnue du tuyau correspondant et ses dimensions données. Cette équation sera l'équation (3) du n° 56, l'intégration étant convenablement effectuée suivant le cas où l'on se trouvera, comme on l'a vu par des exemples. Cela fera déjà autant d'équations que de tuyaux, soit un nombre n. De plus, en chaque point d'embranchement le volume total débité par les tuyaux qui amènent l'eau à ce point doit être égal au volume total débité par les tuyaux qui l'emportent : cela fournira encore une équation entre les inconnues pour chaque dérivation, soit en tout m équations. Nous avons donc finalement $m+n$ équations entre un pareil nombre d'inconnues. Le problème est donc déterminé; la résolution des équations fera connaître les débits inconnus et les niveaux piézométriques cherchés subsidiairement.

Dans ce qui précède, nous avons raisonné comme si le sens de l'écoulement était connu dans chaque tuyau; dans le cas contraire on procéderait par tâtonnement. Les résultats montreraient si l'on est parti d'hypothèses exactes; car l'écoulement doit toujours avoir lieu dans le sens de l'abaissement du niveau piézométrique, puisqu'une certaine charge est nécessaire pour vaincre la résistance opposée par les frottements.

Après avoir trouvé la solution en négligeant les pertes de charge et charges secondaires, on pourra généralement s'en contenter en pratique; cependant on pourrait aussi faire subir une correction à ce premier essai, comme il a été dit à la fin du n° 54.

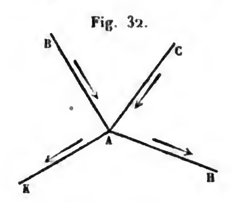
Examinons maintenant le second problème général. Les n premières équations posées tout à l'heure dans le problème précédent subsistent encore; mais les m dernières ne contenant que les dépenses se changent en autant d'équations de condition, auxquelles doivent satisfaire les données, et dans lesquelles n'entrent pas les inconnues. On n'a donc plus que n équations entre les diamètres inconnus, qui sont au moins en nombre égal, puisqu'il y a n tuyaux, et les m inconnues auxiliaires. Par conséquent le problème est indéterminé. Et en effet, il est clair qu'on pourrait se donner arbitrairement, entre

certaines limites, les m niveaux piézométriques aux points d'embranchement, puis déterminer en conséquence le diamètre de chaque tuyau, d'après sa charge totale et son débit. Mais toutes les solutions ainsi obtenues ne seront pas identiques au point de vue des frais d'établissement du système de conduites, et l'indétermination cesse, comme on va le voir, quand on s'impose la condition du minimum de dépense en argent.

60. *Introduction dans le second problème, de la condition du minimum de dépense en argent.* — Une question préalable à résoudre, c'est de savoir comment varie le prix d'un mètre courant de tuyau en fonction de son diamètre. Or, si l'on consulte les analyses de prix dressées pour l'établissement ou l'entretien de distributions d'eau dans diverses localités, on reconnaît que le prix en question s'écarte peu d'être proportionnel au diamètre. C'est ainsi qu'à Paris le prix d'établissement d'un mètre courant de tuyau, avec un diamètre D, tous frais de pose compris, est à peu près 100D. Il en résulte que la dépense pour un tuyau de longueur L sera proportionnelle au produit LD, et par suite, pour l'ensemble des tuyaux, à la quantité ΣLD, Σ désignant une somme étendue à toutes les parties du système.

Cela posé, considérons un des points d'embranchement. En ce point A (*fig.* 32) se réunissent des tuyaux en nombre quelconque, les uns tels que AB, AC,..., amenant l'eau en A, les autres tels que AH, AK,..., l'emportant au delà. Les cotes $b, c,...,$ $h, k,..,$ des niveaux piézométriques en B, C,..., H, K,... au-dessous d'un même plan horizontal, étant supposées fixes et invariables, le prix total du système AB, AC,..., AH, AK,..., sera encore variable en fonction de la cote y du niveau piézométrique en A. On peut donc se proposer de déterminer ce niveau de manière à rendre un minimum le prix total des tuyaux dont A est le point de réunion, avec la condition que chaque tuyau débite toujours le même volume.

Fig. 32.



Soient

D, D',..., les diamètres des tuyaux AB, AC,...;

Q, Q',..., les dépenses, L, L',..., les longueurs correspondantes;

d, d',..., q, q',..., l, l',..., les quantités analogues pour les tuyaux AH, AK,....

Pour que l'écoulement ait lieu dans le sens que nous avons supposé, y doit être supérieur à la plus grande des hauteurs b, c,..., et inférieur à la plus petite des hauteurs h, k,...; les charges par mètre courant seront

$$\frac{y-b}{L}, \quad \frac{y-c}{L'}, \ldots, \quad \frac{h-y}{l}, \quad \frac{k-y}{l'}, \ldots,$$

et par suite, d'après l'équation (13) du n° 50, ΣLD serait ici représenté, sauf le facteur constant $\frac{1}{3}$, par l'expression

$$L\sqrt[5]{\frac{Q^2L}{y-b}} + L'\sqrt[5]{\frac{Q'^2L'}{y-c}} + \ldots$$
$$+ l\sqrt[5]{\frac{q^2l}{h-y}} + l'\sqrt[5]{\frac{q'^2l'}{h-y}} + \ldots = P.$$

Si, au lieu de l'équation approximative (13) nous avions employé l'équation (14), qui est du même genre, nous aurions obtenu la même expression affectée d'un coefficient un peu différent et augmentée d'une constante : ce serait donc toujours la quantité P qu'il s'agirait de rendre minimum, en disposant convenablement de y. On voit que P deviendrait infini pour y égal à chacune des valeurs b, c,..., h, k,..., et par suite, pour chacune de ses deux limites extrêmes; il existe donc bien réellement un minimum dans l'intervalle de ces limites. Pour l'obtenir, il faut égaler à zéro la dérivée $\frac{dP}{dy}$, ce qui donne

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} -L^{\frac{6}{5}}Q^{\frac{2}{5}}(y-b)^{-\frac{6}{5}} - L'^{\frac{6}{5}}Q'^{\frac{2}{5}}(y-c)^{-\frac{6}{5}} + \ldots \\ +l^{\frac{6}{5}}q^{\frac{2}{5}}(h-y)^{-\frac{6}{5}} + l'^{\frac{6}{5}}q'^{\frac{2}{5}}(k-y)^{-\frac{6}{5}} + \ldots = 0. \end{array} \right.$$

Les charges par mètre courant

$$\frac{y-b}{L}, \quad \frac{y-c}{L'}, \ldots, \quad \frac{h-y}{l}, \quad \frac{k-y}{l'}, \ldots,$$

sont respectivement proportionnelles (nº 56) à

$$\frac{Q^2}{D^5}, \quad \frac{Q'^2}{D'^5}, \ldots, \quad \frac{q^2}{d^5}, \quad \frac{q'^2}{d'^5}, \ldots;$$

substituant ces dernières quantités à la place de leurs homologues dans l'équation (1), on fait prendre à celle-ci la forme plus simple

$$(1\ bis) \qquad -\frac{D^6}{Q^2}-\frac{D'^6}{Q'^2}-\ldots+\frac{d^6}{q^2}+\frac{d'^6}{q'^2}+\ldots=0.$$

Quelle que soit celle des deux dernières équations dont on veuille faire usage, il n'y entrera, implicitement ou explicitement, que la seule inconnue y; on la déterminerait donc au moyen de tâtonnements aisés à concevoir.

Le calcul qui précède a été fait dans l'hypothèse où chaque tuyau serait établi avec le même diamètre sur toute sa longueur : on peut démontrer que cette disposition est la plus économique, dans le cas d'un niveau piézométrique déterminé aux deux extrémités, pour débiter un volume d'eau également fixé d'avance. Supprimons en effet dans la *fig.* 32 les tuyaux AC et AK, et considérons BAH comme un seul tuyau formé de deux parties BA, AH, auxquels on se réserve la faculté de donner des diamètres différents, si l'on y trouve de l'économie. On peut alors appliquer l'équation (1 *bis*) en y supprimant tous les termes qui ne contiennent pas D ou d, et faisant $Q=q$: on trouve ainsi

$$\frac{D^6-d^6}{Q^2}=0, \quad \text{soit} \quad D=d.$$

Ce raisonnement s'appliquant à deux éléments consécutifs quelconques d'un tuyau, tant que son débit n'est pas altéré par quelque dérivation, il s'ensuit que le diamètre ne doit pas changer dans le même intervalle.

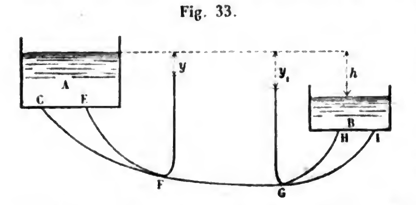
Maintenant, comment procédera-t-on dans la recherche du

minimum de frais d'établissement d'un système complexe, en supposant qu'il y ait m points d'embranchement analogues à A? Soient y, y_1, y_2,..., y_{m-1}, les cotes des niveaux piézométriques dans ces divers points; ce sont les quantités dont il faut disposer le mieux possible pour réduire le prix total. Or, quand une fonction dépend de m variables, on sait que pour la rendre minimum il faut remplir les m équations de condition que l'on obtiendrait successivement, si l'on cherchait le minimum dans l'hypothèse où une seule des variables pourrait changer, toutes les autres étant transformées en paramètres constants. On considérera donc d'abord la cote y relative à un des points d'embranchement comme seule variable, et y_1, y_2,..., y_{m-1} comme des constantes; la condition de minimum sera alors l'équation (1) ci-dessus, sauf les notations; puis en procédant de même pour y_1, on aurait une autre équation analogue; et ainsi de suite pour les m points. Comme le problème, ainsi qu'on l'a vu plus haut, ne présentait que m indéterminées, il en résulte que toute indétermination a disparu, puisque la condition du minimum de frais d'établissement nous a fourni m équations nouvelles.

Après ces généralités sommaires sur les conduites complexes, nous allons examiner avec un peu plus de détails divers cas particuliers.

61. *Conduite complexe faisant communiquer deux bassins.* — Nous supposerons deux bassins A, B, (*fig.* 33) dont les surfaces libres, toutes deux soumises à la pression atmosphérique, sont séparées par une distance verticale constante h. De A partent deux conduites CF, EF, qui se réunissent au point F en une seule FG, laquelle

Fig. 33.



se subdivise à son tour en deux autres GH, GI. Ces deux dernières versent l'eau dans le bassin B. On suppose les conduites à débit constant; de plus on donne toutes les dimensions du

système, ainsi que la hauteur h. On demande le volume d'eau qui passera du bassin A à l'autre dans l'unité de temps.

Soient

- y et y_1 les hauteurs des niveaux piézométriques en F et G, au-dessous de la surface libre dans A, les colonnes piézométriques étant ouvertes dans l'atmosphère;
- D, D_1, D_2, D_3, D_4, les diamètres supposés d'abord constants des tuyaux CF, EF, FG, GH, GI;
- L, L_1, L_2, L_3, L_4 les longueurs de ces mêmes tuyaux;
- U, U_1, etc., Q, Q_1, etc., les vitesses et les débits correspondants.

Il s'agit de connaître Q, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, connaissant h ainsi que toutes les longueurs et tous les diamètres.

On pourrait d'abord procéder par tâtonnement. Une hypothèse étant faite sur la valeur de y, on connaîtrait les charges J et J_1 par mètre courant, dans les tuyaux CF, EF, savoir

$$J = \frac{y}{L} \quad \text{et} \quad J_1 = \frac{y}{L_1};$$

on en déduirait Q et Q_1 en calculant d'abord U et U_1 par l'une des formules (7) ou (8) du n° 49; puis Q_2 par l'égalité $Q_2 = Q + Q_1$. Connaissant Q_2, on poserait les équations

$$\frac{1}{4}\pi D_2^2 U_2 = Q_2,$$

$$\frac{1}{4} D_2 \frac{y_1 - y}{L_2} = b_1 U_2^2,$$

dont la première permettrait de calculer U_2 et la seconde y_1. Ensuite on calculerait

$$J_3 = \frac{h - y_1}{L_3}, \qquad J_4 = \frac{h - y_1}{L_4},$$

et au moyen des formules citées du n° 49 on obtiendrait Q_3 et Q_4. Ces deux valeurs devraient vérifier l'égalité $Q_2 = Q_3 + Q_4$; si elles ne la vérifiaient pas, on essayerait une autre valeur de y.

Il y a un procédé plus direct et plus commode, lorsque les variations du coefficient b_1 sont négligeables, ce qu'on peut

admettre pour les tuyaux usités dans les grandes conduites (n° 47). On aurait alors, d'après la formule (4) du n° 56,

$$y = \frac{64 b_1 Q^2}{\pi^2} \cdot \frac{L}{D^5} = \frac{64 b_1 Q_1^2}{\pi^2} \cdot \frac{L_1}{D_1^5};$$

par suite, en posant $\frac{\pi}{8\sqrt{b_1}} = M$, les débits Q et Q_1 seraient

$$Q = M\sqrt{\frac{D^5 y}{L}}, \qquad Q_1 = M\sqrt{\frac{D_1^5 y}{L_1}},$$

d'où nous tirons

(1) $$Q_2 = Q + Q_1 = M\sqrt{y}\left(\sqrt{\frac{D^5}{L}} + \sqrt{\frac{D_1^5}{L_1}}\right).$$

Pareillement la considération des tuyaux GH et GI conduirait à l'équation

(2) $$Q_2 = Q_3 + Q_4 = M\sqrt{h - y_1}\left(\sqrt{\frac{D_3^5}{L_3}} + \sqrt{\frac{D_4^5}{L_4}}\right).$$

Maintenant désignons par L' et D', L'' et D'' deux couples d'indéterminées tellement choisies qu'on ait

$$\sqrt{\frac{D'^5}{L'}} = \sqrt{\frac{D^5}{L}} + \sqrt{\frac{D_1^5}{L_1}},$$

$$\sqrt{\frac{D''^5}{L''}} = \sqrt{\frac{D_3^5}{L_3}} + \sqrt{\frac{D_4^5}{L_4}}:$$

on pourra prendre arbitrairement D' et D'', par exemple, et calculer L' et L'' au moyen de ces relations. Cela posé, les équations (1) et (2) deviennent

$$Q_2 = M\sqrt{\frac{D'^5 y}{L'}}, \quad Q_2 = M\sqrt{\frac{D''^5(h - y_1)}{L''}},$$

ou bien, sous une autre forme,

(3) $$y = \frac{64 b_1 Q_2^2 L'}{\pi^2 D'^5},$$

(4) $$h - y_1 = \frac{64 b_1 Q_2^2 L''}{\pi^2 D''^5}.$$

Or, puisque le tuyau FG doit débiter le volume Q_2 sous la charge totale $y_1 - y$, on a aussi

$$(5) \qquad y_1 - y = \frac{64 b_1 Q_2^2 L_2}{\pi^2 D_2^5}.$$

Par suite l'addition membre à membre des équations (3), (4) et (5) donne

$$(6) \qquad h = \frac{64 b_1 Q_2^2}{\pi^2}\left(\frac{L'}{D'^5} + \frac{L_2}{D_2^5} + \frac{L''}{D''^5}\right),$$

ou plus simplement,

$$(7) \qquad h = \frac{64 b_1 Q_2^2 l}{\pi^2 d^5},$$

si l'on assujettit les deux nouvelles indéterminées l et d à vérifier l'égalité

$$\frac{l}{d^5} = \frac{L'}{D'^5} + \frac{L_2}{D_2^5} + \frac{L''}{D''^5},$$

qui laissera encore le choix arbitraire de l ou de d. L'équation (6) résout la question, car Q_2 y est la seule inconnue.

Dans tout ce qui précède, l'emploi des indéterminées L', D', L'', D'', l, d ne semble avoir pour but que de simplifier l'écriture des équations, mais on peut aussi leur attribuer un autre sens assez remarquable, comme l'a fait M. Dupuit, auteur de la méthode que nous exposons ici. Imaginons que les tuyaux CF et EF soient remplacés par un tuyau unique de diamètre D' et de longueur L'; que GH et GI deviennent de même un seul tuyau dont D'' et L'' seraient le diamètre et la longueur; enfin que la conduite simple ayant les diamètres successifs D', D_2, D''; respectivement sur les longueurs L', L_2, L'', se transforme en un tuyau cylindrique de longueur l et de diamètre constant d. Par toutes ces transformations on n'aurait rien changé au débit Q_2 ni aux cotes y et y_1, car les équations (3), (4), (5) et (6), qui font connaître leurs valeurs, resteraient en définitive les mêmes, eu égard aux équations de condition entre les indéterminées.

Ainsi donc l'artifice de calcul employé revient à fusionner plusieurs tuyaux en un seul, de deux manières différentes, savoir :

1°. Quand il s'agit de plusieurs tuyaux ayant tous une même charge totale, on peut débiter le même volume total sous cette même charge, en prenant un tuyau unique tel, que la racine carrée du quotient obtenu quand on divise la cinquième puissance de son diamètre par sa longueur, soit la somme des quantités analogues pour les tuyaux donnés;

2°. Quand il s'agit de plusieurs tuyaux se faisant suite et débitant un même volume d'eau, on les ramène à un diamètre constant au moyen de la propriété établie au n° 56; la longueur totale du tuyau substitué, divisée par la cinquième puissance du diamètre, doit égaler la somme des quotients analogues pour les tuyaux primitifs.

Une marche toute semblable conduirait encore au résultat cherché, dans le cas où le bassin alimentaire A serait subdivisé en plusieurs autres, pourvu que la surface liquide exposée à la pression de l'atmosphère fût pour tous un seul et même plan horizontal. Une remarque identique s'applique au bassin alimenté B.

Si les tuyaux CF, EF, etc., n'étaient pas à diamètre constant, on pourrait les y ramener par la règle du n° 56 ci-dessus rappelée : on rentrerait ainsi dans le cas que nous avons traité.

Nous démontrerons encore que pour transporter un volume d'eau déterminé d'un bassin à un autre, sous la même charge, une conduite unique à diamètre constant présente plus d'économie que plusieurs conduites distinctes, pourvu que les longueurs de toutes ces conduites soient les mêmes. D'abord, on a déjà vu (n° 60) que chaque conduite distincte doit être à diamètre constant; il suffit de montrer qu'il est avantageux, au point de vue de la dépense en argent, de fusionner toutes ces conduites en une seule qui débiterait le même volume total. Supposons, afin de fixer les idées, qu'il y ait seulement deux conduites dont les diamètres seraient D et D_1; le diamètre D' de la conduite équivalente serait donné par l'équation

$$\sqrt{D'^5} = \sqrt{D^5} + \sqrt{D_1^5},$$

attendu que toutes trois ont une même longueur. Les prix des deux systèmes seraient d'ailleurs dans le rapport de D' à $D + D_1$ (n° 60), et par conséquent tout se réduit à démontrer

l'inégalité

$$D' < D + D_1,$$

ou bien

$$D'^{\frac{5}{2}} < (D + D_1)^{\frac{5}{2}},$$

ou encore, à cause de l'équation ci-dessus,

$$(D + D_1)^{\frac{5}{2}} > D^{\frac{5}{2}} + D_1^{\frac{5}{2}}.$$

Or on a, en élevant les deux membres au carré,

$$(D + D_1)^5 > D^5 + D_1^5 + 2(\sqrt{DD_1})^5;$$

on a aussi l'inégalité connue

$$2\sqrt{DD_1} < D + D_1;$$

donc la précédente sera établie à fortiori, si l'on démontre la suivante :

$$(D + D_1)^5 > D^5 + D_1^5 + (D + D_1) D^2 D_1^2.$$

Cette dernière est évidente, car elle revient à

$$5D^4D_1 + 9D^3D_1^2 + 9D^2D_1^3 + 5DD_1^4 > 0,$$

ce qui a lieu nécessairement, puisque D et D_1 sont des nombres positifs. Ainsi donc D' est plus petit que $D + D_1$, et par conséquent la conduite unique moins dispendieuse que l'ensemble des deux autres. S'il y en avait plus de deux, ce qui précède montre qu'il y aurait avantage à en fusionner deux en une seule, puis celle-là avec une troisième, et ainsi de suite, jusqu'à ce que tout le système fût réduit à un seul tuyau cylindrique.

Dans le cas où plusieurs conduites allant d'un bassin à un autre auraient des longueurs différentes, la propriété qu'on vient de démontrer subsisterait à fortiori, en attribuant au tuyau unique équivalent une longueur qui ne dépasserait pas la plus petite parmi celles des conduites primitives.

62. *Cas de trois conduites aboutissant à un même point et faisant communiquer trois bassins de niveaux différents.* — Soient A (*fig.* 34) le bassin le plus élevé, B le plus bas, C le bassin intermédiaire ; ils communiquent entre eux par trois

tuyaux EF, FI, FG, dont les axes concourent en F. Avec cette disposition, A ne peut que dépenser de l'eau, et B ne peut qu'en recevoir; mais il y a incertitude pour C, qui, suivant les cas, peut recevoir l'eau

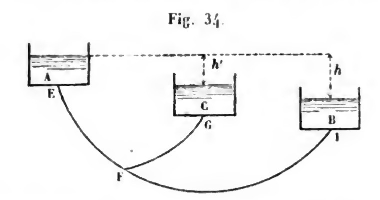


Fig. 34.

du bassin supérieur ou en donner au bassin inférieur. Il s'agit, étant données toutes les dimensions du système, de reconnaître si le bassin C est alimenté ou alimentaire, et ensuite de calculer les dépenses des trois branches EF, FI, FG.

Premièrement, on peut supposer, sans diminuer la généralité de la question, qu'il y a pour l'ensemble des trois branches un même diamètre constant, car si cela n'avait pas lieu primitivement, on transformerait chaque branche en un tuyau cylindrique par la seconde règle rappelée au numéro précédent. On calculerait pour chaque branche la valeur de l'intégrale $\int_0^L \frac{ds}{D^5}$ (nº 56), et on égalerait respectivement les trois produits à $\frac{l}{\delta^5}$, $\frac{l'}{\delta^5}$, $\frac{l''}{\delta^5}$, δ désignant un diamètre arbitraire et l, l', l'' trois longueurs à déterminer, qui seraient les longueurs réduites de EF, FI, FG. Rien ne serait changé aux débits du système ni au niveau piézométrique en F après que les tuyaux de longueur l, l', l'' et de même diamètre δ auraient remplacé les tuyaux primitifs. Il est aisé de voir en effet que les équations du problème resteraient les mêmes après et avant la transformation.

Maintenant appelons :

h la différence de niveau des surfaces de l'eau dans les bassins A et B;

h' la différence analogue pour A et C (les surfaces des bassins sont censées soumises à une même pression, celle de l'atmosphère, par exemple);

y la hauteur, au-dessous de la surface libre dans A, du niveau piézométrique au point d'embranchement F;

Q, Q', Q'' les débits inconnus des trois branches EF, FI, FG.

Si l'écoulement dans FG a lieu de F vers G, les équations du problème seront

$$y = \frac{64\,b_1}{\pi^2}\frac{Q^2 l}{\delta^5}, \quad h - y = \frac{64\,b_1}{\pi^2}\frac{Q'^2 l'}{\delta^5},$$

$$h' - y = \frac{64\,b_1}{\pi^2}\frac{Q''^2 l''}{\delta^5}, \quad Q = Q' + Q'';$$

les trois premières résultent immédiatement de la formule (5) du n° 55. On élimine facilement Q, Q', Q'' et l'on obtient la relation

(1) $$\sqrt{\frac{y}{l}} - \sqrt{\frac{h-y}{l'}} - \sqrt{\frac{h'-y}{l''}} = 0,$$

à laquelle il faut satisfaire par une valeur de y comprise entre zéro et h', car si l'on prenait y en dehors de ces limites, l'écoulement dans EF ou dans FG n'aurait pas lieu suivant la direction supposée. Or le premier membre de l'équation étant constamment croissant pour y compris entre zéro et h', il est clair qu'une valeur de y supérieure à la racine cherchée le rendrait positif, tandis qu'une valeur plus petite donnerait un résultat de signe contraire : donc si l'équation convient au problème tel qu'il est posé, en faisant $y = h'$, le premier membre devra être positif, c'est-à-dire qu'on aura

$$\sqrt{\frac{h'}{l}} - \sqrt{\frac{h-h'}{l'}} > 0,$$

ou bien encore

(2) $$\frac{h'}{h-h'} > \frac{l}{l'}, \qquad \frac{h'}{h} > \frac{l}{l+l'}.$$

Telle est la condition nécessaire pour que y ait une valeur réelle comprise entre zéro et h', c'est-à-dire pour que C puisse recevoir l'eau de A. On remarquera que $h\frac{l}{l+l'}$ serait la cote du niveau piézométrique en F, dans le cas où aucune dérivation ne serait faite en ce point sur le tuyau EFI : la condition revient à dire que ce niveau doit être au-dessus de la surface libre dans le bassin C.

Si l'écoulement avait lieu dans FG de G vers F, il faudrait

poser

$$y = \frac{64 b_1}{\pi^2} \frac{Q^2 l}{\delta^5}, \quad h - y = \frac{64 b_1}{\pi^2} \frac{Q'^2 l'}{\delta^5},$$

$$y - h' = \frac{64 b_1}{\pi^2} \frac{Q''^2 l''}{\delta^5}, \quad Q' = Q + Q'';$$

et l'on devrait alors chercher y entre les limites h' et h. L'élimination de Q, Q', Q'' donne

$$(3) \qquad \sqrt{\frac{h-y}{l'}} - \sqrt{\frac{y}{l}} - \sqrt{\frac{y-h'}{l''}} = 0;$$

on verrait comme ci-dessus que la condition de possibilité consiste en ce que h et h' substitués dans cette équation donnent respectivement des résultats négatif et positif, ce qui conduit à l'inégalité

$$\sqrt{\frac{h-h'}{l'}} - \sqrt{\frac{h'}{l}} > 0,$$

soit, en tirant de là le rapport $\frac{h'}{h}$,

$$(4) \qquad \frac{h'}{h} < \frac{l}{l+l'}.$$

C'est justement la négation de l'inégalité (2); ainsi donc aucune ambiguïté n'est possible, et, suivant que cette inégalité (2) sera ou ne sera pas satisfaite, le bassin intermédiaire recevra l'eau du bassin supérieur, ou alimentera le bassin inférieur.

Quand on aura reconnu celle des équations (1) ou (3) que l'on doir adopter, il sera facile de compléter la solution du problème. On pourrait d'abord faire disparaître les radicaux : l'un d'eux serait isolé dans le second membre de l'équation, puis on élèverait les deux membres au carré, et il ne resterait plus, après cette opération, qu'un seul radical. On l'isolerait à son tour, et une seconde élévation au carré le ferait disparaître. L'équation rationnelle en y ne serait que du second degré : mais ses coefficients auraient des expressions passablement compliquées, et en outre elle présenterait l'inconvénient de fournir deux racines, tandis qu'une seule peut convenir à la

question. Il faudrait un complément de discussion pour reconnaître celle des deux qu'on devrait définitivement adopter.

On pourrait encore adopter le procédé géométrique suivant. Prenons l'équation (1), par exemple, et écrivons-la ainsi :

$$\sqrt{\frac{y}{l}}-\sqrt{\frac{h-y}{l'}}=\sqrt{\frac{h'-y}{l''}}.$$

Par l'élévation au carré elle deviendra

$$\frac{y}{l}-2\sqrt{\frac{y(h-y)}{ll'}}+\frac{h-y}{l'}=\frac{h'-y}{l''},$$

relation qui peut être considérée comme le résultat de l'élimination de x entre les deux suivantes :

$$y\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{l'}+\frac{1}{l''}\right)-\frac{2x}{\sqrt{ll'}}=\frac{h'}{l''}-\frac{h}{l'},$$

$$x^2=y(h-y).$$

Or en considérant x et y comme des ordonnées rectangulaires dans un plan, ces équations sont celles d'une droite et d'un cercle. Il suffira de les construire, et l'ordonnée y de leur point d'intersection sera la valeur cherchée. L'inconvénient d'une double solution, dont une forcément étrangère au problème, se représente ici, car la droite couperait généralement le cercle en deux points.

Il vaudrait mieux, en pratique, résoudre l'équation (1) ou (3) par des tâtonnements numériques, en essayant diverses valeurs de y prises dans les limites indiquées ci-dessus. Ces limites sont zéro et h' pour l'équation (1), h' et h pour l'équation (3) : mais il est facile d'en obtenir de plus rapprochées. Considérons en effet les hauteurs

$$y'=\frac{lh}{l+l'},\quad y''=\frac{lh'}{l+l''},\quad y'''=h'+\frac{l''(h-h')}{l'+l''}:$$

elles représentent les cotes, prises relativement à la surface libre dans le bassin A des niveaux piézométriques qui se produiraient au point d'érogation F, si on établissait une communication directe sans embranchement intermédiaire, 1° de

A à B, au moyen de la conduite EFI; 2° de A à C par EFG; 3° de C à B par GFI. La substitution de y' et de y'' dans l'équation (1), à la place de y, donne un résultat négatif, car on a

$$\frac{y'}{l} = \frac{h - y'}{l'}, \quad \frac{y''}{l} = \frac{h' - y''}{l''},$$

de sorte que deux termes se détruisent et qu'il reste seulement un radical affecté du signe —. Il en sera de même quand on substituera y' ou y''' dans l'équation (3). Au contraire, $y = h'$ rend positifs les premiers membres des deux équations: donc, si l'on doit employer l'équation (1), la racine sera comprise entre h' et la plus forte des deux hauteurs y', y''; si c'est l'équation (3) qui devient applicable, la racine tombera entre h' et la plus faible des hauteurs y', y''' (*).

Les tâtonnements numériques seront d'ailleurs facilités beaucoup par l'emploi de la table V qui fournira immédiatement les racines carrées à extraire.

La hauteur du niveau piézométrique en F étant une fois connue, on connaîtra les charges totales y, $h - y$, $h' - y$, et on en déduira sans peine les débits Q, Q', Q''.

Dans l'analyse précédente, on a négligé les variations du

(*) Cette discussion met en évidence un fait assez intéressant que nous signalerons en passant, et qu'on peut énoncer comme il suit: quand on fait une prise d'eau sur une conduite, le niveau piézométrique baisse au point d'embranchement, de sorte que le débit augmente en amont et diminue en aval; quand on etablit au contraire un tuyau qui amène un volume d'eau supplémentaire en un certain point de la conduite, le niveau piézométrique et le débit des deux portions d'amont et d'aval éprouvent des variations en sens inverse. Soit, par exemple, la conduite EFI faisant communiquer les bassins A et B; aucun embranchement n'existant en F, le niveau piézométrique s'y élèvera jusqu'à la hauteur marquée par la cote y'. On fait ensuite une dérivation par le tuyau FG, pour avoir de l'eau en C, ce qui se produira effectivement, pourvu que h' soit plus grand que y'; alors le niveau piézométrique en F devient intermédiaire entre ceux que définissent les cotes h' et y': donc il a baissé. Le sens de l'écoulement change-t-il dans FG, alors c'est qu'on a $y' > h'$; la cote finale y étant d'ailleurs toujours comprise entre les limites y' et h', il s'ensuit que le niveau piézométrique de la conduite EFI, au point F, aura monté par le fait de la construction du tuyau FG. La proposition se serait aussi bien vérifiée en considérant l'écoulement direct, soit de A en C par EFG, soit de C en B par GFI.

coefficient b_1 en fonction du diamètre et les charges ou pertes de charge secondaires qui correspondent aux changements progressifs ou brusques de vitesse. Toutes ces circonstances auront en général peu d'influence sur le résultat; cependant si l'on voulait en tenir compte, on le pourrait sans autre difficulté que la longueur des calculs. Ayant choisi une valeur de y, on connaîtrait la charge totale pour chaque branche, et par suite on serait en mesure de calculer les trois dépenses Q, Q′, Q″. On tâtonnerait, en faisant varier y, jusqu'à ce qu'on eût vérifié la relation $Q = Q' + Q''$ ou $Q' = Q + Q''$, suivant les cas.

63. *Des conduites alimentées à leurs deux extrémités.* — On suppose une conduite qui doit desservir sur son parcours des orifices, dont la dépense et la situation sont déterminées; elle est alimentée à ses deux extrémités par deux bassins A et B dont les niveaux sont connus. On demande quels seront les orifices alimentés par chaque bassin.

Le problème se résout par tâtonnement. On fait une hypothèse sur la position occupée par le point de la conduite où s'opère la séparation des parties qui reçoivent l'eau de chaque bassin. Ce point étant connu, il est facile, par une marche analogue à celle du n° 54, de déterminer le niveau piézométrique dans une section transversale quelconque. Si le point a été bien choisi, le niveau piézométrique doit y rester le même, quand on le détermine en partant de A ou en partant de B.

Afin d'éclaircir ces indications générales par un exemple, prenons le cas particulier où la conduite aurait un diamètre constant et devrait faire en route un service uniforme, c'est-à-dire fournir l'eau à des orifices d'égal débit, également espacés, et en nombre assez grand. Appelons :

h la hauteur du niveau de l'eau dans le bassin B, au-dessous du niveau dans le bassin A, qui sera par hypothèse le plus élevé;

y la hauteur du niveau piézométrique au point de séparation cherché C, mesurée en dessous du niveau de l'eau dans B (on admet encore ici que ces trois niveaux sont soumis à la pression atmosphérique);

L la longueur totale de la conduite, D son diamètre ;
Q la dépense totale des orifices, par seconde ;
l la distance du point de séparation à l'entrée de la conduite dans A.

Entre A et le point C, nous avons une conduite de longueur l et de diamètre D, débitant uniformément en route un volume $\frac{Ql}{L}$, sous une charge $h+y$, et sans service d'extrémité, attendu qu'au delà de C l'alimentation des orifices est donnée par le second bassin. Nous poserons donc (n° 57)

$$h+y=\frac{64b_1}{3\pi^2}\frac{Q^2l^3}{L^2D^5}.$$

On aurait de même, en considérant la portion alimentée par B, dont $L-l$ est la longueur, D le diamètre, $\frac{Q(L-l)}{L}$ la dépense uniforme en route, y la charge,

$$y=\frac{64b_1}{3\pi^2}\frac{Q^2(L-l)^3}{L^2D^5}.$$

Ces deux équations suffisent pour déterminer les inconnues l et y. On a par l'élimination de cette dernière

$$(1)\quad h=\frac{64b_1Q^2}{3\pi^2L^2D^5}[l^3-(L-l)^3]=\frac{64b_1Q^2}{3\pi^2L^2D^5}(2l-L)(L^2-lL+l^2).$$

Or quand l varie entre ses deux limites zéro et L, la quantité $lL-l^2$, d'abord nulle, croît jusqu'au maximum $\frac{1}{4}L^2$ qu'elle atteint pour $l=\frac{L}{2}$, puis décroît de nouveau jusqu'à zéro. Il en résulte que L^2-lL+l^2 est nécessairement compris entre L^2 et $\frac{3}{4}L^2$, de sorte qu'on a

$$h>\frac{16b_1Q^2}{\pi^2D^5}(2l-L)\quad\text{et}\quad h<\frac{64b_1Q^2}{3\pi^2D^5}(2l-L).$$

Soit maintenant h' la charge totale qui serait consommée dans la conduite, si le débit total Q, fourni uniquement par A, était

dépensé uniformément en route, sans service d'extrémité : on aurait (n° 57)

$$h' = \frac{64 b_1}{3 \pi^2} \frac{LQ^2}{D^5}.$$

Par suite les deux inégalités ci-dessus peuvent s'écrire

$$\frac{4h}{3h'} > \frac{2l - L}{L} \quad \text{et} \quad \frac{h}{h'} < \frac{2l - L}{L}$$

ou bien

$$l < \frac{L}{2}\left(1 + \frac{4h}{3h'}\right) \quad \text{et} \quad l > \frac{L}{2}\left(1 + \frac{h}{h'}\right).$$

De cette manière on connaît deux limites entre lesquelles on doit trouver la longueur inconnue l, ce qui permet de ne pas procéder tout à fait au hasard dans les tâtonnements qu'on fait pour résoudre l'équation du troisième degré en l. Ces deux limites mettent d'ailleurs en évidence une condition de possibilité du problème : l étant nécessairement inférieur à L, et supérieur à $\frac{1}{2} L \left(1 + \frac{h}{h'}\right)$, il faut que h soit plus petit que h'. Sans cela il est clair que l'eau du bassin A, après avoir desservi tous les orifices, arriverait encore à l'entrée de B, avec un niveau piézométrique supérieur au niveau de ce bassin, et par suite lui verserait une quantité d'eau plus ou moins forte. De plus, la condition $\frac{h}{h'} < 1$ est suffisante ; car on peut écrire l'équation (1) comme il suit :

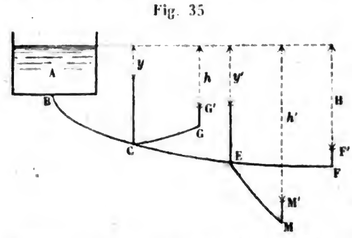
$$\frac{h}{h'} - \frac{1}{L^3}\left[l^3 - (L - l)^3\right] = 0,$$

et alors on voit que le premier membre, positif pour $l = 0$, devient négatif pour $l = L$, et par conséquent s'annule pour une valeur intermédiaire.

Après avoir trouvé l, on connaîtrait les dépenses respectives $\frac{Ql}{L}$ et $\frac{Q(L-l)}{L}$ des deux bassins A et B. On pourrait connaître également les niveaux piézométriques dans les différentes sections de la conduite, et on s'assurerait, comme il a été dit au n° 54, qu'ils sont suffisamment au-dessus des orifices correspondants.

64. *Recherche du minimum de dépense en argent dans un cas particulier.* — Le cas particulier dont nous nous occuperons ici sera celui d'une conduite maîtresse BCEF (*fig.* 35) partant d'un réservoir A et alimentant sur son parcours diverses conduites secondaires, telles que CG, EM, ... Nous traiterons la question comme s'il y avait seulement deux de ces conduites secondaires; mais la solution s'étendra sans difficulté à un nombre quelconque. On suppose connues les longueurs des diverses portions de conduite BC, CG, CE, etc., ainsi que leurs débits par seconde; on donne également les cotes de nivellement de la surface libre de l'eau dans le bassin, et des orifices placés en G, M, F, lesquels sont, comme la surface libre de A, soumis à la pression de l'atmosphère. On veut déterminer les diamètres des tuyaux BC, CG, CE, etc., de manière à obtenir les débits indiqués, en s'imposant la condition du minimum de frais d'établissement.

Fig. 35



Dans la solution ci-après, on fera abstraction de toutes les charges non employées à vaincre le frottement des tuyaux : les diamètres trouvés par ce moyen devraient ensuite subir une correction, comme on l'a déjà vu (nos 54 et 59).

Soient :

L, L', L'', l, l', les longueurs des tuyaux BC, CE, EF, CG, EM;

D, D', D'', d, d' les diamètres correspondants qui doivent être constants sur chaque branche et entre deux embranchements de la conduite maîtresse, car on a vu (n° 60) que c'est une condition de la moindre dépense en argent;

Q, Q', Q'', q, q' les débits, dont les deux premiers se déduiront sans peine de ceux des orifices G, M, F, c'est-à-dire de q, q', Q'', si ces derniers sont les données immédiates;

y, y' les cotes mesurées en dessous du niveau de l'eau dans A, des niveaux piézométriques aux points d'embranchement C, E;

h, h', H les cotes de nivellement par rapport à ce même plan de comparaison, des orifices G, M, F, relevés fictivement de $0^m,50$ à $0^m,60$; ces cotes seront alors celles des niveaux piézométriques G', M', F', immédiatement en avant des orifices (n° 54).

Les équations du problème seront alors :

1°. Pour exprimer (n° 56) que l'eau coule dans chaque tuyau avec la

dépense donnée, et la charge correspondante évaluée en fonction des inconnues auxiliaires y, y',

$$(1)\qquad y = \frac{64 b_1 Q^2 L}{\pi^2 D^5},$$

$$(2)\qquad h - y = \frac{64 b_1 q^2 l}{\pi^2 d^5},$$

$$(3)\qquad y' - y = \frac{64 b_1 Q'^2 L'}{\pi^2 D'^5},$$

$$(4)\qquad h' - y' = \frac{64 b_1 q'^2 l'}{\pi^2 d'^5},$$

$$(5)\qquad H - y' = \frac{64 b_1 Q''^2 L''}{\pi^2 D''^5};$$

2°. Pour exprimer que les frais d'établissement sont un minimum (n° 60),

$$(6)\qquad \frac{D^6}{Q^2} - \frac{d^6}{q^2} - \frac{D'^6}{Q'^2} = 0,$$

$$(7)\qquad \frac{D'^6}{Q'^2} - \frac{d'^6}{q'^2} - \frac{D''^6}{Q''^2} = 0.$$

Cela fait en tout sept équations entre les cinq inconnues principales D, D', D", d, d' et les deux inconnues auxiliaires y, y'.

Ce système d'équations se résout par tâtonnement. On fait une hypothèse sur la valeur de y ; les équations (1) et (2) donnent D et d; l'équation (6) donne alors D'; au moyen de D' on calcule $y'-y$, et partant y', par l'équation (3); connaissant y', les équations (4) et (5) fournissent d' et D" qui, conjointement avec la valeur déjà trouvée de D', doivent vérifier l'équation (7). Si la vérification ne réussit pas, on recommence un autre essai. Les calculs numériques relatifs aux cinq premières équations seront d'ailleurs facilités par la table III. Quand, par exemple, on se sera donné y, et qu'on voudra connaître D, on écrira l'équation (1) sous la forme

$$\log y - \log LQ^2 = \log \frac{64 b_1}{\pi^2 D^5}.$$

Le premier membre représente alors le logarithme du quotient obtenu en divisant la charge consommée sur un mètre courant, par le carré de la dépense : c'est un nombre immédiatement calculable. On en déterminera la valeur, qu'on cherchera dans la colonne de la table III, intitulée $\log \frac{J}{Q^2}$; en regard, sur la même ligne horizontale et à gauche de la page, on trouvera le diamètre D correspondant. Pareillement lorsqu'il s'agira,

D' étant connu, d'avoir $y'-y$ par l'équation (3), on écrira

$$\log(y'-y) - \log L'Q'^2 = \log \frac{64 b_1}{\pi^2 D'^5}.$$

La table III fournira immédiatement le second membre en fonction de D', dans la colonne intitulée $\log \frac{J}{Q^2}$; en lui ajoutant le logarithme de $L'Q'^2$, on aura celui de $y'-y$, et partant cette quantité. Quant aux équations (6) et (7), on en rendrait aussi le calcul plus facile au moyen d'une table spéciale qui donnerait D^6 en fonction de D; la table V peut à la rigueur en tenir lieu, puisqu'une élévation à la sixième puissance s'effectue en élevant d'abord le nombre donné au cube, puis ce cube au carré.

Nous allons maintenant montrer qu'il existe toujours un ensemble de valeurs réelles des inconnues, par lesquelles on satisfait à toutes les équations du problème; de sorte que les tâtonnements ci-dessus indiqués conduiront nécessairement à la solution.

En effet, supposons d'abord qu'on essaye la valeur $y=0$; on trouvera successivement $D=\infty$, $d=$ une valeur finie, $D'=\infty$, $y'=y=0$, $d'=$ une valeur finie, $D''=$ une valeur finie : donc le premier membre de l'équation (7) sera égal à l'infini positif. En second lieu, essayons une valeur y_1 qui annulerait $\frac{D^6}{Q^2} - \frac{d^6}{q^2}$ ou la quantité proportionnelle

$$L^{\frac{6}{5}} Q^{\frac{2}{5}} y^{-\frac{6}{5}} - l^{\frac{6}{5}} q^{\frac{2}{5}} (h-y)^{-\frac{6}{5}} \quad (\text{n}^\circ\ 60);$$

y_1 devra satisfaire à la relation

$$\left(\frac{L^3 Q}{y_1^3}\right)^{\frac{2}{5}} = \left[\frac{l^3 q}{(h-y_1)^3}\right]^{\frac{2}{5}},$$

d'où l'on tire

$$\frac{y_1}{h-y_1} = \frac{L\sqrt[3]{Q}}{l\sqrt[3]{q}} \quad \text{et} \quad y_1 = \frac{hL\sqrt[3]{Q}}{L\sqrt[3]{Q}+l\sqrt[3]{q}}.$$

On a $y_1 < h$; c'est donc une valeur admissible pour la hauteur y, essentiellement assujettie à être comprise entre 0 et h. L'essai de y_1 donnera D et d finis, $\frac{D'^6}{Q'^2} = 0$ (c'est-à-dire $D'=0$), $y'-y_1 = \infty$. D'ailleurs il est visible, par les équations (1) et (2), que D diminue et d augmente quand y croît de zéro à y_1; donc l'expression $\frac{D^6}{Q^2} - \frac{d^6}{q^2}$ et son égale $\frac{D'^6}{Q'^2}$, d'abord infinies pour $y=0$, décroissent simultanément d'une manière continue, tandis que, au contraire, $y'-y$ et y' augmentent de zéro à ∞. Il existera donc une valeur y_2 de y moindre que y_1, et telle, que son essai conduirait à trouver y' égal à la plus petite des hauteurs h' et H. L'un des dia-

mètres d' et D″ deviendrait alors infini; l'autre resterait fini, ainsi que D′: donc le premier membre de l'équation (7) serait l'infini négatif. Ainsi donc ce premier membre varie de $+\infty$ à $-\infty$, quand y passe de zéro à y_2; il existe donc entre ces limites une valeur de y capable de l'annuler. Il en existe d'ailleurs une seule, car en augmentant y, $y'-y$ et y' augmenteraient aussi; en vertu des équations (3), (4), (5), D′ serait décroissant, d' et D″ croissants : donc l'équation (7) ne serait plus satisfaite.

Il est bon de remarquer que pendant que l'on fait croître y de zéro à y_2, y' augmentant toujours, comme on vient de le dire, les niveaux piézométriques en C et H s'abaissent l'un en même temps que l'autre. Or pour $y=y_2$, ces niveaux se trouvent déjà suffisamment élevés pour être, le premier en dessus de G′, le second en dessus de M′ et F′ : la même chose aura donc lieu, à fortiori, pour la valeur de y (inférieure à y_2) qui satisfait aux équations. Concluons enfin que cette solution nous donnera, dans chaque branche de conduite maîtresse ou dérivée, des niveaux piézométriques descendants suivant le sens de l'écoulement, et que, par conséquent, elle n'est pas en contradiction sur ce point avec les données physiques du problème.

Mais il pourra se faire, par suite de la forme plus ou moins accidentée du profil en long des conduites, que la ligne de charge (n° 52) se trouve, sur une certaine étendue, notablement au-dessous de ce profil. C'est ce qu'on pourra toujours vérifier aisément, puisqu'on connaît les niveaux piézométriques à l'origine et à l'extrémité de chaque branche. On sait que cette circonstance a souvent des inconvénients graves et qu'il faut l'éviter en pratique. Quand elle se produit, la solution précédente ne peut donc plus être conservée; mais il serait peut-être assez difficile alors d'indiquer d'une manière générale ce qu'il y aurait à faire : cela dépendra des cas particuliers. Nous nous bornerons à dire que toute difficulté disparait dans le cas où la forme du profil est telle, qu'on peut reconnaître d'avance le point où la pression est exposée à devenir moindre que la pression atmosphérique. On se donnerait d'avance la cote du niveau piézométrique en ce point, égale à la cote du profil en long de la conduite; celle-ci se trouverait ainsi divisée en deux parties situées de part et d'autre du point en question, pour chacune desquelles on rechercherait le minimum de dépense à l'aide du procédé ci-dessus indiqué.

On obtient une grande simplification du problème considéré en général, quand les conduites de dérivation n'ont qu'une importance secondaire, en sorte qu'il n'y a pour ainsi dire d'économie à chercher que sur la conduite maîtresse. Il faut alors, dans les équations (6) et (7), supprimer les termes en d et d', ce qui donne

$$(8)\qquad \frac{D^6}{Q^2} = \frac{D'^6}{Q'^2} = \frac{D''^6}{Q''^2},$$

ou bien

$$(9)\qquad \frac{D}{\sqrt[3]{Q}} = \frac{D'}{\sqrt[3]{Q'}} = \frac{D''}{\sqrt[3]{Q''}}.$$

Tirant des équations (1), (3), (5) les valeurs de $\frac{D^5}{Q^2}$, $\frac{D'^5}{Q'^2}$, $\frac{D''^5}{Q''^2}$, et les portant dans les équations (8), celles-ci deviendront, si l'on fait abstraction des faibles variations de b_1 avec le diamètre,

$$\frac{DL}{y} = \frac{D'L'}{y'-y} = \frac{D''L''}{H-y'},$$

ou encore, eu égard à l'équation (9),

$$\frac{L\sqrt[3]{Q}}{y} = \frac{L'\sqrt[3]{Q'}}{y'-y} = \frac{L''\sqrt[3]{Q''}}{H-y'},$$

ce qui signifie que la charge consommée par mètre courant dans chaque portion de la conduite maîtresse est proportionnelle à la racine cubique du débit. On tirerait sans peine de ces relations :

$$y = H\frac{L\sqrt[3]{Q}}{L\sqrt[3]{Q}+L'\sqrt[3]{Q'}+L''\sqrt[3]{Q''}},$$

$$y' = y + H\frac{L'\sqrt[3]{Q'}}{L\sqrt[3]{Q}+L'\sqrt[3]{Q'}+L''\sqrt[3]{Q''}},$$

et la solution du problème serait exempte de tâtonnement, sauf le cas où il y aurait rencontre de la ligne de charge et de l'axe longitudinal de la conduite.

Ici se termine l'étude du mouvement permanent de l'eau dans les tuyaux; il y aurait sans doute bien d'autres questions qui pourraient offrir de l'intérêt; mais dans l'impossibilité de les traiter toutes, nous avons dû nous borner aux généralités et à quelques exemples.

CHAPITRE QUATRIÈME.

DU MOUVEMENT PERMANENT DE L'EAU DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS.

§ 1. — Variations de la vitesse aux différents points de la section transversale d'un courant rectiligne et uniforme.

65. *Généralités; faits d'expérience.* — On a vu au n° 43 que la pression, dans la section transversale d'un tuyau rempli d'un liquide qui coule uniformément et en ligne droite, varie suivant la loi hydrostatique. La même propriété existe encore en vertu de la même raison, pour un liquide coulant dans un canal découvert. Par conséquent, les lignes d'égale pression doivent être des horizontales, si l'on ne sort pas d'une même section, et s'il s'agit d'un liquide pesant; la ligne qui termine la surface libre dans le profil est donc aussi une horizontale, puisque la surface libre supporte en tous ses points une même pression, celle de l'atmosphère. Enfin, le niveau piézométrique pour tous les points d'une même section est le même : les colonnes étant censées déboucher dans l'atmosphère, se termineraient toutes à la ligne horizontale dont on vient de parler.

Mais ces conclusions ne peuvent être démontrées rigoureusement que dans le cas d'un mouvement rectiligne et uniforme. Comme cette condition n'est jamais remplie d'une manière absolue dans les cours d'eau naturels, il a pu arriver parfois, surtout avec de grandes vitesses et des courbures très-prononcées dans les filets, qu'on ait constaté des différences de niveau à la surface libre, sans sortir d'un même profil en travers. Toutefois ce sont là des cas exceptionnels, et, en pratique, ce qui a été dit tout à l'heure pour les courants rectilignes et uniformes peut approximativement s'étendre à des courants quelconques.

Depuis longtemps l'expérience a fait connaître que les vi-

tesses aux différents points d'une même section d'un cours d'eau ne sont pas les mêmes. La vitesse maximum V a lieu à la surface, vers le point qui répond à la plus grande profondeur; la vitesse minimum a lieu en quelque point du fond; nous nommerons W celle du point situé au fond, sur la même verticale que celui dont la vitesse est V. On appelle vitesse moyenne celle qui, multipliée par l'aire de la section, donne le débit ou la dépense du cours d'eau, c'est-à-dire le volume qui traverse la section pendant l'unité de temps. En désignant par U cette dernière vitesse, Dubuat a proposé la relation empirique

$$(1) \qquad U = \frac{1}{2}(V + W);$$

d'un autre côté, de Prony a cherché le rapport entre U et V, et l'a trouvé variable avec V : les expériences de divers hydrauliciens l'ont conduit à poser

$$(2) \qquad U = V \cdot \frac{V + 2,37}{V + 3,15}.$$

Si l'on calcule le rapport $\frac{U}{V}$ en attribuant diverses valeurs à V, voici ce qu'on trouve :

$V = 0^m,00$	$0^m,50$	$1^m,00$	$1^m,50$	$2^m,00$	$2^m,50$
$\frac{U}{V} = 0,75$	$0,79$	$0,81$	$0,83$	$0,85$	$0,87$

On voit par conséquent que ce rapport, variable de 0,75 à 1,00, ne s'écarte pas beaucoup de 0,80 dans les circonstances ordinaires, où la vitesse est modérée, sans être très-petite : aussi beaucoup de personnes se contentent de la relation simple

$$(3) \qquad U = 0,80\,V.$$

Il serait difficile de croire à la complète généralité des formules (1), (2), (3), qui ne tiennent aucun compte de toutes les circonstances par lesquelles un cours d'eau peut différer d'un autre, et notamment des différences dans la forme et la grandeur des sections transversales. D'ailleurs, les expériences de Dubuat, qui ont contribué à l'établissement de ces formules,

ont été faites dans des canaux en bois de petites dimensions, qui ne pouvaient guère être assimilés aux cours d'eau naturels.

M. Defontaine, ancien inspecteur général des Ponts et Chaussées, a observé les vitesses du Rhin, en divers points, tous situés sur une même verticale. Dans l'une de ces expériences, il a trouvé des vitesses qui pouvaient être assez bien représentées par la formule

$$v = 1,226 - 0,175 y^2,$$

dans laquelle v désigne la vitesse répondant à la profondeur y au-dessous de la surface libre. Voici en effet le résultat de la comparaison entre l'expérience et la formule :

PROFONDEURS y.	VITESSES OBSERVÉES.	VITESSES CALCULÉES.
m	m	m
0,00	1,226	1,226
0,20	1,218	1,219
0,40	1,198	1,198
0,60	1,167	1,163
0,80	1,125	1,114
1,00	1,057	1,051
1,20	0,950	0,974
1,40	0,880	0,883
1,60		0,832

La plus grande différence entre l'observation et le calcul aurait lieu pour la vitesse à la profondeur de $1^m,20$, et serait $0^m,024$; la différence moyenne, calculée sans faire attention au signe, serait seulement de $0^m,006$.

66. *Recherche théorique de la loi des vitesses dans une section, la ligne de fond étant supposée horizontale et de largeur indéfinie.* — Nous admettons que le fond du cours est un plan dont les horizontales, perpendiculaires au fil d'eau, ont une largeur indéfinie. Sur ce plan, et suivant la ligne de plus grande pente, glisse une première couche de liquide infiniment mince ; sur la première couche glisse parallèlement une seconde, sur la seconde une troisième, et ainsi de suite. Les différents points d'une même couche sont supposés animés de la même vitesse, parallèlement à

la ligne de plus grande pente du fond. Il s'agit de chercher comment variera la vitesse d'une couche à l'autre.

On peut suivre ici une marche tout à fait analogue à celle que nous avons indiquée au n° 43, lorsqu'il s'agissait des tuyaux cylindriques. En appelant

φ la force retardatrice rapportée à l'unité de masse subie à un certain instant par une molécule quelconque en vertu de la viscosité;
ζ la pente superficielle totale entre deux sections tranversales séparées par une distance L;
H la profondeur totale du cours d'eau;
y la distance d'un point quelconque à la surface libre;
v la vitesse en ce point;
V la vitesse à la surface;
W celle qui a lieu au fond;
U la vitesse moyenne;
$f(W)$ (*) une fonction représentant la résistance du lit par mètre carré;
Π le poids du mètre cube d'eau;
g l'accélération des corps pesants dans le vide :

On reconnaîtrait d'abord que φ est invariable sur le parcours d'une molécule, puisque celle-ci se trouve constamment dans des circonstances identiques, et l'on aurait par le théorème de Bernoulli (n° 15)

$$\zeta = \frac{\varphi L}{g},$$

ce qui montre que φ est constant pour toutes les molécules. Par suite sa valeur peut s'obtenir en divisant le frottement du lit sur un mètre de largeur et la longueur L, soit $Lf(W)$, par la masse totale $\frac{\Pi}{g}LH$ sur laquelle ce frottement se fait sentir; donc on a

$$\varphi = \frac{g\zeta}{L} = \frac{g}{\Pi}\frac{f(W)}{H},$$

ou bien

(4) $$H\frac{\zeta}{L} = \frac{1}{\Pi}f(W),$$

équation qui déterminerait W. Une troisième expression de φ s'obtient

(*) Les généralités exposées au commencement du chapitre III sur le frottement des liquides contre les parois solides et des couches liquides sur celles qui leur sont contiguës, sont applicables au cas actuel. Nous y renvoyons le lecteur.

encore en considérant le frottement mutuel des couches planes qui glissent les unes sur les autres. Au moyen des mêmes inductions employées au n° 42, nous serions conduit à représenter cette force, rapportée au mètre carré, pour deux couches contiguës dont les vitesses sont v et $v+\frac{dv}{dy}dy$, par $\varepsilon\left(-\frac{dv}{dy}\right)^m$, ε étant une constante pour un même cours d'eau, et m un exposant numérique égal à 1 ou à 2, suivant que l'on adopte les idées de Navier ou de M. Darcy. Dès lors la couche située à la profondeur y, ayant une épaisseur dy, une longueur L et une largeur égale à l'unité, supporte sur sa face supérieure une action $L\varepsilon\left(-\frac{dv}{dy}\right)^m$, sur sa face inférieure une action de sens contraire, égale à la précédente, augmentée de sa différentielle relativement à y. La résultante est

$$L\varepsilon\frac{d}{dy}\left[\left(-\frac{dv}{dy}\right)^m\right]dy;$$

en la divisant par la masse $\frac{\Pi}{g}L\,dy$, on obtient φ.

Donc

$$\varphi=\frac{g\varepsilon}{\Pi}\frac{d}{dy}\left[\left(-\frac{dv}{dy}\right)^m\right].$$

et par suite

$$\frac{\zeta}{L}=\frac{\varepsilon}{\Pi}\frac{d}{dy}\left[\left(-\frac{dv}{dy}\right)^m\right].$$

Cette équation est facile à intégrer. On trouve d'abord

$$\left(-\frac{dv}{dy}\right)^m=\frac{\Pi\zeta}{\varepsilon L}y+\text{const.};$$

la constante a pour valeur ce que devient $\left(-\frac{dv}{dy}\right)^m$ pour $y=0$, c'est-à-dire à la surface libre. Or cette quantité doit être nulle, car autrement, en la désignant par C, la couche du dessus éprouverait de la part de la suivante un frottement fini $L\varepsilon C$; et comme il y a seulement, outre cette force, l'action de la pesanteur $\Pi L\,dy$, laquelle est infiniment petite, l'équilibre n'aurait pas lieu et le mouvement de la couche ne serait pas uniforme. Donc la constante de la dernière équation doit être nulle; par suite on a

$$-\frac{dv}{dy}=\left(\frac{\Pi\zeta}{\varepsilon L}\right)^{\frac{1}{m}}y^{\frac{1}{m}}.$$

et, en intégrant de nouveau,

$$(5) \qquad v = V - \left(\frac{H\zeta}{\varepsilon L}\right)^{\frac{1}{m}} \frac{m}{m+1} y^{\frac{m+1}{m}},$$

expression tout à fait analogue à la formule (5) du nº 43. D'ailleurs W, qui est déjà connu, s'obtiendrait en faisant dans cette équation $y = H$; on a donc, pour déterminer V,

$$(6) \qquad W = V - \left(\frac{H\zeta}{\varepsilon L}\right)^{\frac{1}{m}} \frac{m}{m+1} H^{\frac{m+1}{m}};$$

d'où l'on déduit encore

$$(7) \qquad \frac{V - v}{V - W} = \left(\frac{y}{H}\right)^{\frac{m+1}{m}}.$$

Quand on fait $m = 1$, l'équation (7) donne

$$v = V - (V - W)\left(\frac{y}{H}\right)^2,$$

relation dont la forme s'accorde avec l'expérience de M. Defontaine citée plus haut. Mais M. Darcy, qui a fait sur les canaux découverts de nombreuses expériences, non encore publiées, a trouvé que l'on a plus exactement

$$\frac{V - v}{V - W} = \left(\frac{y}{H}\right)^{\frac{3}{2}},$$

d'où résulterait

$$m = 2.$$

Le débit total sur la largeur égale à l'unité pouvant s'exprimer par UH et par $\int_0^H v\,dy$, on a la vitesse moyenne

$$U = \frac{1}{H}\int_0^H v\,dy,$$

ou, après avoir remplacé v par sa valeur tirée de l'équation (7),

$$(8) \qquad \begin{cases} U = \dfrac{1}{H}\displaystyle\int_0^H \left[V - (V - W)\left(\frac{y}{H}\right)^{\frac{m+1}{m}}\right] dy \\ \quad = V - \dfrac{m}{2m+1}(V - W) = \dfrac{(m+1)V + mW}{2m+1}. \end{cases}$$

Cette expression de U n'est pas tout à fait d'accord avec la formule (1) de Dubuat, car on peut l'écrire

$$U = \frac{1}{2}\left(V + W\right) + \frac{1}{2(2m+1)}(V - W);$$

la formule (1), dans le cas de lits très-larges et à fond plat, semblerait donc exiger que la profondeur fût petite, auquel cas $V - W$ ne serait pas très-notable et $\frac{1}{2(2m+1)}(V - W)$ pourrait être négligé.

Si dans la valeur (8) de U on remplace W par l'expression (6), on trouve

$$U = V - \frac{m^2}{(m+1)(2m+1)}\left(\frac{\Pi\zeta}{\varepsilon L}\right)^{\frac{1}{m}} H^{\frac{m+1}{m}};$$

or en nommant y_1 la profondeur du filet qui possède la vitesse moyenne, on aurait aussi, d'après l'équation (5),

$$U = V - \left(\frac{\Pi\zeta}{\varepsilon L}\right)^{\frac{1}{m}} \frac{m}{m+1} y_1^{\frac{m+1}{m}};$$

on tire de là

$$y_1 = H\left(\frac{m}{2m+1}\right)^{\frac{m}{m+1}},$$

soit $y_1 = 0,577\,H$ ou $y_1 = 0,543\,H$, suivant qu'on fait $m = 1$ ou $m = 2$. En attribuant encore à m les valeurs hypothétiques

$$3,\ 4,\ 5,\ 6, \ldots, \infty,$$

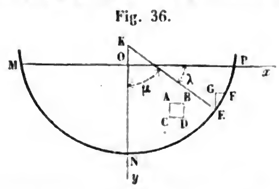
on trouverait pour les valeurs correspondantes de $\frac{y_1}{H}$

$$0,530,\quad 0,523,\quad 0,518,\quad 0,515, \ldots,\quad 0,500.$$

Ainsi donc, quel que soit l'exposant m, entre 1 et ∞, le rapport en question s'écartera peu de 0,55, c'est-à-dire que le filet possédant la vitesse moyenne se trouvera environ aux 0,55 de la profondeur totale, à partir de la surface libre.

67. *Loi théorique des vitesses dans une section de forme quelconque.* — Nous allons d'abord établir l'équation différentielle qui exprime la loi demandée; nous verrons ensuite comment on pourrait l'intégrer au moyen de quelques hypothèses particulières.

Fig. 36.



Soit MNP (*fig.* 36) la section transversale du courant; traçons dans son plan deux axes de coordonnées rectangulaires, l'un Oy vertical et descendant, l'autre coïncidant avec la ligne MP, suivant laquelle la surface libre est coupée par le plan de la section. Imaginons celle-ci décomposée en éléments infiniment petits, tels que

ABCD, par des parallèles aux axes. Conservons aux notations le sens défini au n° 66. Un prisme dont ABCD serait la section droite et dont la longueur, mesurée parallèlement aux vitesses des molécules, serait désignée par L, va éprouver sur ses quatre faces latérales les effets du frottement des couches voisines, qui produiront les forces ci-après, savoir :

Sur la face projetée en AC, une force dans le sens du mouvement, que nous représenterons par $L\varepsilon' dy\left(-\frac{dv}{dx}\right)^m$, en nous fondant sur l'analogie entre la question actuelle et celle du n° 66; sur la face opposée BD, une force de sens contraire, exprimée par

$$L\varepsilon' dy\left\{\left(-\frac{dv}{dx}\right)^m + \frac{d}{dx}\left[\left(-\frac{dv}{dx}\right)^m\right]dx\right\},$$

ce qui fera au total une résistance $L\varepsilon' dx\,dy\,\frac{d}{dx}\left[\left(-\frac{dv}{dx}\right)^m\right]$;

Sur l'ensemble des faces projetées en AB et CD, une force résistante exprimée pareillement par $L\varepsilon\, dx\,dy\,\frac{d}{dy}\left[\left(-\frac{dv}{dy}\right)^m\right]$.

Pour se conformer à quelques indications que M. Darcy a déduites de ses expériences sur les canaux découverts, on ne suppose pas ici $\varepsilon = \varepsilon'$; ce sont seulement deux quantités constantes pour un même courant (*). La masse du prisme liquide étant d'ailleurs $\frac{\Pi}{g}L\,dx\,dy$, on aura ici pour la valeur de φ

$$\varphi = \frac{g}{\Pi}\left\{\varepsilon'\frac{d}{dx}\left[\left(-\frac{dv}{dx}\right)^m\right] + \varepsilon\frac{d}{dy}\left[\left(-\frac{dv}{dy}\right)^m\right]\right\}.$$

Or, en raisonnant comme aux n°s 43 et 66, on trouverait encore

$$\varphi = \frac{g\zeta}{L};$$

donc on peut écrire l'équation

$$(9)\qquad \frac{\Pi\zeta}{L} = \varepsilon'\frac{d}{dx}\left[\left(-\frac{dv}{dx}\right)^m\right] + \varepsilon\frac{d}{dy}\left[\left(-\frac{dv}{dy}\right)^m\right].$$

Indépendamment de cette équation aux différences partielles, où la fonction v des deux variables indépendantes x et y est seule inconnue, il y

(*) Les expériences de M. Darcy sur les canaux sont encore inédites, mais il a bien voulu nous en communiquer verbalement quelques résultats. Malheureusement la mort est venue arrêter les travaux de cet ingénieur éminent : nous espérons cependant que ses recherches seront publiées et qu'elles ne seront pas perdues pour la science.

a des équations particulières pour les filets qui glissent le long de la paroi et ceux qui sont à la surface libre. Soit en effet $\overline{EF} = d\sigma$ un élément de paroi, dont la normale EK fait avec les axes les angles λ et μ ; on aura dans le triangle EFG le côté vertical $\overline{EG} = d\sigma \cos\lambda$ et le côté horizontal $\overline{FG} = d\sigma \cos\mu$. Par suite, si EFG est considéré comme la section droite d'un prisme de liquide parallèle au courant et de longueur L, ce prisme supportera respectivement sur les faces EG, FG des frottements qui tendent à l'entraîner dans le sens de la vitesse, ayant pour valeur

$$L\varepsilon' d\sigma \cos\lambda \left(-\frac{dv}{dx}\right)^m, \quad L\varepsilon\, d\sigma \cos\mu \left(-\frac{dv}{dy}\right)^m,$$

et sur l'élément de paroi $d\sigma$ lui-même, un autre frottement en sens contraire, dont nous supposerons que la valeur est $L d\sigma f(v)$, toujours à cause des inductions du n° 42. Or, par suite de l'uniformité du mouvement, ces trois forces doivent se faire équilibre; car, d'une part, elles sont, avec les pressions sur les sections droites extrêmes du prisme, et une composante de la pesanteur, les seules forces qui sollicitent le prisme parallèlement au courant; d'autre part, les pressions extrêmes sont évidemment égales et se font équilibre (puisque toutes les sections présentent des phénomènes identiques), et la pesanteur ne donne qu'une force $\frac{1}{2}\Pi L d\sigma^2 \cos\lambda \cos\mu$ infiniment petite relativement aux précédentes. Donc il faut qu'on ait en tout point de la paroi

$$(10) \qquad \varepsilon' \cos\lambda \left(-\frac{dv}{dx}\right)^m + \varepsilon \cos\mu \left(-\frac{dv}{dy}\right)^m = f(v),$$

$f(v)$ étant une fonction connue. De même, si l'on suppose que l'ordonnée y du point A soit nulle, de manière que AB soit placé sur l'axe des x, la face CD supportera un frottement $L\varepsilon dx \left(-\frac{dv}{dy}\right)^m$ infiniment petit du premier ordre; en admettant qu'on néglige le frottement entre l'air et la surface libre du liquide, il faudra que cette force $L\varepsilon dx \left(-\frac{dv}{dy}\right)^m$ soit nulle, car l'ensemble des frottements sur les faces AC et BD, aussi bien que l'action de la pesanteur, ne produisent que des forces infiniment petites du second ordre. Donc, pour tous les points situés sur MP, $\frac{dv}{dy}$ doit s'annuler, ou bien l'on a

$$(11) \qquad \frac{dv}{dy} = 0,$$

quand $y = 0$.

Les deux conditions (10) et (11) serviront à déterminer les fonctions arbitraires introduites par l'intégration de l'équation (9).

Cette intégration présente de la difficulté quand m n'est pas égal à 1 : nous nous bornerons donc à ce cas. Alors l'équation (9) devient

$$\frac{\Pi\zeta}{L} + \varepsilon' \frac{d^2 v}{dx^2} + \varepsilon \frac{d^2 v}{dy^2} = 0. \tag{12}$$

On en trouve d'abord une solution particulière de la forme $v = \gamma y^2$; il suffira de déterminer la constante γ par l'équation $\frac{\Pi\zeta}{L} + 2\gamma\varepsilon = 0$, qui donne $\gamma = -\frac{\Pi\zeta}{2L\varepsilon}$; ainsi l'expression $v = -\frac{\Pi\zeta}{2L\varepsilon} y^2$ satisfait à l'équation (12). A l'aide de cette solution particulière on fait disparaître le terme constant $\frac{\Pi\zeta}{L}$; en effet, si l'on pose

$$v = -\frac{\Pi\zeta}{2L\varepsilon} y^2 + u,$$

l'inconnue auxiliaire u devra satisfaire à la relation

$$\varepsilon' \frac{d^2 u}{dx^2} + \varepsilon \frac{d^2 u}{dy^2} = 0, \tag{13}$$

dont l'intégrale générale est connue. On a, en appelant ψ et ψ_1 deux fonctions arbitraires et désignant par θ le symbole imaginaire $\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}}\sqrt{-1}$,

$$u = \psi(x + \theta y) + \psi_1(x - \theta y);$$

l'intégrale générale de l'équation (12) pourra donc être mise sous la forme

$$v = -\frac{\Pi\zeta}{2L\varepsilon} y^2 + \psi(x + \theta y) + \psi_1(x - \theta y). \tag{14}$$

Reste à déterminer ψ et ψ_1. Pour cela, on sait d'abord que $\frac{dv}{dy}$ s'annule pour $y = 0$; or, d'après l'équation (14), on a généralement

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{\Pi\zeta}{L\varepsilon} y + \theta\psi'(x + \theta y) - \theta\psi_1'(x - \theta y),$$

ψ' et ψ_1' étant des fonctions dérivées de ψ et de ψ_1. Faisant $y = 0$ dans cette équation, nous en tirons

$$\psi'(x) - \psi_1'(x) = 0,$$

ce qui montre, puisque x a une valeur indéterminée, que les fonctions ψ et ψ_1 sont égales à une constante près. Nous la désignerons par C, et nous

poserons en conséquence

$$(15) \qquad v = -\frac{\Pi\zeta}{2L\varepsilon}y^2 + C + \psi(x+\theta y) + \psi(x-\theta y),$$

expression dans laquelle figure une seule fonction arbitraire. Il serait aisé de la faire disparaître si l'on connaissait par des observations directes la loi des vitesses à la surface libre du courant : cette loi étant représentée par une fonction connue de x, $F(x)$, il faudrait qu'on eût

$$F(x) = C + 2\psi(x),$$

puisque le second membre est bien ce que devient v pour $y = 0$. On tire de là

$$\psi(x) = \frac{1}{2}F(x) - \frac{1}{2}C;$$

par suite, x étant quelconque dans cette identité et pouvant être remplacé par une autre valeur, telle que $x+\theta y$ ou $x-\theta y$,

$$\psi(x+\theta y) = \frac{1}{2}F(x+\theta y) - \frac{1}{2}C,$$

$$\psi(x-\theta y) = \frac{1}{2}F(x-\theta y) - \frac{1}{2}C.$$

Il est dès lors facile de chasser ψ de l'équation (15), qui devient

$$(16) \qquad v = -\frac{\Pi\zeta}{2L\varepsilon}y^2 + \frac{1}{2}F(x+\theta y) + \frac{1}{2}F(x-\theta y).$$

Le second membre de cette dernière équation ne contient des imaginaires qu'en apparence.

Telle est la valeur de v, en fonction de x et de y, pour un point quelconque de la section transversale, quand on admet, d'après Navier, que $m = 1$. Pour y arriver, nous n'avons fait aucun usage de l'équation (10), applicable à un point quelconque de la courbe MNP. Si dans cette équation on substitue la valeur (16) de v, elle ne contiendra plus que les coordonnées x, y, et sera par conséquent l'équation du contour MNP. Ce contour pouvant être observé et dessiné, on aurait là un moyen de vérifier le plus ou moins d'exactitude des hypothèses théoriques; ou bien encore, si $f(v)$ n'était pas une fonction connue, on aurait un procédé pour la déterminer.

Puisqu'on peut trouver le contour MNP quand on connaît l'expression (16) de v, réciproquement on conçoit que si ce contour a une forme fixée d'avance, v se trouve par là même déterminée sans qu'on ait besoin de connaître la fonction F. Dans un Mémoire approuvé par l'Académie des Sciences, M. Sonnet, à qui nous avons emprunté le fond de l'analyse pré-

cédente, a montré que si le courant a une section rectangulaire, v peut être approximativement représenté par l'expression du second degré

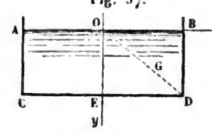
$$(17)\qquad v = V - \alpha x^2 - \beta y^2,$$

dans laquelle on suppose que l'axe des y passe par le milieu du lit, et que V, α, β sont des constantes. Il faut d'ailleurs, pour que ce soit là une solution de l'équation (12), qu'on ait

$$(18)\qquad \frac{\Pi\zeta}{L} - 2\alpha\varepsilon' - 2\beta\varepsilon = 0.$$

Soient maintenant ABCD (*fig.* 37) la section transversale rectangulaire;

Fig. 37.



Oy la verticale menée par le milieu O de AB, prise pour axe des y; $\overline{OE} = H$ la profondeur; $\overline{AB} = l$ la largeur; W la vitesse en E. On aurait, d'après l'équation (17),

$$W = V - \beta H^2,$$

d'où résulte

$$\beta = \frac{V - W}{H^2};$$

l'équation (18) donnerait alors la valeur de α, et v se trouverait exprimé en fonction de V, W, et des quantités $\frac{\Pi\zeta}{L}$, ε, ε'.

Si l'on veut avoir la vitesse moyenne U, il faudra poser l'équation

$$lHU = \int\int v\,dx\,dy = \int\int (V - \alpha x^2 - \beta y^2)\,dx\,dy,$$

l'intégrale double devant être étendue à tous les éléments de la surface ABCD. On intègre d'abord pour une tranche parallèle aux x; puis on fait la somme pour toutes les tranches sur la hauteur H; cela donne

$$\int\int (V - \alpha x^2 - \beta y^2)\,dx\,dy = \int_0^H dy \int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} (V - \alpha x^2 - \beta y^2)\,dx$$

$$= \int_0^H dy \left(Vl - \frac{1}{12}\alpha l^3 - l\beta y^2\right) = \left(VlH - \frac{1}{12}\alpha l^3 H - \frac{1}{3} l\beta H^3\right).$$

Par suite, on trouve

$$U = V - \frac{1}{12}\alpha l^2 - \frac{1}{3}\beta H^2.$$

Cette vitesse sera celle du point G, situé sur OD, à la distance

$$\overline{OG} = \overline{OD}\sqrt{\frac{1}{3}},$$

à partir du point O, car en G on aura

$$x = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}, \quad y = \mathrm{H}\sqrt{\frac{1}{3}},$$

et à ces coordonnées répond, d'après l'équation (17), une valeur de la vitesse égale à celle trouvée pour U. Il est donc possible d'observer directement la vitesse moyenne en prenant celle d'un filet convenablement placé dans le courant.

Si l'on nomme W' et W'' les vitesses en B et D, on aura les trois égalités

$$\mathrm{W} = \mathrm{V} - \beta \mathrm{H}^2,$$

$$\mathrm{W}' = \mathrm{V} - \frac{1}{4}\alpha l^2,$$

$$\mathrm{W}'' = \mathrm{V} - \frac{1}{4}\alpha l^2 - \beta \mathrm{H}^2;$$

on en conclut aisément les suivantes :

$$\mathrm{U} = \frac{1}{3}(\mathrm{V} + \mathrm{W} + \mathrm{W}'),$$

$$\mathrm{U} = \frac{1}{3}(2\mathrm{V} + \mathrm{W}''),$$

qui fournissent aussi des moyens simples pour déduire U de l'observation de vitesses en des points déterminés. La dernière relation donne le rapport de la vitesse moyenne à la vitesse maximum

$$\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{\mathrm{W}''}{\mathrm{V}};$$

et comme W'' est nécessairement positif et plus petit que V, ce rapport est compris entre $\frac{2}{3}$ et 1. On voit que toutes ces formules ne sont pas parfaitement d'accord avec les formules (1), (2) et (3) données par Dubuat et de Prony.

68. *Des constantes ε, ε' et de la fonction $f(v)$.* — Les moyens indiqués au n° 45 s'appliquent aussi bien à la recherche de ε, ε' et $f(v)$ pour les canaux découverts. Suivant M. Sonnet, qui adopte l'hypothèse de Navier, ε serait égal à ε', et indépendant de la forme et des dimensions du courant; sa valeur serait donc naturellement égale à $\frac{1}{3,2}$, comme pour les tuyaux fermés. La formule empirique

$$f(v) = 0,019v + 0,371v^2$$

s'appliquerait également aux lits demi-circulaires. Suivant M. Darcy, ε serait différent de ε', et ces deux quantités varieraient d'un canal à l'autre; dans les canaux de largeur indéfinie, et à profondeur H constante (n° 66), le coefficient ε de la viscosité serait proportionnel au carré de cette dimension; pour les canaux rectangulaires (n° 67), ε' serait proportionnel au carré de la demi-largeur et ε au carré de la profondeur. Mais à cet égard il se présente les mêmes objections et les mêmes doutes qu'on a déjà exprimés dans une autre occasion (*voir* la note de la page 113).

§ II. — Formules pratiques pour le mouvement uniforme de l'eau dans les canaux découverts.

69. *Expression du frottement de la paroi, en fonction de la vitesse moyenne.* — Quoique le frottement de la paroi, rapporté en chaque point à l'unité de surface, doive être, en vertu des raisons exposées au n° 42, une fonction de la vitesse du liquide immédiatement en contact, on a trouvé plus commode de le représenter par une fonction de la vitesse moyenne, ce qui est peut-être moins rationnel, mais cependant suffisamment exact en pratique. Soient donc, dans un courant à mouvement uniforme,

U la vitesse moyenne;
L la longueur entre deux sections;
χ le périmètre de la portion du profil occupée par l'eau;

χ sera une quantité constante, toutes les sections devant être identiques. Nous admettrons que le frottement sur la surface $L\chi$, mouillée par l'eau, dans l'intervalle considéré, a pour expression $L\chi F(U)$, la fonction F étant à déterminer par expérience. De Prony et Eytelwein ont attribué à F (U) l'expression $\Pi(aU + bU^2)$, dans laquelle Π désigne le poids du mètre cube d'eau, a et b deux coefficients qui ont pour valeurs :

Suivant de Prony... $a = 0,000044$, $b = 0,000309$,
Suivant Eytelwein.. $a = 0,000024$, $b = 0,000366$.

M. de Saint-Venant a proposé l'expression monôme

$$F(U) = \Pi . cU^m.$$

dans laquelle il fait l'exposant $m = \frac{21}{11}$ et le coefficient $c = 0,000401$. Diverses personnes ont adopté, à l'exemple de Tadini et des ingénieurs italiens, la valeur plus simple

$$F(U) = \Pi.\ 0,0004\, U^2.$$

D'après les expériences de M. Darcy sur les tuyaux, il paraît bien vraisemblable que F (U) doit pouvoir être représenté par le monôme $\Pi b_1 U^2$, b_1 étant une quantité constante pour un même cours d'eau, mais variable probablement avec la forme et les dimensions du lit. Dans le cas d'un tuyau de diamètre D, on avait (nº 47)

$$b_1 = 0,000507 + \frac{0,00001294}{D};$$

si un lit de canal était assimilable à un tuyau de grand diamètre, on devrait prendre $b_1 = 0,000507$, mais attendu que nous ignorons encore la valeur déduite par M. Darcy de ses expériences, et que généralement on attribue à b_1 une valeur moindre, nous prendrons seulement $b_1 = 0,0004$, comme les ingénieurs italiens.

70. *Relation entre la pente, la vitesse moyenne et les dimensions de la section.* — Nous supposons un courant qui coule dans un lit à section et à pente constantes, avec un mouvement uniforme. Les vitesses étant les mêmes dans toutes les sections et la dépense ne variant pas non plus, il est nécessaire que l'eau mouille partout la même portion de la coupe transversale du lit, en sorte que la pente longitudinale de celui-ci est la même que la pente à la surface du liquide.

Nous appellerons

i cette pente, égale au quotient $\frac{\zeta}{L}$ de l'abaissement ζ du niveau de l'eau entre deux sections, divisé par la distance L qui les sépare;

Ω la surface constante de la section du courant; χ son périmètre;

R le quotient $\frac{\Omega}{\chi}$, dit *rayon moyen* de la section, parce que

dans le cas où elle devient demi-circulaire le rayon moyen est la moitié du rayon du cercle, c'est-à-dire la moyenne entre les rayons extrêmes des couches concentriques.

En nous reportant aux raisonnements des nos 43 et 66, nous verrons encore ici que la force retardatrice φ, agissant sur une molécule quelconque, en vertu de la viscosité, et rapportée à l'unité de masse, a pour valeur, d'une part $\frac{g\zeta}{L}$ ou gi, d'autre part le quotient du frottement du lit $L\chi F(U)$ par la masse totale $\frac{\Pi}{g}\Omega L$ sur laquelle il est exercé, soit $g\frac{\chi}{\Pi\Omega}F(U)$; l'égalité entre ces deux valeurs donnera donc, après avoir remplacé $\frac{\chi}{\Omega}$ par $\frac{1}{R}$,

$$Ri = \frac{1}{\Pi}F(U). \quad (1)$$

Les raisonnements qui servent à démontrer cette équation supposent, à la rigueur, le courant rectiligne; mais on peut l'appliquer approximativement si la courbure n'est pas très-prononcée.

Si dans la formule (1) on remplace $F(U)$ par $\Pi b_1 U^2$ (no 69) on trouve

$$Ri = b_1 U^2,$$

d'où résulte, en faisant $b_1 = 0,0004$, la formule de Tadini,

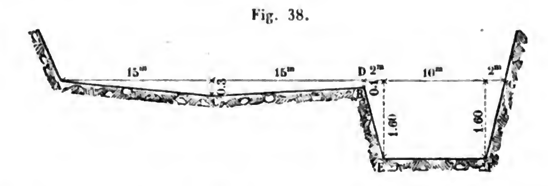
$$U = 50\sqrt{Ri}. \quad (2)$$

71. *Observation sur l'emploi des formules* (1) *et* (2), *dans le cas de lits très-accidentés.* — Comme nous l'avons déjà dit au no 69, l'emploi de l'expression $F(U)$ pour représenter le frottement du lit par mètre carré n'est pas complétement rationnel; et en effet si le lit est très-accidenté, les filets contigus à la paroi pourront avoir des vitesses très-différentes entre elles, et le frottement par mètre carré ne serait pas le même partout, comme le suppose ladite expression. Il faut donc en pratique s'attendre à des anomalies. En voici un exemple cité par M. Belanger (*) :

(*) Cours lithographie de l'École des Ponts et Chaussées, 1850.

Soit un courant uniforme, dont le profil en travers serait

Fig. 38.



défini par la *fig.* 38 et dont la pente i serait 0,0005. On aurait ici

L'aire

$$\Omega = 15.0,15 + 15.0,20 + 1,70 + 16 + 1,60 = 24^{mq},55.$$

Le périmètre

$$\chi = 30 + \sqrt{2^2 + (1,6 - 0,1)^2} + 10 + \sqrt{2^2 + (1,6)^2} = 45^m,06,$$

$$R = \frac{\Omega}{\chi} = 0^m,545,$$

$$Ri = 0,0002725.$$

Par suite la formule (2) nous donnerait

$$U = 0^m,825;$$

la dépense Q serait donc

$$U\Omega = 20^{mc},25.$$

Maintenant supposons que par une cloison verticale de $0^m,10$ en B, on partage le courant en deux autres bien distincts; cela ne produirait qu'une faible altération de dépense, et, en tout cas, il y aurait diminution, puisqu'on a augmenté le frottement. Voyons si le calcul indiquera un résultat dans ce sens.

Or nous aurons :

1°. Pour la portion ACBD,

$$\Omega' = 5^{mq},25, \quad \chi' = 30^m,10, \quad R' = 0^m,174, \quad R'i = 0,0000870,$$

d'où résulte

$$U' = 0^m,466 \quad \text{et la dépense} \quad Q' = 2^{mc},35;$$

2°. Pour la portion DBEFG,

$$\Omega''=19^{mq},30,\quad \chi''=15^{m},16,\quad R''=1^{m},273,\quad R''i=0,0006365,$$

d'où résulte

$$U''=1^{m},261 \quad \text{et} \quad Q''=24^{mc},34.$$

La dépense totale serait donc $Q'+Q''$ ou $26^{mc},7$, tandis que l'application pure et simple de la formule (2) n'a donné que $20^{mc},25$ ou 0,76 du second résultat, lequel serait probablement plus approché de la vérité. En effet, les deux lits partiels ACBD, DBEFG ont des formes analogues à celles qui existaient dans les expériences ayant servi à l'évaluation du coefficient b_1.

Cet exemple montre comment il faudrait opérer dans des cas analogues, comme celui d'une rivière débordée. Cependant il y aurait alors d'autres causes d'incertitude; ce sont les plantations, maisons et autres accidents quelconques pouvant faire obstacle à l'écoulement.

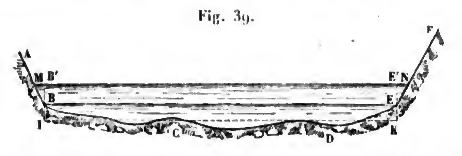
Certains lits de rivières ou de canaux produisent en été des herbes abondantes qui occupent quelquefois une portion notable de la section et produisent une élévation de l'eau malgré la diminution de dépense. L'influence de ces herbes peut difficilement être appréciée.

72. *Problèmes divers qui se résolvent par la formule du mouvement uniforme.* — Parmi les problèmes relatifs au mouvement uniforme de l'eau dans les canaux, nous étudierons les quatre suivants :

1°. *Étant données la section transversale d'un lit prismatique à pente constante, la pente et la dépense, trouver la hauteur à laquelle s'élève l'eau dans chaque section, quand le mouvement est supposé uniforme.* — Ce problème peut se résoudre par tâtonnement : une hypothèse faite sur la position du niveau de l'eau relativement au lit permet de calculer la section Ω du courant, le périmètre mouillé χ, le rayon moyen $\frac{\Omega}{\chi}$, et enfin la vitesse U égale au quotient $\frac{Q}{\Omega}$ de la dépense donnée Q par la section Ω; par suite on vérifie si l'équation (1) ou l'équation (2) est satisfaite. Dans le cas contraire, on procède à un autre essai.

Dans l'hypothèse d'un lit ayant une largeur assez grande comparativement à la profondeur, le calcul se simplifie et devient plus direct. Soient ABCDEF (*fig* 39) le profil du lit,

Fig. 39.



et MN le niveau cherché de l'eau dans ce profil. Nous admettons que, en dessous d'une horizontale connue BE, la surface BCDE est équivalente au rectangle BIKE; que $\overline{B'I}$ est une petite fraction de $\overline{BE}$; que les talus BM, EN, situés au-dessus de BE, ont des pentes assez notables, pour que la longueur $\overline{MN}$ soit relativement peu différente de $\overline{BE}$, c'est-à-dire pour que $\frac{\overline{MN}}{\overline{BE}}$ diffère peu de 1; enfin que la longueur $\overline{BCDE}$ est sensiblement égale à la droite $\overline{BE}$. Cela posé, si nous désignons $\overline{BE}$ par l, et l'inconnue $\overline{B'I}$ par H, nous aurons approximativement

$$\Omega = lH, \quad \chi = l, \quad R = H, \quad U = \frac{Q}{lH};$$

par suite, en substituant dans l'équation (1), après avoir remplacé F (U) par $\Pi b_1 U^2$,

$$(3) \qquad Hi = b_1 \frac{Q^2}{l^2 H^2}, \quad \text{ou bien} \quad H^3 i = \frac{b_1 Q^2}{l^2};$$

d'où nous tirons immédiatement

$$H = \sqrt[3]{\frac{b_1 Q^2}{l^2 i}} = 0{,}0737 \sqrt[3]{\frac{Q^2}{l^2 i}}.$$

La formule (3) peut être considérée comme la transformation de la formule (1), spécialement applicable aux courants larges et relativement peu profonds.

2°. *Réciproquement, la ligne d'eau étant connue, ainsi que la pente, trouver la dépense.* — Les données permettent de cal-

culer immédiatement Ω, χ, et par suite $R = \frac{\Omega}{\chi}$; l'équation (2) fournit alors la vitesse U, puis on a la dépense $Q = U\Omega$. S'il s'agit d'un courant très-large, on tirera de l'équation (3)

$$Q = l\sqrt{\frac{H^3 i}{b_1}} = 50\,l H\,\sqrt{H i}.$$

Mais nous devons faire observer que par suite de l'incertitude qui affecte le coefficient b_1, les résultats de ce calcul ne seront, en général, passablement exacts que si le lit est bien régulier sur une grande étendue. En pratique, on préfère mesurer le débit par des observations directes, comme on le verra plus loin.

3°. *Connaissant la dépense et la section transversale, on demande la pente.* — On chercherait d'abord la vitesse moyenne $U = \frac{Q}{\Omega}$, et le rayon moyen $R = \frac{\Omega}{\chi}$; puis, appliquant la formule (2), on prendrait

$$i = 0{,}0004\,\frac{Q^2}{R\Omega^2}.$$

Pour les courants très-larges, on aurait, d'après la formule (3),

$$i = 0{,}0004\,\frac{Q^2}{l^2 H^3}.$$

4°. *Étant donnée la pente i, on demande la section transversale capable de dépenser par seconde un volume* Q *également donné.* — Soient Ω l'aire de la section, χ le périmètre mouillé correspondant; la vitesse U étant égale à $\frac{Q}{\Omega}$, on aura

$$(4) \qquad \frac{\Omega i}{\chi} = b_1\,\frac{Q^2}{\Omega^2}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{\Omega^3 i}{\chi} = b_1 Q^2.$$

Cette équation sera la seule entre les inconnues Ω et χ, de sorte que le problème est indéterminé. Pour faire cesser l'indétermination, on peut s'imposer une autre condition. Par exemple, si le profil du lit doit être composé d'une ligne horizontale AB

(*fig* 40) et de deux talus AC, BD, faisant un angle α avec la verticale, en posant $\overline{AB} = l$, $\overline{AE} = H$, on aura

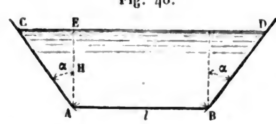


Fig. 40.

$$\Omega = lH + H^2 \operatorname{tang}\alpha,$$

$$\chi = l + \frac{2H}{\cos\alpha};$$

en conséquence l'équation (4) deviendra

$$(5) \qquad \frac{H^3(l + H\operatorname{tang}\alpha)^3}{l + \dfrac{2H}{\cos\alpha}} = \frac{b_1}{i} Q^2.$$

Il serait donc possible de se donner H ou l, ou une relation entre ces deux quantités. La relation (5) compléterait alors la solution du problème.

On pourrait encore se donner un polygone semblable à la section du courant. Dans ce cas, en nommant a l'une quelconque des dimensions de cette section inconnue, on aurait

$$\Omega = ma^2 \quad \text{et} \quad \chi = na,$$

m et n étant des nombres connus, qui dépendraient de la forme adoptée. Donc, en vertu de l'équation (4) on poserait

$$\frac{m^3 a^5}{n} = \frac{b_1}{i} Q^2,$$

ce qui donnerait a et par suite Ω et χ.

Enfin, comme il arrive souvent que le canal doit être ouvert à fleur de terre, pour rendre aussi petit que possible le cube des déblais, il convient alors de choisir pour condition que Ω soit un minimum. C'est à quoi l'on parviendra en se servant des propositions suivantes, connues en Géométrie :

Parmi toutes les aires équivalentes terminées par une horizontale AF (*fig.* 41) et par un périmètre complémentaire quelconque ABCDEF, le demi-cercle ayant son centre sur AF est celle dans laquelle le périmètre complémentaire est un maximum.

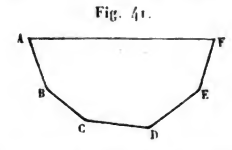


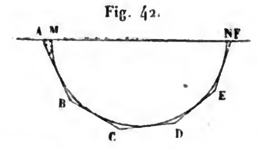
Fig. 41.

Si le périmètre complémentaire doit nécessairement se com-

poser de lignes droites faisant entre elles des angles donnés, dans un ordre également donné, le minimum en question aura lieu pour le polygone circonscriptible au demi-cercle, les extrémités A et F devant se trouver sur le diamètre.

Voici alors comment il faudrait procéder. On décrirait un demi-cercle quelconque sur un diamètre horizontal MN (*fig.* 42), puis on lui mènerait des tangentes AB, BC, CD, DE, EF, respectivement parallèles aux droites consécutives, de direction connue, qui doivent limiter la section transversale : on obtiendrait ainsi un polygone ABCDEF, terminé par ces tangentes et par le diamètre MN prolongé. La section cherchée devra être semblable à ce polygone dans lequel AF représenterait la ligne d'eau, et l'on rentrerait ainsi dans un cas qui vient d'être examiné tout à l'heure. En effet, supposons qu'après avoir déterminé de cette manière la section (S) dont nous appelons l'aire Ω, on en prenne une autre (S′) équivalente en surface et composée de côtés ayant les mêmes directions. D'après les théorèmes de Géométrie ci-dessus cités, le périmètre mouillé χ de la première sera moindre que la quantité analogue χ' de la seconde; par suite, le rayon moyen $\frac{\Omega}{\chi}$ dépassera $\frac{\Omega}{\chi'}$. Donc l'emploi de (S′) au lieu de (S) ferait diminuer la vitesse et la dépense, comme le montre la formule (2) du n° 70; pour dépenser le volume donné sans changer la forme de (S′), on serait donc forcé d'augmenter ses dimensions et de rendre ainsi son aire supérieure à Ω. La section (S) est donc bien la plus petite en surface, parmi toutes celles qui, ayant leurs côtés dans les directions indiquées à priori, peuvent dépenser le volume d'eau également indiqué.

Fig. 42.



Si la forme de la surface était arbitraire, il faudrait adopter un demi-cercle, puisque c'est dans ce cas qu'on a le maximum absolu du rayon moyen, pour les figures ayant une aire donnée. Mais la forme demi-circulaire serait assez difficile à réaliser; il y aurait même impossibilité, au point de vue pratique, si les parois devaient être formées par des talus en terre : car

la pente verticale près des bords ne pourrait pas se conserver.

Les mêmes considérations se représenteraient évidemment si l'on voulait déterminer la forme de la section, d'aire donnée, qui consommerait le moins de pente, à égalité de dépense d'eau, ou qui dépenserait le plus d'eau à égalité de pente.

§ III. — Du mouvement permanent varié de l'eau dans les canaux découverts.

73. *Cas où le mouvement uniforme est impossible.* — Le mouvement uniforme tel que nous l'avons étudié aux §§ I et II de ce chapitre n'est pas toujours réalisable. Nous avons admis en effet que chaque molécule possède une vitesse constante, et que toutes les sections présentent des phénomènes identiques. Or cela n'aurait pas lieu si la section transversale du lit n'était pas invariable d'un point à l'autre du profil en long; il en serait de même dans un lit à section constante, mais à pente variable, car l'équation (1) du n° 70 ne pourrait que donner i constant, lorsque R et U le seraient aussi. Enfin, le mouvement uniforme ne se produirait pas, même avec un lit cylindrique à génératrices rectilignes, si par une cause quelconque l'eau s'élevait, dans une section, au-dessus de la hauteur correspondant au régime uniforme, et que nous avons appris à déterminer (n° 72), quand on donne la pente et la dépense.

Le mouvement, quoique n'étant pas uniforme, peut être permanent : on obtient alors le mouvement que nous nous proposons d'étudier. La vitesse et la pression sont supposées constantes relativement au temps, en un même point du courant; mais elles varient à un instant donné, d'une molécule liquide à une autre, et aussi pour une même molécule, d'un point à l'autre de sa trajectoire.

74. *Formule fondamentale du mouvement permanent varié dans les canaux découverts.* — Nous supposerons le mouvement permanent établi dans un lit de forme et de pente variables; mais les changements de la section transversale du courant devront ne pas être brusques, et même s'opérer avec une certaine lenteur. En second lieu, nous admettrons que les filets liquides sont, dans toute section, sensiblement parallèles

entre eux et à l'axe du courant : hypothèse qui n'est pas une conséquence forcée de la première, mais qui serait incompatible avec des variations rapides dans la forme et les dimensions des profils en travers.

Dans ces circonstances, l'étude que nous avons à faire ici ressemble beaucoup à celle qui a été faite au n° 55, à propos des tuyaux ayant leur section et leur débit variables; ce qui nous permet de supprimer pour ainsi dire toute démonstration. Ainsi les mêmes considérations nous feront reconnaître d'abord que les forces dues à la viscosité ont à peu près, en chaque point, la direction de la vitesse; que, par suite, la pression varie suivant la loi hydrostatique, d'un point à un autre, situé dans la même section, de telle sorte qu'il y a un seul et même niveau piézométrique pour tous les points appartenant à une section donnée : ce niveau sera celui de la ligne d'eau dans le profil considéré, si les colonnes sont supposées déboucher dans l'atmosphère, puisque la surface du courant est soumise à la pression atmosphérique.

Ensuite, appelant comme au n° 55,

ds la distance qui sépare deux sections infiniment rapprochées;

dy l'abaissement correspondant du niveau piézométrique, lequel est identique, ainsi qu'on vient de le voir, avec la pente superficielle du courant, sur la longueur ds;

χ le périmètre mouillé et Ω la surface des deux sections dont il s'agit;

U la vitesse moyenne, égale au quotient $\frac{Q}{\Omega}$ de la dépense Q par la section Ω;

F (U) la fonction de la vitesse moyenne qui, dans le cas du mouvement uniforme, représente le frottement du lit par mètre carré;

Π le poids du mètre cube d'eau;

On démontrera par la répétition exacte des mêmes raisonnements, et, il faut bien le dire, avec le même défaut de rigueur, l'équation

$$dy = \frac{U\,dU}{g} + \frac{1}{\Pi}\frac{\chi}{\Omega}F(U)\,ds,$$

laquelle, en faisant $F(U) = \Pi b_1 U^2$, devient

$$(1) \qquad dy = \frac{U\,dU}{g} + \frac{\chi}{\Omega} b_1 U^2 ds:$$

c'est la formule fondamentale qu'il s'agissait d'établir et dont nous allons maintenant indiquer quelques applications.

75. Problème. *Connaissant la dépense Q d'un cours d'eau en mouvement permanent, et pouvant lever autant de profils en travers qu'on le voudra, on demande de calculer la pente superficielle totale, entre deux sections données.* — L'équation (1) nous fournit immédiatement la solution de la question; si l'on nomme U_0 la vitesse dans une section quelconque à partir de laquelle seront comptés les abaissements superficiels y et les longueurs s, dans le sens du courant, et qu'on intègre cette équation, on trouvera

$$y = \frac{U^2 - U_0^2}{2g} + b_1 \int_0^s \frac{\chi}{\Omega} U^2 ds.$$

Or on a

$$Q = U\Omega = U_0 \Omega_0,$$

en appelant Ω_0 l'aire de la section prise pour point de départ; on peut donc chasser les vitesses de l'équation précédente, qui devient alors

$$(2) \qquad y = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{\Omega_0^2}\right) + b_1 Q^2 \int_0^s \frac{\chi}{\Omega^3} ds.$$

Toutes les sections transversales sont connues, ainsi que la dépense Q; cette relation exprime donc la pente cherchée y, en fonction des données.

Le calcul exact de l'intégrale définie $\int_0^s \frac{\chi}{\Omega^3} ds$ exigerait que l'on pût exprimer χ et Ω en fonction de s; cela ne sera pas généralement possible pour les lits de cours d'eau naturels, où ces quantités varient suivant des lois assez difficiles à représenter analytiquement. Mais alors on remplacerait l'intégration par un calcul approximatif; $\frac{\chi}{\Omega^3}$ étant considéré comme l'ordon-

née d'une courbe dont l'abscisse serait s, l'intégrale en question représente l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des s et les deux ordonnées répondant aux limites de s; or on sait calculer approximativement cette aire, au moyen de divers procédés. On a, par exemple, celui de Simpson, ou celui qui consiste à regarder la courbe comme droite entre deux points pris sur des ordonnées assez rapprochées l'une de l'autre, etc.

76. Problème. *Étant donnés les mêmes profils en travers et le nivellement en long du cours d'eau, calculer le débit par seconde.* — On fait usage de la même équation (2) ci-dessus établie; seulement Q devient l'inconnue et y une donnée.

Dans une portion de cours d'eau qui ne reçoit pas d'affluents et n'alimente pas de dérivation, Q doit rester constant, quelles que soient les deux sections extrêmes que l'on adopte pour faire l'application de l'équation (2). Cette application, répétée en variant les sections extrêmes, serait donc un moyen de contrôler l'exactitude des hypothèses théoriques, ou encore de déterminer la meilleure valeur de b_1 pour le cours d'eau dont on s'occupe.

Les ingénieurs ont rarement à résoudre les questions posées aux nos 75 et 76. Puisque l'on peut relever les profils en travers, il est tout aussi bien possible de déterminer y par un nivellement en long, et la dépense Q par un jaugeage, comme nous le verrons plus loin : ces moyens directs sont préférables en pratique. Mais la question suivante exige l'emploi du calcul, parce qu'il s'agit de déterminer à l'avance les modifications que subira le niveau d'un cours d'eau, par suite d'ouvrages non encore exécutés.

77. Problème. *Connaissant complétement une portion du lit d'un cours d'eau en mouvement permanent, c'est-à-dire ses dimensions et sa situation relativement à un plan horizontal de nivellement, connaissant la dépense* Q *par seconde, et enfin le niveau de l'eau dans l'une des sections extrêmes, trouver ce même niveau dans l'autre section extrême.* — La question se réduit évidemment à déterminer la pente superficielle totale y entre deux sections consécutives, que l'on peut supposer assez rapprochées pour que de l'une à l'autre il n'y ait pas de grands

changements dans les valeurs de χ, Ω, U; car, en allant de proche en proche, on effectuerait complétement le nivellement en long de la surface de l'eau. Pour cela, on se servira encore de l'équation (2). Soient Ω_n, χ_n les valeurs de Ω et χ dans la section où le niveau de l'eau est donné; ces quantités sont connues. Soient encore Ω_{n-1} et χ_{n-1} les quantités analogues pour une section assez rapprochée de la première, dont celle-ci est séparée par une distance Δs; soit enfin y_n la pente superficielle dans cet intervalle. Appliquons l'équation (2) à la portion comprise entre les deux sections ainsi définies; si Δs est assez petit pour que $\frac{\chi_n}{\Omega_n^3}$ et $\frac{\chi_{n-1}}{\Omega_{n-1}^3}$ ne soient pas extrêmement différents, l'intégrale $\int \frac{\chi}{\Omega^3}\,ds$ sera sensiblement égale à $\frac{1}{2}\Delta s\left(\frac{\chi_n}{\Omega_n^3}+\frac{\chi_{n-1}}{\Omega_{n-1}^3}\right)$; on aura donc

$$(3) \qquad y_n = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\Omega_n^2}-\frac{1}{\Omega_{n-1}^2}\right)+b_1 Q^2\left(\frac{\chi_n}{\Omega_n^3}+\frac{\chi_{n-1}}{\Omega_{n-1}^3}\right)\frac{\Delta s}{2}.$$

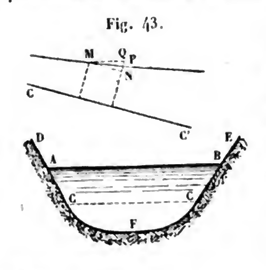
Cette équation ne donne pas immédiatement y_n, car χ_{n-1} et Ω_{n-1} en dépendent implicitement; mais il est clair qu'un tâtonnement permettra d'avoir cette quantité. La pente superficielle entre deux sections peu éloignées devant nécessairement être assez petite, on fera d'abord $y_n = 0$; le niveau de l'eau étant alors connu, par cela même, dans la section que définit l'indice $n-1$, on calculera χ_{n-1} et Ω_{n-1}; puis on calculera le second membre de l'équation (3) qui donnera y_n avec une première approximation. Si l'on veut plus d'exactitude, on calculera de nouveau, en partant de cette valeur provisoire de y_n, les valeurs de χ_{n-1} et Ω_{n-1}, pour les substituer encore dans le second membre de l'équation (3) et avoir y_n corrigé. On s'arrêtera dans ces approximations successives, quand deux valeurs consécutives de y_n, ainsi obtenues, seront sensiblement égales, ce qui en général arrivera promptement.

Connaissant maintenant le niveau de l'eau dans la section Ω_{n-1}, on trouvera de même ce niveau dans la section suivante Ω_{n-2}, et, de proche en proche, le profil en long du courant sera déterminé.

Nous nous bornerons à ces notions succinctes au sujet des cours d'eau coulant dans un lit de forme variable; mais nous allons entrer dans quelques détails sur un cas particulier important, celui d'un lit dont le profil transversal et la pente seraient partout les mêmes. La solution du problème qui vient d'être traité peut alors recevoir des simplifications notables.

78. *Application de l'équation différentielle du mouvement permanent varié au cas d'un lit à pente et à profil constants.* — Soit DACFBE (*fig.* 43) la coupe transversale constante du lit; AB la ligne d'eau, variable d'une section à l'autre, et horizontale dans chaque section. Traçons dans la figure DACFBE une horizontale quelconque CC, occupant une situation connue, relativement à laquelle on mesurera la profondeur du courant dans chaque section, et appelons :

Fig. 43.



i la pente du lit par mètre courant;

h la profondeur mesurée entre le niveau de l'eau dans une section, et l'horizontale CC;

l la largeur $\overline{AB}$, à la surface de l'eau;

s la distance de la section considérée à une autre prise pour origine; cette origine sera supposée en amont, et les distances s positives seront mesurées en descendant suivant le fil de l'eau.

Conservons d'ailleurs les notations employées au nº 74. Nous remarquerons d'abord que si l'on fait deux sections en deux points infiniment voisins M et P de la surface du courant, et que par M on mène une horizontale MQ et une parallèle MN aux génératrices du lit, ds étant la distance des deux sections, on aura

$$\overline{QN} = \overline{MN} \text{ tang. } NMQ = i\,ds.$$

Or la pente i est toujours faible et les sections s'écartent peu de plans verticaux : $\overline{PQ}$ est donc égal, sauf un facteur très-peu

différent de 1, à la pente superficielle dy entre les deux sections; d'un autre côté $\overline{QN}$ est l'augmentation dh de la profondeur; donc l'égalité

$$\overline{QP} = \overline{QN} - \overline{PN}$$

peut s'écrire

$$dy = ids - dh.$$

On a aussi, d'après la définition même de la vitesse moyenne, l'égalité

$$U\Omega = Q;$$

d'où l'on tire, par la différentiation relative à s,

$$U\,d\Omega + \Omega\,dU = 0 \quad \text{et} \quad dU = -\frac{U}{\Omega}\,d\Omega.$$

Or, en passant de M à P, la section Ω s'accroît d'un trapèze infiniment petit dont AB est une base et la hauteur dh; on a donc

$$d\Omega = l\,dh,$$

et, par suite,

$$dU = -\frac{Ul}{\Omega}\,dh.$$

Si l'on substitue dans l'équation (1) du n° 74 ces valeurs de dU et de dy, on trouve l'équation

$$ids - dh = -\frac{U^2 l}{g\Omega}\,dh + \frac{\chi}{\Omega}\,b_1 U^2\,ds,$$

ou bien

$$(4) \qquad ds = \frac{1 - \dfrac{U^2 l}{g\Omega}}{i - \dfrac{b_1\chi}{\Omega}U^2}\,dh:$$

c'est la formule qu'il s'agissait d'établir. On remarquera que, dans le second membre, la quantité multipliée par dh est une fonction connue de h; il est clair en effet que h étant connu, l, χ et Ω s'ensuivent, et par conséquent aussi U, en vertu de la relation $U\Omega = Q$.

79. **Problème** *du n° 77, dans le cas d'un lit à pente et à profil constants.* — La formule (4) permet de résoudre, presque sans

tâtonnements, le problème du n° 77, qui consiste à construire le profil en long de la surface du courant, quand on connaît le lit, la dépense, et la hauteur de l'eau dans une section déterminée. La solution, bien entendu, ne doit s'appliquer qu'au cas particulier examiné au n° 78.

Soit s_n la distance à l'origine des s de la section où l'on connaît la profondeur h_n; soit s_0 la distance à la même origine d'une autre section où la profondeur est h_0. La formule (4) intégrée entre s_0 et s_n devient

$$s_n - s_0 = \int_{h_0}^{h_n} \frac{1 - \frac{U^2 l}{g\Omega}}{i - \frac{b_1 \chi}{\Omega} U^2} dh.$$

Or sous le signe $\int$ toutes les quantités variables, savoir χ, Ω, l, U, sont des fonctions de h qu'il est possible de calculer, quand on se donne cette variable : donc en se fixant une certaine valeur de h_0, l'intégration exacte ou approximative fera connaître la distance $s_n - s_0$, et par suite s_0; le profil en long de la surface du courant pourra donc être construit par points. Si, par exemple, on veut appliquer la formule des quadratures de Th. Simpson, on calculera la fraction par laquelle est multiplié dh, pour une série de valeurs

$$h_0, \quad h_1, \quad h_2, \ldots, \quad h_n,$$

en nombre impair et en progression arithmétique; en appelant δ la raison de cette progression et

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad \ldots \quad A_n$$

les valeurs correspondantes de la fraction $\dfrac{1 - \frac{U^2 l}{g\Omega}}{i - \frac{b_1 \chi}{\Omega} U^2}$; on aurait

$$s_n - s_0 = \frac{\delta}{3}(A_0 + 4A_1 + 2A_2 + 4A_3 + \ldots + 4A_{n-1} + A_n).$$

Nous devons cependant signaler diverses exceptions à cette méthode. Premièrement, elle se trouve en défaut quand l'un

ou l'autre des termes de la fraction $\frac{1 - \frac{U^2 l}{g\Omega}}{i - \frac{b_1 \chi}{\Omega} U^2}$ devient égal à zéro, pour une valeur de la variable h comprise dans les limites de l'intégrale définie. Si c'est le numérateur, $\frac{ds}{dh}$ s'annulera pour une certaine valeur h' de h, ce qui voudrait dire qu'en un certain point du courant, dans l'intervalle $s_n - s_0$, la surface de l'eau serait normale au fond du lit. Or ce résultat est en contradiction manifeste avec l'hypothèse des filets parallèles, sur laquelle repose la formule fondamentale (1) du mouvement permanent varié : la théorie cesse donc de s'appliquer dans ce cas, et la formule (4) ne peut donner vraisemblablement le profil en long que jusqu'aux environs de la section où la profondeur serait h', sans pouvoir atteindre cette section elle-même. Si c'est au contraire le dénominateur $i - \frac{b_1 \chi}{\Omega} U^2$ qui s'annule, la courbe dont l'intégrale définie exprime l'aire aura une ordonnée infinie ; on ne pourrait donc plus employer la formule de Simpson, ni aucune autre analogue, et une discussion spéciale serait nécessaire, dans chaque cas particulier, pour avoir l'intégrale en question. La hauteur H pour laquelle cette exception se produit, est celle du régime uniforme, dans le lit donné et avec la dépense Q, car $i = \frac{b_1 \chi}{\Omega} U^2$ est précisément l'équation du mouvement uniforme (n° 70). Ainsi donc, en définitive, le procédé ci-dessus expliqué ne résoudra le problème que dans le cas où les hauteurs h_0 et h_n, limites de l'intégrale définie, ne comprendront pas entre elles h' ou H.

L'expérience nous indique d'ailleurs directement un cas d'exception sur lequel nous reviendrons dans un article spécial ; elle prouve en effet que les cours d'eau à lit prismatique peuvent présenter des variations brusques de la profondeur h, évidemment incompatibles avec l'hypothèse des filets parallèles. Ce phénomène exige une théorie particulière qu'on trouvera plus loin. Nous aurons alors occasion d'examiner si les conditions analytiques de son existence ont quelque chose

de commun avec celles des deux exceptions déjà mentionnées : pour le moment nous nous bornerons à dire que, même en excluant le cas d'un changement de signe dans $\frac{ds}{dh}$, la solution du problème dont on s'occupe ici suppose implicitement l'absence, en fait, de ces variations brusques de profondeur, connues sous le nom de *ressaut superficiel*.

Enfin la recherche théorique de la surface du courant n'exigeant, comme données, que la connaissance du lit et de la profondeur dans une section extrême, il pourrait arriver, par suite de circonstances extérieures quelconques, que la profondeur réelle dans la section faite à l'autre extrémité ne fût pas égale à celle qui résulterait du calcul. Par exemple, supposons un canal qui aurait un niveau connu en un certain point; supposons encore que, partant de là, on trouve, au moyen de la formule (4) intégrée, les profondeurs successives dans les sections en aval, et qu'on arrive ainsi à un niveau déterminé pour la section extrême, formant l'embouchure du canal dans un réservoir indéfini, comme la mer : si ce dernier niveau de l'eau dans le canal ne coïncide pas avec celui du réservoir, il sera certain que la formule (4) n'aura pas donné le profil en long véritable de la surface du courant. Ce serait encore un cas d'exception, car on ne pourrait plus admettre la réalisation complète des hypothèses théoriques fondamentales : ou bien le mouvement permanent ne s'établirait pas, ou bien il aurait lieu sans remplir partout la condition du parallélisme des filets, ou bien encore la loi du frottement du lit serait changée, etc.

Voici encore, au sujet de la courbe affectée par le profil longitudinal du courant, quelques particularités utiles à connaître.

1°. Si h devient très-grand, Ω le devient aussi, U au contraire est très-faible. La quantité $\frac{l}{\Omega}$ est l'inverse de la profondeur moyenne de la surface; elle décroîtra donc indéfiniment avec h. Quant à l'inverse $\frac{\chi}{\Omega}$ du rayon moyen, nous supposerons la forme de la surface telle qu'il reste toujours fini ; dans les cas ordinaires il tendrait vers zéro. On voit par conséquent

que pour les grandes profondeurs l'équation (4) tend à devenir

$$ds = \frac{dh}{i},$$

soit

$$i\,ds - dh = dy = 0;$$

ce qui signifie que la surface de l'eau est horizontale, comme on pouvait l'affirmer à priori, puisque le mouvement tend à s'annuler.

2°. Soit donnée une valeur h_0 de h supérieure à la valeur H qui annule le dénominateur $i - \frac{b_1\chi}{\Omega}U^2$. Supposons, ainsi que cela se présente ordinairement, que $1 - \frac{U^2 l}{g\Omega}$ soit positif pour $h = h_0$, et que $\frac{\chi}{\Omega}U^2$ décroisse quand h augmente. Dans ce cas, $i - \frac{b_1\chi}{\Omega}U^2$ est positif pour $h = h_0$, $\frac{ds}{dh}$ l'est aussi et la profondeur va en augmentant dans le sens du courant. A mesure qu'elle devient plus grande, le raisonnement précédent peut être répété *a fortiori* : l'augmentation continue donc, tant que la formule du mouvement permanent varié reste applicable. La surface demeure donc partout en dessus du plan du régime uniforme.

Nous venons de dire que $1 - \frac{U^2 l}{g\Omega}$ est ordinairement positif, pour toute valeur de h supérieure à H. On a, en effet, pour une telle valeur de h,

$$i - \frac{b_1\chi}{\Omega}U^2 > 0,$$

ou bien

$$\frac{U^2}{\Omega} < \frac{i}{b_1\chi};$$

donc on a aussi

$$1 - \frac{U^2 l}{g\Omega} > 1 - \frac{il}{gb_1\chi},$$

c'est-à-dire en faisant $g = 9^m,8088$, $b_1 = 0,0004$,

$$1 - \frac{U^2 l}{g\Omega} > 1 - \frac{il}{0,00392\,\chi}.$$

Or l est nécessairement plus petit que χ; d'ailleurs une pente i égale ou supérieure à 0,00392 ou à $3^m,92$ par kilomètre se rencontre assez rarement dans les cours d'eau non torrentiels; donc $1 - \frac{il}{0,00392\chi}$ et par conséquent $1 - \frac{U^2 l}{g\Omega}$ seront positifs.

3°. Lorsque l, χ et Ω seront des fonctions algébriques et rationnelles de h, on peut démontrer que si la profondeur h diffère en un point de celle du régime uniforme, désignée par H, la différence ne pourra s'annuler qu'à une distance infinie. En effet, ds se présentera sous la forme

$$ds = \frac{\mathfrak{F}(h)}{\mathfrak{F}_1(h)}\,dh,$$

$\mathfrak{F}(h)$ et $\mathfrak{F}_1(h)$ étant des fonctions rationnelles et entières de h; en outre H sera une racine de l'équation $\mathfrak{F}_1(h) = 0$. On sait alors que l'intégrale $\int \frac{\mathfrak{F}(h)}{\mathfrak{F}_1(h)}\,dh$ contiendra un terme de la forme $C \log \text{hyp} (h - H)$, lequel deviendra infini pour $h = H$. Ainsi donc, lorsque la profondeur h est en un certain point supérieure à H, nous avons vu ci-dessus que h augmente ordinairement avec s, ou diminue en remontant le courant : mais cette diminution ne peut pas faire descendre h au-dessous de la limite H, et la surface de l'eau devient asymptote à celle du régime uniforme, à moins que la diminution de h ne finisse par rendre $1 - \frac{U^2 l}{g\Omega}$ négatif, auquel cas la formule ne s'appliquerait plus.

80. *Même problème, dans le cas d'un lit à pente constante, à profil en travers constant, et de grande largeur.* — Quand la section d'un lit prismatique rentre dans la catégorie de celles auxquelles se rapporte la *fig.* 39 (n° 72), on peut ajouter, à l'étude que nous venons de faire, des détails plus circonstanciés, qui rendront la solution plus complète et plus facilement applicable en pratique.

Nous désignerons par

l la largeur, supposée sensiblement constante, à la surface de l'eau, dans une section prise arbitrairement;

q le quotient du débit Q du courant par la largeur l, c'est-à-dire le débit par mètre de largeur;
h la profondeur dans une section quelconque, mesurée en dessus de l'horizontale IK (*fig.* 39);
H la profondeur du régime uniforme compatible avec le lit et le débit donnés;
i, s, y, U, Ω, χ les quantités ainsi nommées aux nos 74 et 78.

Comme on l'a déjà remarqué (no 72), la forme particulière de la section permet de poser les égalités

$$\Omega = lh, \quad \chi = l, \quad U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{Q}{lh} = \frac{q}{h};$$

en outre nous avons trouvé (no 78), entre la pente superficielle et la profondeur, la relation

$$dy = ids - dh,$$

d'où résulte

$$ds = \frac{1}{i}(dy + dh).$$

Substituons cette valeur de ds, ainsi que celles de Ω, χ et U, dans l'équation (1) du mouvement permanent varié (no 74) : nous trouverons

$$dy = -\frac{q^2 dh}{gh^3} + \frac{b_1 q^2}{ih^3}(dy + dh),$$

soit, en séparant les variables y et h,

$$dy = \frac{1 - \frac{i}{b_1 g}}{h^3 - \frac{b_1 q^2}{i}} \frac{b_1 q^2}{i} dh.$$

Or la profondeur H du régime uniforme est déterminée par la relation (no 72)

$$H^3 = \frac{b_1 Q^2}{il^2} = \frac{b_1 q^2}{i};$$

donc on a aussi

$$dy = \left(1 - \frac{i}{b_1 g}\right) \frac{H^3 dh}{h^3 - H^3},$$

ou bien, si l'on pose $x = \frac{h}{H}$,

$$(5) \qquad dy = H\left(1 - \frac{i}{b_1 g}\right)\frac{dx}{x^3 - 1}.$$

L'intégrale de l'équation (5) s'obtient sans peine sous forme finie. Suivant la méthode ordinaire pour l'intégration des fractions rationnelles, on écrira successivement

$$\frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}dx\left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\frac{d\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

L'intégration devient alors immédiate, et l'on a, en désignant par C une constante arbitraire,

$$\int\frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\log\text{hyp}\,(x-1) - \frac{1}{6}\log\text{hyp}\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$$
$$-\frac{1}{3}\sqrt{3}\,\text{arc tang}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$
$$= \frac{1}{6}\log\text{hyp}\,\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\text{arc tang}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

La dernière expression multipliée par $H\left(1 - \frac{i}{b_1 g}\right)$ deviendrait la valeur de la pente superficielle y.

Pour faire disparaître la constante arbitraire C, il faut indiquer le plan horizontal de comparaison à partir duquel on compte les abaissements successifs y. Si ce plan passe en un point de la surface du courant répondant à la profondeur h_1 ou $x_1 H$, y devra s'annuler quand on fera $x = x_1$, ce qui donnera pour déterminer C, l'égalité

$$\frac{1}{6}\log\text{hyp}\,\frac{(x_1-1)^2}{x_1^2+x_1+1} - \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\text{arc tang}\,\frac{2x_1+1}{\sqrt{3}} + C = 0.$$

On pourrait prendre, par exemple, $x_1 = \infty$, c'est-à-dire comp-

ter les y en dessous du plan horizontal vers lequel tend la surface du courant (n° 79) à mesure que la profondeur augmente indéfiniment; alors on aurait

$$\lim \frac{(x_1 - 1)^2}{x_1^2 + x_1 + 1} = \lim \frac{1 - \frac{2}{x_1} + \frac{1}{x_1^2}}{1 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1^2}} = 1,$$

$$\lim \frac{2x_1 + 1}{\sqrt{3}} = \infty,$$

et par suite, le logarithme s'annulant,

$$C = \frac{1}{3}\sqrt{3} \text{ arc tang } \infty = \frac{1}{6}\pi\sqrt{3}.$$

L'intégrale de l'équation (5) serait donc

$$y = H\left(1 - \frac{i}{b_1 g}\right)\left[\begin{array}{l} \frac{1}{6}\log \text{hyp} \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} \\ + \frac{1}{3}\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tang} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\end{array}\right];$$

ou bien, en posant, pour abréger,

$$(6) \quad \left\{\begin{array}{l} \psi(x) = \frac{1}{6}\log \text{hyp} \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{3}\sqrt{3} \text{ arc cotang } \frac{2x+1}{\sqrt{3}}, \\ a^3 = \frac{i}{b_1 g}, \end{array}\right.$$

on aura

$$(7) \qquad -y = H(1 - a^3)\,\psi(x).$$

Sous cette dernière forme, à laquelle nous nous arrêterons, le second membre exprime les ordonnées verticales des divers points de la surface du courant, comptées *en dessus* du plan de comparaison choisi tout à l'heure, et évaluées en fonction du rapport x, qui lui-même définit la profondeur h.

L'ordonnée verticale y étant connue en fonction de h, on en conclut aisément la distance s. On a en effet

$$i\,ds = dy + dh,$$

d'où résulte par l'intégration

$$is + D = y + h,$$

en nommant D une nouvelle constante. On reportera dans cette dernière équation la valeur de y, et l'on obtiendra

$$(8) \qquad \frac{is + D}{H} = x - (1 - \alpha^3)\,\psi(x).$$

La constante D se déterminerait en indiquant, par exemple, la profondeur h_2 ou le rapport $x_2 = \frac{h_2}{H}$, en un point situé à la distance connue s_2 de l'origine des s. Ces deux quantités x_2 et s_2 devant satisfaire à l'équation (8), on aurait

$$\frac{is_2 + D}{H} = x_2 - (1 - \alpha^3)\,\psi(x_2),$$

et par suite,

$$(9) \qquad \frac{i(s - s_2)}{H} = x - x_2 - (1 - \alpha^3)\left[\psi(x) - \psi(x_2)\right].$$

On peut regarder cette équation comme déterminant complétement s en fonction de x ou de h : ce serait l'équation de la courbe du courant à sa surface, si l'on prenait pour axes coordonnés, d'une part la ligne ayant la pente i sur l'horizon et représentant le fond du lit dans le profil longitudinal [c'est-à-dire le lieu des points analogues à I (*fig.* 39), dans ce profil], d'autre part une perpendiculaire menée par l'origine des s.

L'emploi pratique des équations (7), (8) et (9), où entrent un logarithme hyperbolique et un arc défini par sa cotangente, ne laisserait pas que d'exiger des calculs numériques assez pénibles, surtout si l'on devait en faire l'application à un certain nombre de points. Dans le but d'éviter ce grave inconvénient, nous avons construit la table IV (*) qui donne immédiatement

(*) *Voir* le Recueil de tables numériques, à la fin du Cours. — Dans ses *Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux courantes*, M. Dupuit, Inspecteur général des Ponts et Chaussées, a le premier intégré l'équation différentielle du mouvement permanent varié, pour divers cas particuliers, et donné une table analogue.

le résultat de la substitution d'une série de valeurs de x dans $\psi(x)$. La profondeur h étant, par sa nature, essentiellement positive, on ne peut avoir besoin des valeurs de $\psi(x)$ qu'entre les limites $x = 0$ et $x = \infty$. Depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 0,70$, l'argument x procède de centième en centième; entre $x = 0,70$ et $x = 1$, l'accroissement de la fonction devient plus rapide, et en conséquence on a successivement réduit la différence de deux valeurs de x consécutives, aux nombres 0,005, 0,002 et 0,001. Au delà de $x = 1$, on a trouvé plus commode pour effectuer le calcul numérique de la fonction ψ, de définir x par son inverse $\frac{1}{x}$, qui varie seulement de 1 à 0 pendant que x passe de 1 à ∞; dans cette seconde partie de la table les différences de l'argument suivent d'ailleurs la même loi que dans la première, c'est-à-dire qu'elles sont de 0,01 pour $\frac{1}{x}$ inférieur à 0,70, et successivement de 0,005, 0,002 et 0,001 pour $\frac{1}{x}$ compris entre 0,70 et 1,00. Afin de faciliter les calculs d'interpolation, la table renferme encore les différences des valeurs successives de la fonction, c'est-à-dire les résultats de la soustraction faite entre une quelconque de ces valeurs et celle qui est immédiatement à la suite. On conçoit sans peine la construction d'une pareille table, puisque l'on connaît l'expression (6) de $\psi(x)$ sous forme finie : on pourrait la réaliser (d'une manière assez pénible, il est vrai) par des substitutions de nombres à la place de x, dans $\psi(x)$. Mais il y a des procédés plus rapides, et nous parlerons tout à l'heure de celui que nous avons réellement employé.

Il est aisé, avec la table dont on vient de parler, de résoudre toutes les questions qui supposent la recherche du profil en long de la surface de l'eau. Si l'on veut, par exemple, connaître la distance entre deux points où l'on donne les profondeurs h et h_1, on la tirera immédiatement de l'équation (9) : après avoir calculé la valeur du second membre pour $x = \frac{h}{H}$ et $x_1 = \frac{h_1}{H}$, on la multipliera par $\frac{H}{i}$ et l'on aura la distance demandée $s - s_1$.

Le problème inverse, dans lequel on voudrait déterminer l'une des profondeurs h ou h_2, connaissant l'autre et la distance intermédiaire $s - s_2$, se résoudrait avec quelques tâtonnements. C'est ce que nous allons montrer par un exemple numérique.

Soit donné un lit défini, quant à son profil transversal, par la *fig.* 39, en y supposant $\overline{BE} = 70^m$, $\overline{BI} = 0^m,857$, et attribuant aux berges des talus 1 de base pour 2 de hauteur; soient en outre $i = 0,000115$ et la dépense $Q = 40^{mc}$ par seconde. D'après ces nombres on aurait d'abord, pour déterminer H (nº **72**),

$$H^3 . 0,000115 = 0,0004 \frac{40^2}{70^2},$$

égalité d'où résultent les suivantes :

$$H^3 = 1^m,1358,$$
$$H = 1^m,0433,$$
$$\frac{H}{i} = 9072^m.$$

Maintenant supposons que, par un barrage, la surface du courant, prise un peu en amont de cet obstacle, soit élevée à $1^m,50$ au-dessus du plan du régime uniforme, de sorte qu'en cet endroit on ait

$$h = 1^m,50 + 1^m,0433 = 2^m,5433.$$

On demande à quelle distance en amont le gonflement sera réduit à $0^m,60$ et la profondeur h_2 à $0^m,60 + 1^m,0433$, soit à $1^m,6433$.

Nous avons ici

$$x = \frac{h}{H} = \frac{2,5433}{1,0433} = 2,438, \qquad \frac{1}{x} = 0,410,$$

$$x_2 = \frac{h_2}{H} = \frac{1,6433}{1,0433} = 1,575, \qquad \frac{1}{x_2} = 0,635.$$

Par suite, la table IV donne

$$\psi(x) = \psi\left(\frac{1}{0,41}\right) = 0,0865;$$

quant à $\psi(x_2)$, comme la valeur $\frac{1}{x_2} = 0,635$ ne figure pas dans la table, on fait un calcul approximatif en employant l'interpolation linéaire, et l'on pose

$$\psi(x_2) = \psi\left(\frac{1}{0,635}\right) = \psi\left(\frac{1}{0,64}\right) - \frac{0,635 - 0,63}{0,640 - 0,63}\left[\psi\left(\frac{1}{0,63}\right) - \psi\left(\frac{1}{0,64}\right)\right]$$
$$= 0,2306 - \frac{1}{2} \cdot 0,0085 = 0,2264.$$

On a encore

$$a^3 = \frac{i}{b_1 g} = \frac{0,000115}{0,0004 \times 9,81} = 0,0293.$$

Cela fait, on substitue les nombres dans l'équation (9), qui devient

$$\frac{i(s-s_2)}{H} = 2,438 - 1,575 - (1 - 0,0293)(0,0865 - 0,2264) = 0,999;$$

on en déduit enfin la distance demandée

$$s - s_2 = 0,999 \frac{H}{i} = 9060^m \text{ environ } (*).$$

S'il s'agissait, au contraire, étant données $s - s_2 = 9060^m$ et $h = 2^m,5433$, de calculer h_2, voici comment on procéderait. Les quantités x et $\psi(x)$ sont encore connues; on connaît aussi

$$a^3 = 0,0293 \quad \text{et} \quad \frac{i(s-s_2)}{H} = \frac{9060}{9072} = 0,999.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation (9) donnera, pour déterminer x_2,

$$0,999 = 2,438 - x_2 - (1 - 0,0293)[0,0865 - \psi(x_2)],$$

ou bien, toute réduction faite,

$$x_2 - (1 - 0,0293)\psi(x_2) = 1,355.$$

Cette équation se résout par des tâtonnements que la table IV rend très-faciles. Quand on met à la place de x_2 les inverses des nombres 0,5, 0,6, 0,7, le premier membre prend respectivement les valeurs 1,872, 1,474, et 1,149; donc x_2 se trouve compris entre les inverses de 0,6 et de 0,7. Pour en approcher davantage, on interpolera linéairement, et l'on posera en conséquence la proportion

$$\frac{1}{x_2} - 0,6 : 0,7 - 0,6 :: 1,474 - 1,355 : 1,474 - 1,149,$$

(*) M. Belanger, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, notre prédécesseur à l'École, a traité la même application numérique dans son *Cours lithographié*, et a trouvé $s - s_2 = 9244$ mètres. L'écart entre ce résultat et le nôtre (bien peu important, puisqu'il se réduit à 2 pour 100) tient en partie à ce que nous admettons l'hypothèse simplificative d'un lit indéfiniment large, et en partie à l'emploi que nous faisons de la formule monôme Hb_1U^2 (n° 69) au lieu du binôme donné par de Prony et Eytelwein, pour exprimer la résistance du lit.

d'où résulte

$$\frac{1}{x_2} = 0{,}6 + 0{,}1\,\frac{0{,}119}{0{,}325} = 0{,}637.$$

L'inverse de ce nombre, substitué dans le premier membre de l'équation à résoudre, le rend égal à 1,349, au lieu de 1,355; donc x_2 est à peu près égal à $\frac{1}{0{,}637}$. Si l'on s'en tenait à cette approximation, on aurait

$$h_2 = \frac{H}{0{,}637} = 1^m{,}638,$$

ce qui est en effet la profondeur cherchée à $0^m{,}005$ près. Pour plus d'exactitude, on pourrait faire une seconde interpolation entre $\frac{1}{x_2} = 0{,}6$ et $\frac{1}{x_2} = 0{,}637$; on aurait

$$\frac{1}{x_2} = 0{,}6 + 0{,}037 . \frac{1{,}474 - 1{,}355}{1{,}474 - 1{,}349} = 0{,}635,$$

et par conséquent

$$h_2 = \frac{H}{0{,}635} = 1^m{,}643.$$

Mais dans l'exemple actuel la correction précédente n'aurait pratiquement aucune utilité, car les erreurs dues à l'incertitude de la théorie s'élèvent parfois bien au-dessus de celle qu'on ferait ainsi disparaître. Seulement cette correction permettrait de constater le degré d'approximation numérique obtenu dans le premier essai.

Discussion de la courbe affectée par la surface du courant. — Ainsi qu'on l'a dit tout à l'heure, cette courbe est représentée par l'équation (9); il s'agit donc de reconnaître comment varie l'ordonnée s quand x passe par tous les états de grandeur possibles. A la rigueur, la profondeur étant toujours réelle et positive dans les courants naturels, il suffirait de faire varier x entre 0 et ∞; mais, afin d'avoir la courbe complète, nous oublierons pour un instant les conditions physiques du problème, et nous attribuerons à x, outre les valeurs précédentes, toutes celles qui s'étendent entre 0 et $-\infty$. Nous exclurons d'ailleurs le cas de a négatif, c'est-à-dire que i (égal à $a^3 b_1 g$) représentera une pente proprement dite et non une rampe, en marchant dans le sens du courant. Enfin, nous fixerons l'origine des coordonnées au point correspondant à une profondeur nulle; comme nous pouvons supposer que le point arbitraire défini par les coordonnées s_2, x_2 coïncide avec cette

origine, nous ferons $s_1 = 0$, $x_1 = 0$ dans l'équation (9), qui prendra ainsi la forme

$$\frac{is}{H} = x - (1 - a^3)\,[\psi(x) - \psi(0)].$$

Or, d'après l'expression (6) de $\psi(x)$, on a

$$\psi(0) = \frac{1}{6}\log \text{hyp}\, 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\text{arc cotang}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{9}\pi\sqrt{3}:$$

donc finalement l'équation de la courbe deviendra

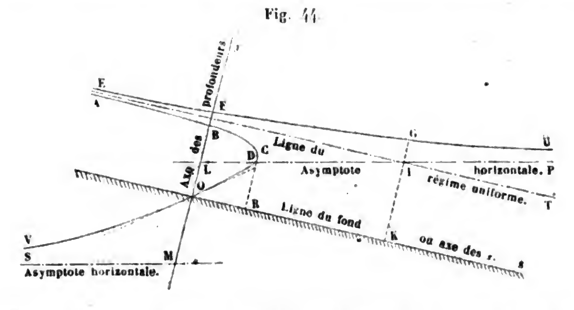
$$(10)\qquad \frac{is}{H} = x - (1 - a^3)\left[\psi(x) + \frac{1}{9}\pi\sqrt{3}\right].$$

Dans sa discussion, deux cas sont à distinguer, suivant que l'on a $1 - a^3$ positif ou négatif, c'est-à-dire a plus petit ou plus grand que 1.

Premier cas. $a < 1$; $i < b_1 g$.

Soient Os et Ox (*fig.* 44) les axes des coordonnées; le pre-

Fig. 44.



mier représente dans le profil longitudinal du cours d'eau les points tels que I (*fig.* 39); le second est une ligne perpendiculaire à Os, au point O de la courbe, situé sur Os.

Faisons d'abord décroître x de 0 à $-\infty$, et, pour voir comment s varie, prenons la dérivée de l'équation (10), savoir :

$$(11)\qquad \frac{i\,ds}{H\,dx} = 1 - \frac{1 - a^3}{1 - x^3} = \frac{a^3 - x^3}{1 - x^3}.$$

Cette expression montre que, pour x négatif, $\frac{ds}{dx}$ conserve toujours le signe $+$: donc s et x décroissent en même temps, et la courbe a une branche OV, située dans l'angle des axes négatifs. Quand x converge vers l'infini négatif, on a, d'après (6),

$$\psi(-\infty) = \frac{1}{6}\log\text{hyp}\,1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\text{arc cotang}(-\infty) = -\frac{1}{3}\pi\sqrt{3};$$

donc l'équation (10) devient, à la limite,

$$\frac{is}{H} = x + \frac{2}{9}(1 - a^3)\pi\sqrt{3},$$

équation d'une droite MS asymptote à la branche OV. Cette droite coupe l'axe des profondeurs en dessous de l'origine à une distance $\overline{OM}$ égale en valeur absolue à $\frac{2H}{9}(1 - a^3)\pi\sqrt{3}$; elle est d'ailleurs horizontale, car son angle avec Os a pour tangente $\frac{H\,dx}{ds}$, ou i d'après son équation.

Lorsque x croît ensuite à partir de zéro, $\frac{ds}{dx}$ reste encore positif tant qu'on a $x < a$; pour $x = a$, $\frac{ds}{dx}$ s'annule, et il reste ensuite négatif pour toutes les valeurs de x comprises entre a et 1. Il est aisé aussi de constater que s converge vers l'infini négatif, à mesure que x se rapproche de l'unité. D'après cela, on voit que la courbe s'élève d'abord, en partant de O, dans l'angle des coordonnées positives; arrivée au point C, dont l'ordonnée $\overline{CR}$ répond à $x = a$, elle a une tangente perpendiculaire au fond, de sorte que la profondeur généralement désignée par h' au n° 79 est ici égale à aH; puis, s commençant à décroître, la courbe revient sur elle-même, suivant la branche CBA asymptote à la ligne du régime uniforme, ayant pour équation $x = 1$.

Les valeurs de x supérieures à l'unité rendent $\frac{ds}{dx}$ constamment positif, de sorte que la profondeur croît dans le sens du courant. Si l'on part de $x = 1$, on a d'abord $s = -\infty$; puis à

mesure que x augmente, s augmente aussi et devient infini avec x : la courbe aura donc une branche telle que EFGU, asymptote vers l'amont à la ligne du régime uniforme, et s'écartant indéfiniment de cette ligne, en aval. De ce côté se trouve une autre asymptote, déjà signalée (n° 79); son équation serait la suivante :

$$\frac{is}{\mathrm{H}} = x - (1-a^3)\left[\psi(x) + \frac{1}{9}\pi\sqrt{3}\right] = x - \frac{1}{9}(1-a^3)\pi\sqrt{3},$$

laquelle représente une horizontale LIP coupant l'axe Ox à la distance $\overline{\mathrm{OL}} = \frac{\mathrm{H}}{9}(1-a^3)\pi\sqrt{3}$ de l'origine, dans la partie positive de Ox.

Connaissant ainsi la description générale de la courbe, on peut encore signaler les circonstances suivantes, afin d'en avoir une idée plus complète.

1°. La branche EFGU se trouve entièrement au-dessus de l'asymptote horizontale LIP. En effet, l'équation (7) montre que la hauteur d'un point quelconque au-dessus de cette horizontale est proportionnelle à la fonction $\psi(x)$, qui reste constamment positive pour $x > 1$, comme on le voit par la table IV. La même table indique la valeur $x = 0,574$ comme rendant $\psi(x)$ égal à zéro : donc LIP coupe la branche ABCOV en un point D, répondant à la profondeur $0,574$ H.

2°. Pour avoir les ordonnées $\overline{\mathrm{OB}}$, $\overline{\mathrm{OF}}$ des points B et F situés sur Ox, il faut résoudre par tâtonnement l'équation transcendante

$$x - (1-a^3)\left[\psi(x) + \frac{1}{9}\pi\sqrt{3}\right] = 0,$$

obtenue en faisant $s = 0$ dans l'équation de la courbe. On en déduira deux valeurs de x qui seront les rapports des ordonnées en question à la profondeur H du régime uniforme.

3°. La distance $\overline{\mathrm{OR}}$ est l'abscisse s répondant à l'ordonnée $\overline{\mathrm{CR}} = a\mathrm{H}$. Donc

$$\frac{i.\overline{\mathrm{OR}}}{\mathrm{H}} = a - (1-a^3)\left[\psi(a) + \frac{1}{9}\pi\sqrt{3}\right].$$

4°. La rencontre des asymptotes IT, IP s'effectue en I, point dont les coordonnées $\overline{OK} = s$, $\overline{IK} = x\mathrm{H}$ doivent satisfaire à l'équation de la droite LIP. Donc on a, x étant ici égal à 1,

$$\frac{i.\overline{OK}}{\mathrm{H}} = 1 - \frac{1}{9}(1 - a^3)\pi\sqrt{3},$$

ce qui fait connaître $\overline{OK}$. L'ordonnée correspondante de la courbe, ou $\overline{GK}$, se déduira de l'équation (10), en y faisant $s = \overline{OK}$, $x = \frac{\overline{GK}}{\mathrm{H}}$: on aura ainsi

$$1 - \frac{1}{9}(1 - a^3)\pi\sqrt{3} = \frac{\overline{GK}}{\mathrm{H}} - (1 - a^3)\left[\psi\left(\frac{\overline{GK}}{\mathrm{H}}\right) + \frac{1}{9}\pi\sqrt{3}\right],$$

ou bien, si l'on pose $\overline{GK} = \mathrm{H}(1 + n)$,

$$n - (1 - a^3)\psi(1 + n) = 0.$$

Cette relation permettra de calculer n par tâtonnement.

5°. L'expression

$$\frac{ids}{\mathrm{H}dx} = \frac{a^3 - x^3}{1 - x^3}$$

ci-dessus employée donne, pour un point quelconque, la tangente de l'angle que la courbe fait avec l'axe des s, car cette tangente a pour valeur $\frac{\mathrm{H}\,dx}{ds}$ ou $\frac{i(1-x^3)}{a^3 - x^3}$. Pour $x = 0$, en particulier, elle devient égale à $\frac{i}{a^3}$ ou à $b_1 g$, soit encore à $\frac{1}{255}$ environ. Ainsi, la courbe coupe le fond en O sous un angle très-aigu.

6°. Le rayon de courbure ρ serait, d'après une formule connue,

$$\rho = \frac{\pm\left[1 + \left(\frac{ds}{dh}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 s}{dh^2}} = \frac{\pm\left[1 + \left(\frac{ds}{\mathrm{H}\,dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 s}{\mathrm{H}^2 dx^2}},$$

expression qui devient, en remplaçant $\frac{ds}{\mathrm{H}\,dx}$ par sa valeur,

$$\rho = \frac{\pm\left[1 + \frac{1}{i^2}\left(\frac{a^3 - x^3}{1 - x^3}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3(1 - a^3)}{\mathrm{H}i}\cdot\frac{x^2}{(1 - x^3)^2}} = \frac{\pm \mathrm{H}i\left[(1 - x^3)^2 + \frac{1}{i^2}(a^3 - x^3)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{3(1 - a^3)\,x^2(1 - x^3)}.$$

Pour $x = 0$, on a $\rho = \infty$: la courbe est donc aplatie en O, comme l'indique la figure. En C, on a $x = a$, et par suite

$$\rho = \frac{\mathrm{H}i(1 - a^3)}{3a^2},$$

ou, à cause de $i = a^3 b_1 g$,

$$\rho = \frac{1}{3} b_1 g\,\mathrm{H}a\,(1 - a^3);$$

cette valeur est toujours une très-petite fraction de H, car, pour $a < 1$, le produit $a(1 - a^3)$ ne dépasse pas 0,4725, maximum répondant à $a^3 = \frac{1}{4}$, et d'un autre côté on a

$$\frac{1}{3} b_1 g = 0{,}001308.$$

Par conséquent le rayon de courbure en C serait, au plus, 0,00062 H : la courbe doit présenter là une pointe excessivement aigue (*).

Le tableau suivant résume les principales données numériques dont la recherche vient d'être indiquée. Pour vingt-trois pentes particulières, il fait connaître directement les longueurs $\overline{\mathrm{OM}}$, $\overline{\mathrm{OL}}$, $\overline{\mathrm{OB}}$, $\overline{\mathrm{OF}}$, $\overline{\mathrm{GK}}$, $\overline{\mathrm{OR}}$, toutes définies par leur rapport à H. Dans le cas d'une pente comprise entre celles du tableau, l'interpolation conduirait à des résultats approximatifs.

(*) Cette pointe n'existe pas dans la *fig.* 44, parce qu'on a fait la construction avec une échelle des longueurs 200 fois moindre que celle des profondeurs. On a supposé d'ailleurs $a^3 = 0{,}30$ (soit une pente de $1^{\mathrm{m}}{,}177$ par kilomètre) et $\mathrm{H} = 1$.

a^2	a	PENTE DU LIT par kilomètre $= i . 1000^m$.	$\overline{OM}$	$\overline{OL}$	$\overline{OB}$	$\overline{OF}$	$\overline{GK}$	$\overline{OR}$
		m						
0,000	0,0000	0,000	1,209	0,605	0,000	1,155	1,341	0,0
0,001	0,1000	0,004	1,208	0,604	0,160	1,155	1,341	19,1
0,005	0,1710	0,020	1,203	0,602	0,271	1,153	1,340	32,8
0,010	0,2164	0,039	1,197	0,599	0,340	1,151	1,339	41,4
0,020	0,2714	0,078	1,185	0,593	0,427	1,147	1,338	52,0
0,030	0,3107	0,118	1,173	0,586	0,486	1,143	1,335	59,6
0,040	0,3420	0,157	1,161	0,580	0,534	1,139	1,333	66,0
0,050	0,3694	0,196	1,149	0,574	0,572	1,135	1,331	71,1
0,060	0,3914	0,235	1,137	0,568	0,605	1,132	1,329	75,5
0,080	0,4309	0,314	1,112	0,556	0,660	1,124	1,325	83,3
0,100	0,4642	0,392	1,088	0,544	0,705	1,117	1,322	90,1
0,120	0,4932	0,471	1,064	0,532	0,742	1,109	1,317	95,9
0,150	0,5313	0,589	1,028	0,514	0,789	1,098	1,310	103,6
0,200	0,5848	0,785	0,967	0,484	0,848	1,081	1,299	115,3
0,250	0,6300	0,981	0,907	0,453	0,892	1,065	1,288	125,2
0,300	0,6694	1,177	0,846	0,423	0,924	1,051	1,276	134,2
0,400	0,7368	1,569	0,726	0,363	0,967	1,026	1,251	150,5
0,500	0,7937	1,962	0,605	0,302	0,988	1,010	1,224	165,6
0,600	0,8434	2,354	0,484	0,242	0,996	1,004	1,195	180,1
0,700	0,8879	2,746	0,363	0,181	1,000	1,000	1,162	194,8
0,800	0,9283	3,139	0,242	0,121	1,000	1,000	1,123	210,4
0,900	0,9655	3,531	0,121	0,060	1,000	1,000	1,077	228,2
1,000	1,0000	3,924	0,000	0,000	1,000	1,000	1,000	254,8

Dans le cas singulier de $a = 1$, auquel se rapporte la dernière ligne du tableau, la courbe se réduit à une droite horizontale, comme le montre l'équation (10), qui devient alors

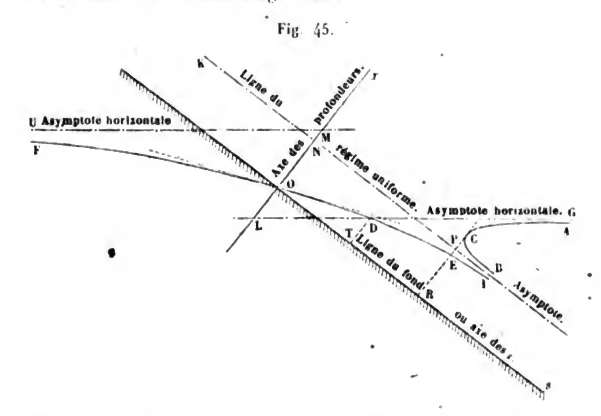
$$\frac{is}{H} = x.$$

DEUXIÈME CAS. $a > 1$; $i > b_1 g$.

Lorsque a reçoit une valeur supérieure à l'unité, quelques-unes des propriétés reconnues tout à l'heure, dans le premier cas, subsistent encore : ainsi, la courbe a encore trois asymptotes, savoir la ligne du régime uniforme et deux horizontales; l'expression générale du rayon de courbure reste la même, et devient encore infinie pour $x = 0$; la tangente à l'origine a sur les axes coordonnés une inclinaison exprimée d'une manière identique. Mais, malgré ces traits communs, la

forme de la courbe n'en subit pas moins une altération profonde, comme on peut en juger par la *fig.* 45, construite avec les données $a^3=2$, $H=1$, l'échelle des profondeurs étant en outre 100 fois celle des longueurs s.

Fig. 45.



Pour faire la discussion, reprenons la valeur (11) de $\frac{ids}{Hdx}$. Ici a^3 est supérieur à 1; donc $\frac{ds}{dx}$ conserve le signe + pour x compris entre $-\infty$ et 1, limites qui donnent respectivement, d'après l'équation (10) de la courbe, $s=-\infty$ et $s=+\infty$; donc aussi la courbe a deux branches infinies OF, ODEI (*fig.* 45), la première dans l'angle des coordonnées négatives, la seconde dans l'angle opposé. On reconnaîtrait comme dans le premier cas que ODEI est asymptote, vers l'aval, à la ligne KNP du régime uniforme, répondant à $x=1$, et que OF tend du côté de l'amont vers l'asymptote horizontale MU représentée par l'équation

$$\frac{is}{H}=x-\frac{2}{9}(a^3-1)\pi\sqrt{3}.$$

Le point M où cette droite coupe l'axe des profondeurs passe au côté positif et la distance $\overline{OM}$ est égale à $\frac{2H}{9}(a^3-1)\pi\sqrt{3}$.

Quand x prend la série de grandeurs entre 1 et ∞, il y a pour $x = a$ un changement de signe de la dérivée $\frac{ds}{dx}$, qui passe du négatif au positif : par conséquent, la distance s, d'abord fonction décroissante de x à partir de $x = 1$, devient croissante à partir de $x = a$. La portion de courbe BCA correspondante aura donc un retour au point C, dont l'ordonnée $\overline{CR}$ (analogue à h' du n° 79) est aH. On trouve encore facilement que la branche infinie CB a pour asymptote la ligne du régime uniforme, tandis que la branche CA s'approche indéfiniment de l'horizontale LG définie par l'équation

$$\frac{is}{H} = x + \frac{1}{9}(a^3 - 1)\pi\sqrt{3}.$$

Les deux asymptotes dont il s'agit tendent vers leurs branches respectives en aval; la seconde coupe l'axe des x du côté négatif à une distance $\overline{OL}$ de l'origine, ayant pour valeur $\frac{H}{9}(a^3 - 1)\pi\sqrt{3}$.

Voici encore quelques détails bons à connaître pour faciliter le tracé de l'épure analogue à la *fig.* 45.

1°. Les deux branches infinies AC, CB, répondant à $x > 1$, sont entièrement au-dessous de l'asymptote horizontale LG, car d'après l'équation (7) les cotes $-y$ de leurs divers points sont égales au facteur positif $H\psi(x)$ multiplié par le nombre négatif $1 - a^3$. Si au contraire on prend la branche IOF se rapportant à $x < 1$, on sait que $\psi(x)$ reste positif pour $x > 0{,}574$ et devient négatif pour x inférieur à cette limite, qui donne $\psi(x) = 0$; donc la branche IOF, d'abord située en dessous de LG quand x est rapproché de 1, coupe cette ligne en un point D ayant l'ordonnée $\overline{DT} = 0{,}574\,H$, puis passe au-dessus. La distance $\overline{OT}$ s'obtient par l'équation (10), puisque $\overline{DT}$ est connu : on aurait

$$\frac{i.\overline{OT}}{H} = 0{,}574 + \frac{1}{9}(a^3 - 1)\pi\sqrt{3}.$$

2°. La distance $\overline{OR}$ répond à $x = a$; sa valeur analytique est la même que dans le premier cas. La profondeur $\overline{ER}$, répon-

dant à $s = \overline{OR}$, résultera de l'équation

$$\frac{i.\overline{OR}}{H} = \frac{\overline{ER}}{H} + (a^3 - 1)\left[\psi\left(\frac{\overline{ER}}{H}\right) + \frac{1}{9}\pi\sqrt{3}\right]$$
$$= a + (a^3 - 1)\left[\psi(a) + \frac{1}{9}\pi\sqrt{3}\right],$$

ou bien

$$\frac{\overline{ER}}{H} + (a^3 - 1)\psi\left(\frac{\overline{ER}}{H}\right) = a + (a^3 - 1)\psi(a).$$

On cherchera par tâtonnement une valeur de $\frac{\overline{ER}}{H}$, inférieure à 1, qui satisfasse à cette équation.

Nous donnons ci-après le tableau des résultats numériques relatifs à neuf valeurs particulières de a^3, comprises entre 1 et 10; les pentes correspondantes varient de $3^m,924$ à $39^m,235$ par kilomètre. Toutes les distances ou profondeurs y sont définies par leur rapport à H.

a^3	a	PENTE DU LIT par kilomètre $= i.1000^m$.	$\overline{OL}$	$\overline{OM}$	$\overline{ER}$	$\overline{OR}$	$\overline{OT}$
1,0	1,0000	m 3,924	0,000	0,000	1,000	254,8	146,3
1,5	1,1447	5,885	0,302	0,605	0,960	294,4	148,9
2,0	1,2599	7,847	0,605	1,209	0,929	289,8	150,2
3,0	1,4422	11,771	1,209	2,418	0,885	273,0	151,5
4,0	1,5874	15,694	1,814	3,628	0,852	259,2	152,1
5,0	1,7100	19,618	2,418	4,837	0,828	248,5	152,5
6,0	1,8171	23,541	3,023	6,046	0,809	240,2	152,8
8,0	2,0000	31,388	4,232	8,464	0,780	227,9	153,1
10,0	2,1544	39,235	5,441	10,883	0,759	219,4	153,3

Ce tableau donne lieu à deux observations. D'abord $\overline{OR}$ passe par un maximum, entre $a^3 = 1$ et $a^3 = 2$; secondement $\overline{OT}$ varie peu avec a et semble converger rapidement vers une limite voisine de 153H. C'est ce qu'on peut reconnaitre à priori par l'analyse.

En effet, on a trouvé

$$\frac{\overline{OR}}{H} = \frac{a}{i} - \frac{(1 - a^3)}{i}\left[\psi(a) + \frac{1}{9}\pi\sqrt{3}\right],$$

où bien, à cause de la relation $a^3 = \frac{i}{b_1 g}$,

$$\frac{b_1 g}{H} \cdot \overline{OR} = \frac{1}{a^2} - \left(\frac{1}{a^3} - 1\right)\left[\psi(a) + \frac{1}{9}\pi\sqrt{3}\right].$$

La valeur a_1 de a qui donne le maximum s'obtiendra en égalant à zéro la dérivée du second membre; on trouve ainsi

$$-\frac{2}{a_1^3} + \frac{3}{a_1^4}\left[\psi(a_1) + \frac{1}{9}\pi\sqrt{3}\right] - \left(\frac{1}{a_1^3} - 1\right)\psi'(a_1) = 0.$$

Or la dérivée de la fonction ψ est connue, aussi bien que la fonction elle-même; on a généralement

$$\psi'(x) = \frac{1}{1 - x^3},$$

et par suite, en mettant dans la dernière équation $\frac{1}{1 - a_1^3}$ au lieu de $\psi'(a_1)$,

$$-\frac{2}{a_1^3} + \frac{3}{a_1^4}\left[\psi(a_1) + \frac{1}{9}\pi\sqrt{3}\right] - \frac{1}{a_1^3} = 0,$$

soit, après avoir réduit et multiplié par $\frac{1}{3}a_1^4$,

$$-a_1 + \psi(a_1) + \frac{1}{9}\pi\sqrt{3} = 0.$$

On tire de là, par des essais successifs,

$$a_1 = 1,157 \text{ environ.}$$

La valeur correspondante de $\overline{OR}$ satisferait à la relation

$$\frac{b_1 g}{H} \cdot \overline{OR} = \frac{1}{a_1^2} - \left(\frac{1}{a_1^3} - 1\right)\left[\psi(a_1) + \frac{1}{9}\pi\sqrt{3}\right]$$
$$= \frac{1}{a_1^2} - \left(\frac{1}{a_1^3} - 1\right)a_1 = a_1 = 1,157;$$

le maximum de $\frac{\overline{OR}}{H}$ serait donc $\frac{1,157}{b_1 g}$ ou $294,85$.

Quant à $\overline{OT}$, en faisant $i = a^3 . b_1 g$ dans son expression, nous trouvons

$$\frac{b_1 g}{H} \cdot \overline{OT} = \frac{0,574}{a^3} + \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{a^3}\right)\pi\sqrt{3},$$

d'où résulte

$$\frac{\overline{OT}}{H} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9 b_1 g} - \frac{\pi\sqrt{3} - 9 \times 0,574}{9 b_1 g} \cdot \frac{1}{a^3} = 154,08 - \frac{7,80}{a^3}.$$

Comme a^3 varie de 1 à ∞, on voit que $\frac{\overline{OT}}{H}$ est toujours compris entre 146,3 et 154,1.

Application aux courants naturels, de la courbe ci-dessus étudiée. — En procédant comme nous venons de le faire tout à l'heure, on pourrait construire la courbe affectée par la surface d'un courant d'eau, en mouvement permanent varié dans un lit prismatique de largeur assez grande relativement à la profondeur : cette courbe, considérée dans son étendue complète, serait définie par deux données seulement, la hauteur H du régime uniforme et la pente i du lit. La connaissance de cette dernière serait même à la rigueur suffisante, car on pourrait convenir de prendre H pour unité de hauteur. Cela fait, si l'on voulait déterminer le profil en long de la surface de l'eau, entre deux sections choisies d'une manière quelconque, il suffirait d'indiquer la profondeur h ou le rapport $x = \frac{h}{H}$ dans l'une d'elles; on déterminerait le point de la courbe répondant à cette valeur de x, puis on suivrait la courbe, en remontant ou en descendant (suivant le cas), jusqu'à l'autre section : on aurait ainsi le profil demandé.

Mais il est bien entendu que ce résultat demeure soumis aux restrictions déjà énoncées d'une manière générale (n° 79). Ainsi, lorsqu'on part d'une section faite en un point de la branche AB (*fig.* 44) et qu'on descend suivant le fil de l'eau, on finit par arriver au point C où la surface devrait être perpendiculaire au fond : le même fait se produirait en parcourant la portion OC dans le sens de O vers C, ou bien l'une des branches AC, BC (*fig.* 45), mais dans le sens opposé à celui du courant. Dans ce cas la courbe cesse de s'appliquer au courant naturel, au moins quand on arrive près du point C, et nous ne pouvons dire alors d'une manière bien certaine ce qui arrivera en réalité. Une expérience très-curieuse de Bidone, que nous étudierons plus loin (§ IV), permet bien quelques inductions à cet égard, mais seulement pour le cas où l'on aurait, comme ce savant hydraulicien, à faire usage de la branche AC (*fig.* 45), et où le régime uniforme existerait primitivement, avant la surélévation de l'eau par un barrage.

L'impossibilité de réaliser la profondeur calculée pour l'une des sections extrêmes se manifeste ici de plusieurs manières. Si l'on part d'un point de la portion CO (*fig.* 44) ou IO (*fig.* 45)

et qu'on remonte le courant, on arrive, après un parcours plus ou moins long, mais toujours fini, à trouver à des profondeurs nulles ou négatives, qui par conséquent ne peuvent pas exister. La courbe calculée ne saurait donc donner la figure réelle du courant que tout au plus sur une certaine étendue en amont du point de départ, et nous ne savons pas ce qu'il faudrait ensuite lui substituer. On pourrait aussi partir d'un point de la branche EFGU (*fig.* 44); en suivant le fil de l'eau, on obtiendrait des profondeurs indéfiniment croissantes, et, dans la section d'embouchure, un niveau dépassant peut-être celui du réservoir indéfini qui reçoit le courant. Dans ces circonstances, les profondeurs sont censées déterminées, pour les sections extrêmes, au moyen de conditions indépendantes du courant proprement dit, et le passage de l'une à l'autre au moyen de la courbe du mouvement permanent est impossible.

Ainsi donc, voilà une série de cas particuliers où le mouvement permanent ne peut s'établir, ou bien dans lesquels il ne s'établirait qu'avec des propriétés contraires, en quelques points, à nos hypothèses fondamentales, telles que le parallélisme des filets ou la loi de la résistance du lit. Ce sont là des difficultés dont l'expérience et la théorie n'ont pas encore triomphé, et nous pourrons seulement donner un peu plus loin quelques conjectures.

Hâtons-nous cependant de dire que les ingénieurs, dans leur pratique, ne rencontreront pas ordinairement des questions de cette espèce. Celle qu'ils ont le plus souvent à résoudre consiste à trouver affectée par la surface d'un cours d'eau, en amont d'un barrage qui élève le niveau en dessus du régime uniforme, la pente i étant d'ailleurs inférieure à la limite de $3^m,92$ par kilomètre. Alors on a $i < b_1 g$ et $a < 1$; comme en outre, près du barrage, h dépasse H, il faut suivre, en remontant, la branche UGFE (*fig.* 44) : rien n'étant supposé pouvoir empêcher la profondeur indiquée par cette courbe de se produire en amont, on admet qu'elle se produira effectivement, et le problème sera résolu. Si la profondeur est grande immédiatement derrière le barrage, la surface sera d'abord sensiblement horizontale; puis elle s'inclinera peu à peu, en se rapprochant de la ligne du régime uniforme, qu'elle raccorderait à l'infini vers l'amont.

Construction de la table IV donnant les valeurs de $\psi(x)$. — Quand x est petit, on prend l'équation

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{1}{1-x^3}$$

et on la développe en série suivant les puissances de la variable x. On obtient ainsi

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = 1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \ldots,$$

ou bien, en intégrant entre les limites o et x,

$$\psi(x) = \psi(0) + x + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{10}x^{10} + \frac{1}{13}x^{13} + \ldots.$$

Or, comme on le sait déjà,

$$\psi(0) = -\frac{1}{9}\pi\sqrt{3} = -0,604600;$$

donc

$$(12) \quad \psi(x) = -0,604600 + x + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{10} + x^{10} + \frac{1}{13}x^{13} + \ldots,$$

série très-rapidement convergente quand x n'a qu'une petite valeur. Si x se rapprochait de 1, on poserait

$$x = 1 - x',$$

et par suite

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{1-(1-x')^3} = \frac{1}{3x' - 3x'^2 + x'^3} = \frac{1}{3x'} \cdot \frac{1}{1 - x' + \frac{x'^2}{3}}.$$

La fonction $\frac{1}{1 - x' + \frac{x'^2}{3}}$ peut se remplacer par un développement de la forme

$$1 + \alpha x' + \beta x'^2 + \gamma x'^3 + \delta x'^4 + \ldots,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, étant des nombres qu'on trouve sans difficulté par la méthode des coefficients indéterminés. On arrive de cette manière à la relation

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{1}{3x'}\left\{\begin{array}{l} 1 + x' + \frac{2}{3}x'^2 + \frac{1}{3}x'^3 + \frac{1}{9}x'^4 - \frac{1}{27}x'^6 - \frac{1}{27}x'^7 \\ - \frac{2}{81}x'^8 - \frac{1}{81}x'^9 - \frac{1}{243}x'^{10} + \frac{1}{729}x'^{12} \\ + \frac{1}{729}x'^{13} + \frac{2}{2187}x'^{14} + \frac{1}{2187}x'^{15} + \ldots \end{array}\right\}.$$

On a de plus

$$dx = -dx';$$

multipliant membre à membre et intégrant, on trouve

$$(13)\quad \begin{cases} \psi(x) = K - \frac{1}{3}\log\text{hyp}\,x' - \frac{1}{3}x' - \frac{1}{9}x'^2 - \frac{1}{27}x'^3 - \frac{1}{108}x'^4 + \frac{1}{486}x'^6 \\ \quad + \frac{1}{567}x'^7 + \frac{1}{972}x'^8 + \frac{1}{2187}x'^9 + \frac{1}{7290}x'^{10} - \frac{1}{26244}x'^{12} \\ \quad - \frac{1}{28431}x'^{13} - \frac{1}{45927}x'^{14} - \frac{1}{98415}x'^{15} - \ldots, \end{cases}$$

K étant une constante à déterminer. D'après l'équation précédente, on voit évidemment que K est la limite vers laquelle tend la fonction $\psi(x) + \frac{1}{3}\log\text{hyp}\,x'$ ou $\psi(x) + \frac{1}{6}\log\text{hyp}\,(x-1)^2$ pour $x' = 0$, c'est-à-dire pour $x = 1$. Or la valeur (6) de $\psi(x)$ peut s'écrire

$$\psi(x) = \frac{1}{6}\log\text{hyp}(1 + x + x^2) - \frac{1}{6}\log\text{hyp}\,(x-1)^2 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\text{arc cotang}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}};$$

donc

$$K = \lim\left[\psi(x) + \frac{1}{6}\log\text{hyp}\,(x-1)^2\right] = \frac{1}{6}\log\text{hyp}\,3 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\text{arc cotang}\sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{6}\log\text{hyp}\,3 - \frac{1}{18}\pi\sqrt{3} = -0,119\,198,$$

valeur à reporter dans la série (13). Les séries (12) et (13) permettront de calculer assez rapidement la partie de la table IV relative aux valeurs de x comprises entre 0 et 1, la première série s'appliquant jusqu'à $x = 0,50$, et la seconde au delà.

Pour la seconde partie, relative aux valeurs de x supérieures à 1, nous changerons encore de variable et poserons

$$\frac{1}{x} = z,$$

afin de remplacer l'argument x, variable de 1 à ∞, par un autre $\frac{1}{x}$ ou z, compris entre 1 et 0. Nous aurons

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{1}{1-x^3} = \frac{z^3}{z^3-1},$$

$$dx = -\frac{1}{z^2}dz,$$

équations qui, multipliées membre à membre, donnent

$$d\psi(x) = \frac{z\,dz}{1-z^3}.$$

Après avoir développé le second membre suivant les puissances entières, et positives de z, on effectuera l'intégration, et l'on trouvera successivement

$$d\psi(x) = z\,dz(1 + z^3 + z^6 + z^9 + z^{12} + \ldots),$$

$$(14) \qquad \psi(x) = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{8}z^8 + \frac{1}{11}z^{11} + \frac{1}{14}z^{14} + \ldots.$$

Il n'y a pas de constante à mettre dans la série intégrale, car on sait déjà que $\psi(x)$ s'annule pour $x = \infty$, c'est-à-dire pour $z = 0$.

Il convient également de chercher une autre série applicable aux valeurs de z rapprochées de l'unité, cas dans lequel la précédente converge trop lentement et devient d'un usage pénible. Alors on fait

$$z = 1 - z',$$

d'où résulte

$$d\psi(x) = -\frac{(1-z')\,dz'}{1-(1-z')^3} = -\frac{1}{3}\frac{dz'}{z'}\frac{1-z'}{1 - z' + \frac{z'^2}{3}}.$$

Le facteur $\dfrac{1}{1 - z' + \frac{z'^2}{3}}$ peut se remplacer par la série

$$1 + \alpha z' + \beta z'^2 + \gamma z'^3 + \delta z'^4 + \ldots,$$

dont on a déjà parlé; et, tout calcul fait, il vient

$$d\psi(x) = -\frac{dz'}{3z'}\left\{\begin{array}{l} 1 - \frac{1}{3}z'^2 - \frac{1}{3}z'^3 - \frac{2}{9}z'^4 - \frac{1}{9}z'^5 - \frac{1}{27}z'^6 + \frac{1}{81}z'^8 \\ + \frac{1}{81}z'^9 + \frac{2}{243}z'^{10} + \frac{1}{243}z'^{11} + \frac{1}{729}z'^{12} \\ - \frac{1}{2187}z'^{14} - \frac{1}{2187}z'^{15} - \ldots \end{array}\right\}.$$

Par suite l'intégration donne, en nommant K′ une constante,

$$(15) \left\{\begin{array}{l} \psi(x) = K' - \frac{1}{3}\log z' + \frac{1}{18}z'^2 + \frac{1}{27}z'^3 + \frac{1}{54}z'^4 + \frac{1}{135}z'^5 + \frac{1}{486}z'^6 \\ \qquad - \frac{1}{1944}z'^8 - \frac{1}{2187}z'^9 - \frac{1}{3645}z'^{10} - \frac{1}{8019}z'^{11} - \frac{1}{26244}z'^{12} \\ \qquad + \frac{1}{91854}z'^{14} + \frac{1}{98415}z'^{15} + \ldots. \end{array}\right.$$

K′ est la limite vers laquelle tend $\psi(x) + \frac{1}{3}\log\text{hyp}\,z'$ pour $z' = 0$,

c'est-à-dire pour $z = 1$, $x = 1$; ainsi

$$K' = \lim\left[\psi(x) + \frac{1}{3}\log\text{hyp}(1-z)\right] = \lim\left[\psi(x) + \frac{1}{3}\log\text{hyp}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= \lim\left[\psi(x) + \frac{1}{6}\log\text{hyp}(x-1)^2 - \frac{1}{6}\log\text{hyp}\,x^2\right],$$

et, attendu que $\log\text{hyp}\,x^2$ s'annule pour $x = 1$,

$$K' = \lim\left[\psi(x) + \frac{1}{6}\log\text{hyp}(x-1)^2\right] = K = -0,119198.$$

Tout est donc connu maintenant dans la série (15), applicable, concurremment avec la série (14), au calcul de la seconde partie de la table IV.

81. *Extension approximative des formules et résultats concernant les lits prismatiques, à des lits de figure quelconque.* — Dans tout ce qui a été dit aux nos 78, 79 et 80, nous avons supposé un lit à pente et à profil transversal constants; s'il en était différemment, mais que les variations fussent progressives et assez lentes, on pourrait toujours décomposer le courant en une série de portions, pour lesquelles on regarderait le lit comme sensiblement prismatique ou cylindrique : on rendrait ainsi applicables les résultats trouvés pour cette espèce de lits, et l'on simplifierait la solution de problème posé au n° 77.

§ IV. — Du ressaut à la superficie des cours d'eau.

82. *Expérience de Bidone.* — Un savant piémontais, Bidone, dont nous avons déjà cité les expériences sur la contraction des veines fluides, a le premier observé et décrit en détail un cas particulier, très-intéressant au point de vue scientifique, de l'écoulement de l'eau dans un canal découvert. Ayant à sa disposition un canal en maçonnerie à section rectangulaire, terminé latéralement par des plans verticaux distants de $0^m,325$, et au fond par un plan incliné à $0^m,023$ par mètre, il y fit couler un volume d'eau de $0^{mc},0351$ par seconde. Le courant présentait d'abord, vers l'amont, une épaisseur de $0^m,064$, peu différente de celle du régime uniforme (*), et qui se maintenait

(*) Si l'on nomme H cette profondeur, la section du courant sera $0,325\,H$, la vitesse $\frac{0,0351}{0,325\,H}$, le périmètre mouillé $0,325 + 2H$: l'équation du mouve-

en conséquence à peu près constante sur une certaine longueur. Bidone établit ensuite un barrage qui avait pour effet de porter à $0^m,28$ la profondeur mesurée à un mètre en arrière, et voici ce qu'il reconnut : l'eau formait encore une nappe de $0^m,064$ d'épaisseur, coulant parallèlement au fond, jusqu'à $4^m,50$ en amont du barrage; puis la profondeur prenait brusquement un accroissement considérable et se trouvait presque triplée; après quoi l'eau poursuivait sa route, sans agitation notable, et avec une surface légèrement convexe, jusqu'au déversoir par-dessus lequel elle s'écoulait (*).

L'accroissement brusque de profondeur, ainsi produit, sans inégalité du fond, dans un canal prismatique, a reçu des hydrauliciens le nom de *ressaut superficiel*, ou simplement de *ressaut*.

Puisque l'on donne la pente et le profil du lit ainsi que la profondeur $h_n = 0^m,28$ à l'extrémité d'aval du courant, on peut se demander si la méthode du n° 79 ne ferait pas connaître le profil longitudinal de la surface libre, entre cette profondeur h_n et la profondeur $0^m,064$ qu'on sait exister à une certaine distance en amont. Or on constate aisément que $\frac{ds}{dh}$ est d'abord positif pour $h = h_n = 0^m,28$, de sorte que la profondeur diminue en remontant le courant; secondement, quand on fait décroître h entre les deux limites $0^m,28$ et $0^m,064$, on voit que le numérateur de $\frac{ds}{dh}$ ou le binôme $1 - \frac{U^2 l}{g\Omega}$ s'annule pour

---

ment uniforme (n° 70)

$$R\,i = b_1 U^2$$

deviendrait donc ici

$$\frac{0,325\,H}{0,325 + 2\,H}\,0,023 = 0,0004\left(\frac{0,0351}{0,325\,H}\right)^2.$$

On tire de là, par tâtonnement, $H = 0^m,0657$, valeur très-peu supérieure à celle que donne l'expérience. La différence s'explique aisément, soit par une légère erreur de mesure, soit par le manque d'exactitude absolue du coefficient b_1 que nous avons pris égal à 0.0004. Pour trouver $H = 0^m,064$, il faudrait diminuer un peu ce nombre et faire $b_1 = 0,000371$.

(*) *Voir* les *Mémoires de l'Académie de Turin*, année 1820, tome XXV.

une valeur intermédiaire h'. En effet, nous avons

$$l = 0^m,325, \quad \Omega = 0,325 h, \quad U = \frac{0,0351}{0,325 h} = \frac{0,108}{h};$$

on obtiendra donc h' en posant

$$1 - \frac{(0,108)^2}{g h'^3} = 0,$$

d'où

$$h' = 0^m,106.$$

Donc on se trouve dans le premier cas d'exception mentionné au n° 79, celui dans lequel on a $\frac{ds}{dh} = 0$ pour une profondeur comprise entre celles des sections extrêmes. L'induction qui se présente alors naturellement à l'esprit, comme conséquence de l'expérience de Bidone, c'est que si un courant coule primitivement avec la profondeur H du régime uniforme; si cette profondeur H est plus petite que la valeur h' capable d'annuler $\frac{ds}{dh}$; enfin, si le courant est relevé en un certain point, par un barrage, à un niveau qui lui donne une profondeur supérieure à h' : dans ce cas, le gonflement produit par le barrage se terminera du côté d'amont par un ressaut superficiel, pourvu que le canal soit suffisamment long pour permettre la production du phénomène. Toutes les conditions énoncées dans notre proposition sont en effet satisfaites par les données de l'expérience en question.

Elles le sont encore, quand un courant très-large et présentant une section analogue à la *fig.* 39 coule uniformément dans un lit prismatique dont la pente est supérieure à la limite $b_1 g$, et qu'un barrage vient ensuite exhausser la surface primitive jusqu'à un point de la branche de courbe AC (n° 80, *fig.* 45), car $\frac{ds}{dh}$ devient nul en C pour une profondeur $\overline{CR} = a H = H \sqrt[3]{\frac{i}{b_1 g}}$, comprise entre H et la profondeur créée derrière le barrage. Par conséquent la branche $\overline{AC}$, qui ne peut physiquement se continuer au delà du point C et revenir sur

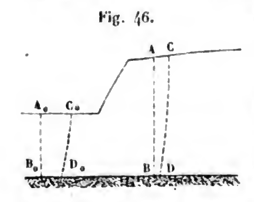
elle-même suivant CB, serait limitée vraisemblablement par un ressaut brusque, aux environs de C, en supposant le barrage assez loin de l'origine du courant.

L'existence d'un ressaut donne donc une explication plausible d'une exception particulière à la formule du mouvement permanent varié dans un lit prismatique, exception comprise parmi celles qu'on a signalées en termes généraux (nos 79 et 80).

Sans nous occuper davantage des causes, encore inconnues, qui sont capables de donner lieu à un ressaut, nous allons maintenant l'admettre comme un fait possible, et, dans l'hypothèse où ce fait existe réellement, nous chercherons à en reconnaître théoriquement les circonstances.

83. *Relation entre les profondeurs immédiatement avant et après le ressaut.* — Considérons une portion de courant découvert, comprise entre les sections tranversales A_0B_0, AB (*fig.* 46), très-voisines l'une de l'autre, dans l'intervalle desquelles s'effectue un ressaut superficiel : appliquons au sytème matériel liquide A_0B_0AB le théorème des quantités de mouvement projetées sur l'axe du courant. Pendant un temps très-court θ ce système aura changé de position et sera venu en C_0D_0CD; en vertu de la permanence supposée dans le mouvement, il y aura en chaque point de la partie intermédiaire C_0D_0AB, au commencement et à la fin du temps θ, des masses égales animées des mêmes vitesses; dans ce temps θ, la variation de la quantité de mouvement projetée, appartenant au système matériel A_0B_0AB, sera donc égale à la quantité de mouvement de la tranche finale ABCD, moins celle de la tranche initiale $A_0B_0C_0D_0$. Évaluons ces deux quantités de mouvement.

Fig. 46.



Soient à cet effet ω un élément superficiel de AB et v la vitesse du filet qui le traverse; $v\theta$ sera la longueur parcourue par ce filet entre AB et CD, dans le temps θ; $\omega v\theta$ sera le volume d'un cylindre ayant ω pour base et cette longueur $v\theta$ pour hauteur. En nommant Π le poids du mètre cube de liquide, $\frac{\Pi}{g}\omega v\theta$ est la

masse correspondante, $\frac{\Pi}{g}\omega v^2\theta$ la quantité de mouvement; donc si l'on désigne par Σ une somme faite pour tous les éléments ω, la quantité de mouvement de la tranche finale ABCD aura pour expression $\frac{\Pi\theta}{g}\Sigma\omega v^2$. Maintenant appelons U la vitesse moyenne dans la section AB et Ω l'aire de cette section; on aura

$$U\Omega = \Sigma\omega v,$$

de sorte que si l'on pose

$$v = U + w,$$

w étant la différence tantôt positive, tantôt négative, entre v et U, on aura

$$U\Omega = \Sigma\omega(U + w) = U\Omega + \Sigma\omega w,$$

c'est-à-dire $\Sigma\omega w = 0$. D'un autre côté

$$\Sigma\omega v^2 = \Sigma\omega(U + w)^2 = U^2\Omega + 2U\Sigma\omega w + \Sigma\omega w^2,$$

ou, à cause de $\Sigma\omega w = 0$,

$$\Sigma\omega v^2 = U^2\Omega + \Sigma\omega w^2.$$

Ainsi $\Sigma\omega v^2$ diffère de $U^2\Omega$ et le surpasse d'autant plus que les écarts w entre les vitesses v et la vitesse moyenne sont plus considérables. Cependant diverses hypothèses sur la distribution des vitesses dans une section ayant paru démontrer que $\Sigma\omega v^2$ surpasse peu $U^2\Omega$, nous admettrons l'égalité, pour simplifier (*). Il serait d'ailleurs impossible, ne connaissant pas la

---

(*) Plusieurs auteurs ont cherché à évaluer la puissance vive d'une tranche telle que ABCD, quantité qui s'exprimerait, avec nos notations, par $\frac{\Pi\theta}{2g}\Sigma\omega v^3$. On a

$$\Sigma\omega v^3 = \Sigma\omega(U + w)^3 = U^3\Omega + 3U^2\Sigma\omega w + 3U\Sigma\omega w^2 + \Sigma\omega w^3,$$

ou bien, en supprimant $\Sigma\omega w$ (qui est nulle) et réunissant les deux derniers termes,

$$\Sigma\omega v^3 = U^3\Omega + \Sigma\omega w^2(3U + w).$$

De plus, la vitesse additionnelle w, tantôt positive et tantôt négative, peut en général être regardée comme négligeable devant 3 U; cela serait encore vrai jusqu'à un certain point si w prenait des valeurs notables, car certains facteurs

loi de distribution dont il s'agit (puisque le mouvement est varié), d'avoir la vraie valeur de $\Sigma\omega v^2$, et nous sommes forcé de nous contenter de l'expression approximative $\frac{\Pi\theta}{g}U^2\Omega$, pour représenter la quantité de mouvement de la tranche ABCD. De même Ω_0 et U_0 étant l'aire de la section A_0B_0 et la vitesse dans cette section, la quantité de mouvement de $A_0B_0C_0D_0$ s'exprimerait par $\frac{\Pi\theta}{g}U_0^2\Omega_0$, et l'accroissement cherché, pendant le temps θ, par

$$\frac{\Pi\theta}{g}(U^2\Omega - U_0^2\Omega_0).$$

$3U + w$ diminueraient et les autres augmenteraient, par la suppression de w. Donc il est permis de poser simplement

$$\Sigma\omega v^3 = U^3\Omega + 3U\Sigma\omega w^2.$$

La somme $\Sigma\omega v^3$ est, comme on le voit, supérieure à $U^3\Omega$, tout comme $\Sigma\omega v^2$ l'est à $U^2\Omega$; et il y a une relation fort simple entre les deux excès.

En effet, si l'on élimine $\Sigma\omega w^2$ entre la dernière équation et

$$\Sigma\omega v^2 = U^2\Omega + \Sigma\omega w^2,$$

il viendra

$$\Sigma\omega v^2 = U^2\Omega + \frac{1}{3U}(\Sigma\omega v^3 - U^3\Omega) = U^2\Omega\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\Sigma\omega v^3}{U^3\Omega} - 1\right)\right].$$

Cela montre que le facteur par lequel il faut multiplier $U^2\Omega$ pour le rendre égal à $\Sigma\omega v^2$ excède l'unité d'une quantité seulement égale au tiers de la différence $\frac{\Sigma\omega v^3}{U^3\Omega} - 1$.

La dernière différence a été calculée par les auteurs dont nous parlions au commencement de cette note, en faisant des hypothèses plausibles sur la distribution des vitesses dans la section Ω. Suivant Coriolis et Vauthier (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1836) la valeur de $\frac{\Sigma\omega v^3}{U^3\Omega} - 1$ serait probablement exagérée si on la portait à 0,50, et l'on pourrait, dans les cas ordinaires, la fixer à 0,10. Il s'ensuivrait que $\frac{\Sigma\omega v^2}{U^2\Omega}$ ne surpasserait l'unité que de quelques centièmes. (*Voir* également les *Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux courantes*, par M. Dupuit.)

Mais il faut convenir que toutes ces recherches offrent bien de l'incertitude, et que la différence des quantités de mouvement possédées par les tranches ABCD, $A_0B_0C_0D_0$ n'est pas encore exprimée d'une manière qu'on doive considérer comme parfaitement exacte.

Il faut égaler cette quantité à la somme des impulsions des forces extérieures du système, pendant le temps θ, en projection sur l'axe du courant. Or ces forces sont : 1° la pesanteur, dont l'impulsion projetée est sensiblement nulle, parce que le poids total du système, eu égard au rapprochement des sections A_0B_0, AB, est petit relativement aux autres forces, et aussi parce que l'axe de projection est à peu près horizontal; 2° les pressions qui s'exercent sur tout le contour du système; 3° le frottement du lit. De ces pressions on peut d'abord retrancher la pression atmosphérique en chaque point, puisque, agissant sur un contour fermé, elle donnerait une résultante et par suite une impulsion nulles (n° 7); on peut aussi négliger les pressions latérales exercées par le lit, comme normales à l'axe, car on ne troublerait pas le phénomène en supposant le lit prismatique, sur la très-petite longueur B_0B, puisque ce ne serait là qu'une modification insensible dans sa forme générale et ses dimensions. Le même fait d'une petite distance entre A_0B_0 et AB autorise à négliger le frottement du lit, dont l'effet n'est sensible que sur une grande longueur. Il ne reste donc finalement à considérer que les impulsions des pressions sur AB et A_0B_0, calculées abstraction faite de la pression atmosphérique. Soient Y et Y_0 les hauteurs des centres de gravité de ces sections, au-dessous de la ligne d'eau dans chacune d'elles; si nous admettons qu'en AB et A_0B_0 le régime par filets parallèles existe, la pression suivra la loi hydrostatique (n° 18, 4ᵉ règle), et les deux pressions auront pour valeurs $\Pi\Omega Y$ et $\Pi\Omega_0 Y_0$ (n° 8), ce qui donnera lieu, dans le sens du mouvement, à une impulsion représentée par $\Pi\theta(\Omega_0 Y_0 - \Omega Y)$. On a donc

$$\frac{\Pi\theta}{g}(U^2\Omega - U_0^2\Omega_0) = \Pi\theta(\Omega_0 Y_0 - \Omega Y),$$

soit, après la suppression du facteur $\Pi\theta$,

$$\frac{1}{g}(U^2\Omega - U_0^2\Omega_0) = \Omega_0 Y_0 - \Omega Y.$$

Au moyen de la relation $U\Omega = U_0\Omega_0$, qui exprime l'égalité de débit dans les sections A_0B_0 et AB, on peut aussi ne conserver qu'une seule vitesse, U ou U_0, dans cette équation, qui devien-

dra ainsi

$$(1)\qquad \frac{U_0^2}{g}\left(\frac{\Omega_0}{\Omega}-1\right)=Y_0-\frac{\Omega}{\Omega_0}Y,$$

ou bien encore

$$(2)\qquad \frac{U^2}{g}\left(1-\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)=\frac{\Omega_0}{\Omega}Y_0-Y,$$

suivant celle des deux vitesses que l'on conservera.

Poursuivons le calcul dans l'hypothèse d'un profil rectangulaire à bords verticaux. Alors h_0 et h étant les profondeurs dans les sections A_0B_0 et AB, entre le fond du canal et le niveau du liquide, on aura

$$Y_0=\frac{1}{2}h_0,\quad Y=\frac{1}{2}h,\quad \frac{\Omega}{\Omega_0}=\frac{h}{h_0};$$

les équations (1) et (2) deviennent donc

$$\frac{U_0^2}{g}\left(\frac{h_0}{h}-1\right)=\frac{1}{2}h_0-\frac{1}{2}\frac{h^2}{h_0},$$

$$\frac{U^2}{g}\left(1-\frac{h}{h_0}\right)=\frac{1}{2}\frac{h_0^2}{h}-\frac{1}{2}h;$$

soit en faisant disparaître les dénominateurs h_0 et h, et supprimant le facteur h_0-h,

$$\frac{U_0^2h_0}{g}=\frac{1}{2}h(h+h_0),$$

$$\frac{U^2h}{g}=\frac{1}{2}h_0(h+h_0),$$

soit enfin

$$(3)\qquad h^2+hh_0-2\frac{U_0^2h_0}{g}=0,$$

$$(4)\qquad h_0^2+hh_0-2\frac{U^2h}{g}=0.$$

La première de ces équations fera connaître h en fonction des quantités h_0 et U_0 qui se rapportent à la section d'amont A_0B_0; inversement la seconde donnera h_0 quand on connaîtra la vitesse et la profondeur pour la section d'aval; en résolvant, on

trouvera

(5) $$h = -\frac{1}{2}h_0 + \sqrt{\frac{1}{4}h_0^2 + 2\frac{U_0^2 h_0}{g}},$$

(6) $$h_0 = -\frac{1}{2}h + \sqrt{\frac{1}{4}h^2 + 2\frac{U^2 h}{g}}.$$

Il est nécessaire, pour qu'il y ait effectivement ressaut, qu'on ait $h_0 < h$, c'est-à-dire, d'après les formules (5) et (6),

$$h_0 < -\frac{1}{2}h_0 + \sqrt{\frac{1}{4}h_0^2 + 2\frac{U_0^2 h_0}{g}},$$

$$h > -\frac{1}{2}h + \sqrt{\frac{1}{4}h^2 + 2\frac{U^2 h}{g}};$$

faisant passer le terme négatif du second membre de ces inégalités dans le premier, élevant au carré et simplifiant, on obtient aisément

$$h_0^2 < \frac{U_0^2 h_0}{g}, \quad h^2 > \frac{U^2 h}{g},$$

soit, sous une autre forme,

(7) $$1 - \frac{U_0^2}{gh_0} < 0, \quad 1 - \frac{U^2}{gh} > 0.$$

Or, dans le cas de la section rectangulaire, la quantité désignée généralement par $1 - \frac{U^2 l}{g\Omega}$ (nos 78 et 79) devient $1 - \frac{U^2}{gh}$; on voit donc que, s'il y a ressaut, cette quantité doit changer de signe dans le passage de la profondeur h_0 à la profondeur h, c'est-à-dire s'annuler pour une profondeur h' intermédiaire. Donc la condition nécessaire indiquée par la théorie du ressaut pour la production de ce phénomène concorde avec l'une de celles qui rendent inapplicable la formule du mouvement permanent varié : ou en d'autres termes, lorsque, en faisant usage de cette formule, on rencontrera la première des exceptions indiquées au n° 79, alors précisément la théorie du ressaut deviendra susceptible de s'appliquer. Sans être une preuve mathématique de l'induction que nous avons énoncée (n° 82) au sujet des circonstances dans lesquelles il se produit un ressaut, ce fait vient

en corroborer la probabilité. Nous ferons d'ailleurs observer que les deux inégalités (7) ne constituent pas deux conditions distinctes, car on les déduit de deux équations (3) et (4), identiques par suite de l'égalité $Uh = U_0 h_0$, en les combinant avec la seule inégalité $h > h_0$: il suffira donc de vérifier une seule de ces deux conditions.

Les relations (5), (6) et (7) se mettent encore sous une autre forme que nous allons démontrer. Nous appellerons, comme au n° 80,

l, la largeur du courant;

q, son débit par mètre de largeur, c'est-à-dire ql son débit total;

a^3, le rapport de la pente i du lit au nombre $b_1 g = 0{,}003924$;

x et x_0, les rapports des profondeurs h et h_0 à la profondeur H du régime uniforme.

On a les égalités

$$U_0 = \frac{q}{h_0}, \quad U = \frac{q}{h}.$$

de plus, l'équation du régime uniforme $R\,i = b_1 U^2$ (n° 70) devient

$$\frac{lH}{l+2H}\,i = b_1 \frac{q^2}{H^2};$$

donc on a aussi

$$\frac{U_0^2}{g} = \frac{q^2}{gh_0^2} = \frac{i}{b_1 g}\cdot\frac{lH}{l+2H}\cdot\frac{H^2}{h_0^2} = \frac{lHa^3}{l+2H}\cdot\frac{1}{x_0^2},$$

$$\frac{U^2}{g} = \frac{lHa^3}{l+2H}\cdot\frac{1}{x^2}.$$

La substitution de ces valeurs dans (5) et (6), après avoir divisé les deux membres par H, donnera

(8) $$x = -\frac{1}{2}x_0 + \sqrt{\frac{1}{4}x_0^2 + \frac{2a^3 l}{l+2H}\cdot\frac{1}{x_0}},$$

(9) $$x_0 = -\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{2a^3 l}{l+2H}\cdot\frac{1}{x}}.$$

De même, les inégalités (7) deviennent

(10) $$x_0^3 - \frac{a^3 l}{l+2H} < 0, \quad x^3 - \frac{a^3 l}{l+2H} > 0.$$

Dans le cas particulier où l'on adopte l'hypothèse du n° 80 sur la forme du lit, l étant très-grand, le rapport $\frac{l}{l+2H}$ diffère peu de 1 et peut se remplacer par ce nombre dans les formules (8), (9) et (10). Si l'on supposait en outre $h_0 = H$, comme dans l'expérience de Bidone, il faudrait faire $x_0 = 1$, et l'on trouverait

$$(11) \qquad x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2\alpha^3};$$

la première des inégalités (10) donnerait d'ailleurs comme condition du ressaut

$$(12) \qquad \alpha^3 > 1 \quad \text{ou bien} \quad i > 0,003924.$$

Application numérique des formules. — Substituons dans la formule (5) les données de l'expérience de Bidone, savoir

$$h_0 = 0^m,064, \quad U_0 = \frac{0,108}{h_0} = 1^m,69;$$

alors il viendra

$$h = 0^m,164 \quad \text{et} \quad h - h_0 = 0^m,10.$$

Bidone a trouvé directement par ses mesures $h - h_0 = 0^m,125$. La différence entre le résultat théorique et celui de l'observation provient sans doute de ce que nous avons évalué inexactement la quantité de mouvement des tranches ABCD, $A_0B_0C_0D_0$ (*fig.* 46).

Il est assez curieux que la formule (11), applicable seulement aux lits très-larges et relativement peu profonds, conduise beaucoup plus près de la vérité. La pente du canal sur lequel opérait Bidone était de 0,023, et par conséquent on a

$$\alpha^3 = \frac{i}{b_1 g} = \frac{0,023}{0,003924} = 5,86;$$

il en résulterait, d'après la formule en question,

$$x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 11,72} = 2,96.$$

La profondeur immédiatement à la suite du ressaut serait donc $2,96 \times 0^m,064$ ou $0^m,190$, et la hauteur $h - h_0$ du ressaut deviendrait $0^m,190 - 0^m,064$ ou $0^m,126$. La concordance obtenue cette fois montre qu'il y a une compensation d'erreurs dans notre procédé de calcul. Et en effet l'hypothèse d'un lit infiniment large revient à supprimer le frottement des parois verticales du canal, ce qui augmente la vitesse moyenne à égalité de pente et

de profondeur. Mais, d'un autre côté, on se rappelle que les quantités de mouvement des tranches ABCD et $A_0B_0C_0D_0$ sont réellement plus grandes que les expressions $\frac{\Pi\delta}{g}U^2\Omega$ et $\frac{\Pi\delta}{g}U_0^2\Omega_0$ mises à leur place. On comprend donc que la compensation d'erreurs puisse avoir lieu : seulement nous ne sommes pas en droit d'affirmer qu'elle réussirait toujours aussi bien que dans l'exemple actuel.

84. *Perte de charge éprouvée par le liquide dans le ressaut.* — Le théorème de Bernoulli, appliqué à une molécule pendant son passage de la section A_0B_0 à la section très-voisine AB (*fig.* 46), donnerait, en appelant ζ la perte de charge,

$$\frac{U^2}{2g}-\frac{U_0^2}{2g}=-h+h_0-\zeta,$$

car les niveaux piézométriques, au point de départ et au point d'arrivée, sont A_0 et A, de sorte que la charge s'exprime par h_0-h. On tire de là

$$\zeta=\frac{U_0^2}{2g}-\frac{U^2}{2g}+h_0-h;$$

d'un autre côté, les équations (3) et (4) du n° 83 peuvent s'écrire

$$\frac{U_0^2}{2g}=\frac{h}{4h_0}(h+h_0),\quad \frac{U^2}{2g}=\frac{h_0}{4h}(h+h_0),$$

d'où nous déduirons

$$\frac{U_0^2}{2g}-\frac{U^2}{2g}=\frac{1}{4}(h+h_0)\left(\frac{h}{h_0}-\frac{h_0}{h}\right)=\frac{1}{4hh_0}(h+h_0)^2(h-h_0).$$

Donc enfin

$$\zeta=\frac{1}{4hh_0}(h+h_0)^2(h-h_0)-(h-h_0)=\frac{1}{4hh_0}(h-h_0)[(h+h_0)^2-4hh_0],$$

ou bien

$$\zeta=\frac{(h-h_0)^3}{4hh_0}.$$

Cette perte de charge est toujours réelle et positive dans le cas d'un ressaut constituant une augmentation de profondeur, comme celui observé par Bidone; mais son évaluation se ressent nécessairement des incertitudes qui peuvent affecter la formule du ressaut, dont elle est une conséquence.

85. *Du ressaut d'abaissement.* — Une chose digne de remarque, c'est que si l'on supposait $h_0>h$, de manière qu'en suivant le fil de l'eau on rencontrât un abaissement brusque de la surface, rien ne serait changé

dans les calculs du n° 83, sauf le sens des inégalités (7). Il n'est donc pas absolument impossible qu'un ressaut de cette espèce existe dans un courant : toutefois nous n'avons à cet égard qu'une présomption théorique, et, avant de l'admettre comme suffisamment établie, on doit attendre qu'un observateur à venir en ait montré la réalisation matérielle.

Une objection sérieuse se présente à priori contre la possibilité des abaissements brusques, et les rend peu probables, il faut le reconnaître : c'est que la perte de charge ζ (n° 84) deviendrait négative, que par conséquent elle se changerait en gain, et que la viscosité aurait dû faire un travail positif (n° 15) pendant le passage d'une molécule entre les sections extrêmes du ressaut. Or on est habitué à regarder la viscosité comme une force analogue au frottement, produisant toujours en somme un travail négatif. Mais ce n'est pas encore là une preuve absolue : outre que l'expression de ζ peut donner matière au doute, la nature des actions moléculaires dans un liquide est en définitive trop mal connue pour qu'on soit complétement sûr du signe de leur travail. Les actions intérieures produisent bien un travail moteur dans un ressort qui se détend : l'eau, qui est aussi pourvue d'une élasticité propre, ne pourrait-elle pas agir parfois à la manière d'un ressort?

86. *Usage des formules du ressaut et du mouvement permanent varié, pour déterminer la courbe d'un courant, en amont d'un barrage.* — Supposons que par une cause quelconque l'eau d'un courant, complétement connu dans son état primitif, soit en un certain point surélevée, de manière que la profondeur h_n en ce point se trouve à la fois supérieure à h' et H, profondeurs particulières qui annulent le numérateur et le dénominateur de la formule (4) du n° 78; proposons-nous de déterminer la forme de la surface libre du courant, en remontant à partir du barrage. Quoique la question ainsi posée semble à priori bien déterminée, il est aisé de voir qu'elle comporte une infinité de solutions concordant avec l'hypothèse d'un mouvement permanent varié. En effet, donnons à h une série de valeurs décroissantes à partir de h_n,

$$h_n, \quad h_{n-1}, \quad h_{n-2}, \quad \ldots, \quad h_2, \quad h_1;$$

si toutes ces hauteurs sont supérieures à H et à h', la formule précédente indiquera que $\frac{ds}{dh}$ est positif, c'est-à-dire que h et s croissent ou décroissent simultanément, ou que la profon-

deur diminue en remontant le courant; l'intégration exacte ou approximative fera connaître les distances s comprises entre deux de ces valeurs consécutives de h. Maintenant il faut distinguer deux cas, celui de $h' < H$ et celui de $h' > H$. Dans le premier, on pourrait faire décroître h jusqu'à H sans rencontrer les cas d'exception signalés au n° 79; seulement pour des valeurs très-voisines de H, $\frac{ds}{dh}$ serait très-grand, et la distance intermédiaire très-considérable; cette profondeur limite H ne serait, en général, atteinte qu'à une distance infinie (n° 79). Il y aurait ainsi un raccordement asymptotique avec la surface du régime uniforme. Mais rien n'empêcherait théoriquement de renoncer à la formule du mouvement permanent varié, quand on serait arrivé à une certaine profondeur h'', supérieure à H et conséquemment à h'; puis de prendre la formule du ressaut, qui donnerait une profondeur différente h''', précédant immédiatement h''; enfin, à partir de h''', reprendre l'application de la première formule, pour obtenir la suite du profil, en remontant toujours en sens contraire du fil de l'eau. On voit que, h'' étant arbitraire, on obtiendrait de cette manière autant de profils différents qu'on le voudrait.

Dans le second cas, celui de $h' > H$, il deviendrait impossible de faire décroître h depuis h_n jusqu'à H, et par conséquent d'étendre indéfiniment le profil longitudinal du courant sans passer par la valeur h' qui annule $\frac{ds}{dh}$ et rend inapplicable la formule du mouvement permanent varié. La supposition d'un ressaut est donc ici à peu près forcée. Mais la formule du ressaut n'en donne la hauteur que lorsqu'on connaît la profondeur immédiatement en amont ou en aval; or, comme la théorie n'indique pas le point où il faut renoncer à la formule (4) du n° 78 pour prendre celle du ressaut, en faisant varier ce point on construira encore une infinité de profils.

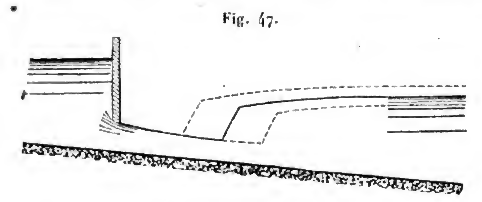
Il est donc indispensable, pour être en mesure de déterminer le profil en long de la surface du courant, qu'on ne se borne pas à indiquer la forme et les dimensions du lit, ainsi que la profondeur immédiatement avant le barrage. Il faut d'autres conditions. On pourrait, par exemple, donner le ni-

veau du courant à une certaine distance du barrage. Ainsi, dans l'expérience de Bidone, on sait que l'eau coule d'abord sur une profondeur de $0^m,064$; cela permet de connaître la profondeur immédiatement après le ressaut [en faisant $h_0 = 0^m,064$ dans la formule (5)], après quoi la formule (4) du n° 78 détermine le profil depuis la profondeur $0^m,28$ qui précède immédiatement le barrage, jusqu'à celle qu'on aura trouvée comme succédant au ressaut.

On pourrait encore admettre une hypothèse : c'est que le ressaut n'a jamais lieu quand le raccordement asymptotique est possible, et que dans le cas contraire, parmi les divers ressauts réalisables, il faut choisir le moins élevé ; mais ce serait là une conception purement théorique ayant besoin d'être sanctionnée par l'expérience.

Dans certains cas, lors même qu'on aurait admis la production d'un ressaut choisi de la manière la plus favorable, on rencontrera l'impossibilité de satisfaire aux conditions que les circonstances extérieures rendent nécessaires dans les sections extrêmes du courant, comme on l'a déjà vu (nos 79 et 80). Ainsi, prenons un courant formé par une veine sortant au-dessous d'une vanne et s'écoulant par un canal prismatique jusqu'à un bassin dont on donne le niveau (*fig.* 47). Comme nous venons

Fig. 47.



de le voir, le profil du courant sera susceptible d'affecter diverses formes, parmi lesquelles il est naturel de choisir celle qui arrive au bassin, juste avec la hauteur voulue : c'est là une affaire de tâtonnement. Mais il pourra se faire que le bassin ait son niveau assez élevé pour qu'il ne soit possible d'y atteindre avec aucune de ces formes. Alors il est vraisemblable que l'eau du bassin viendrait se répandre au-dessus de celle du courant, jusqu'à la vanne, dont l'orifice serait ainsi noyé. Il

pourra également arriver que tous les profils calculés passent au-dessus du bassin; on serait alors conduit à supposer soit un abaissement brusque de surface (n° 85), soit une certaine agitation du liquide, produisant une perte de charge égale à l'excédant de hauteur disponible.

Dans les explications qui précèdent, nous n'avons considéré que le cas d'une surélévation, produite en aval par une cause quelconque, au-dessus du plan du régime uniforme et de celui qui répond à la profondeur h'. On pourrait imaginer beaucoup d'autres cas particuliers qui donneraient lieu à une discussion analogue. Nous ne nous arrêterons pas à en faire la classification.

En résumé, les théories du ressaut et du mouvement permanent varié montrent qu'il subsiste encore un certain vague dans la solution du problème, si important, qui consiste à déterminer la modification produite par un barrage dans la surface d'un cours d'eau, ou, plus généralement, la forme d'un courant dont le mouvement n'est pas uniforme. Le principal défaut de la théorie consiste en ce qu'elle n'est pas en mesure d'assigner les conditions nécessaires et suffisantes pour la production de tel ou tel phénomène qu'elle étudie; lorsque ce phénomène existe, elle indique des relations entre ses diverses circonstances, d'où résultent parfois des conditions sans lesquelles il n'aurait pas lieu; mais jamais on ne peut affirmer que, ces conditions remplies, il existera nécessairement. Ainsi, la surface d'un courant est surélevée par un barrage; le gonflement se raccordera-t-il asymptotiquement ou par ressaut avec la surface primitive? La théorie nous répondra seulement que dans certains cas le raccordement asymptotique est possible, et, s'il a lieu effectivement, que sa forme a une courbe calculable; que dans d'autres cas il ne l'est pas, et qu'alors il y a probablement ressaut; que les profondeurs avant et après le ressaut ont entre elles une certaine relation. Elle ne peut nous dire complétement ce qui arrivera que si l'on fait intervenir d'autres conditions dont il semblait à priori qu'on n'avait pas besoin, et souvent même elle reste complétement en défaut. Une solution plus complète exigerait peut-être qu'on étudiât les mouvements non permanents, ainsi que le passage du mouve-

ment qui existait avant l'établissement du barrage, à celui qui doit se produire après.

NOTE ADDITIONNELLE AUX §§ III ET IV.

Les premières recherches faites sur les questions traitées à partir du n° 73 sont celles qui ont été publiées au commencement de 1828, par M. Belanger, dans son *Essai sur le mouvement des eaux courantes*. Ce travail, dont les bases avaient été trouvées par l'auteur dès 1826, ne fut écrit qu'en 1827, et approuvé au mois de juillet de la même année par le Conseil général des Ponts et Chaussées, qui en demanda la publication.

Avant d'avoir lu le Mémoire de M. Belanger, dans l'hiver de 1828, M. le général Poncelet donna, à l'École d'Application de Metz, la théorie générale des mêmes questions, fondée sur la considération du travail des forces, dont M. Belanger n'avait pas fait usage.

Peu de temps après la publication du Mémoire de M. Belanger, Navier donna une théorie analogue dans son cours de l'École des Ponts et Chaussées, en l'appuyant sur une autre démonstration.

Les *Annales des Ponts et Chaussées*, année 1836, contiennent sur ce sujet deux Mémoires, l'un de M. Vauthier, l'autre de Coriolis, où se trouvent diverses applications des formules du mouvement permanent varié et quelques études sur des points de détail.

M. l'inspecteur général Dupuit a publié, en 1848, un ouvrage ayant pour titre : *Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux courantes*, dans lequel se trouvent des aperçus nouveaux. L'auteur a notamment intégré la formule différentielle qui donne la longueur du courant en fonction de la profondeur, dans divers cas particuliers; il a ensuite donné une table, fondée il est vrai sur des hypothèses restrictives, pour simplifier le calcul du profil longitudinal d'un cours d'eau dont le mouvement n'est pas uniforme. Un travail remarquable de M. de Saint-Venant, inséré dans les *Annales des Mines* (4e série, tome XX), a montré qu'on se passe, au besoin, de ces hypothèses restrictives; des tables numériques annexées à ce Mémoire peuvent remplacer celles de M. Dupuit, et s'appliquent à un cas qu'il avait laissé de côté, celui des lits à section trapézoïdale, dont la profondeur est comparable à la largeur. En nous bornant au cas d'un lit très-large et relativement peu profond, nous avons donné (n° 80) une méthode qui ne suppose pas, comme l'a fait M. Dupuit, que $\frac{U^2}{gh}$ est négligeable devant l'unité (ce qui revient à admettre que le frottement du lit consomme la pente superficielle tout entière) : nos calculs n'en deviennent pas plus compliqués. Mais M. Dupuit peut revendiquer en propre l'idée qui a rendu possible la construction de tables, comme les siennes, celles de M. de Saint-Venant et la table IV, suscep-

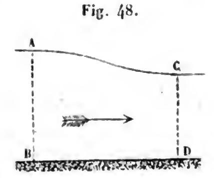
tibles de s'appliquer à des lits de pente quelconque. Il était nécessaire, pour cela, de trouver un artifice de calcul propre à faire disparaître la pente i de l'intégrale à chercher, de manière que celle-ci ne fût plus fonction que du rapport de la profondeur à une ligne constante.

Quant au ressaut, M. Belanger avait proposé, en 1827, une formule obtenue en supposant qu'on pût dans ce phénomène négliger les pertes de charge. Plus tard, en 1838, il a donné la théorie que nous avons reproduite d'après lui au n° 83, et qui semble plus rationnelle.

§ V. — Effets des changements brusques de section dans le lit des rivières ou canaux.

87. *Notions générales.* — La théorie du mouvement permanent varié, donnée au § III de ce chapitre, suppose essentiellement que les filets sont à peu près parallèles dans chaque section; elle ne peut donc s'appliquer à des lits de section ou de pente variable que si les variations sont suffisamment lentes. En supposant, par exemple, une diminution brusque de section, il en résulterait d'abord une contraction suivie d'épanouissement, et, par suite, une perte de charge analogue à celle des ajutages cylindriques. De plus, la loi de répartition des vitesses serait, dans la section contractée, tout à fait différente de ce qu'elle est dans le mouvement uniforme. Pour le montrer, soient v_0 et v les vitesses d'une molécule dans une section AB (*fig.* 48) et dans la section contractée CD; soit en outre y la pente superficielle totale de A en C. Les filets étant supposés parallèles en AB et CD, et ces sections assez rapprochées pour qu'on puisse négliger le frottement du lit et des couches fluides les unes sur les autres, on aurait, d'après le théorème de Bernoulli,

Fig. 48.



$$\frac{v^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} = y,$$

car dans chaque section le niveau piézométrique peut être confondu avec le niveau de l'eau. Il y a donc une quantité constante $2gy$ ajoutée au carré de la vitesse d'un filet quel-

conque, ce qui modifie tout à fait la relation entre la vitesse moyenne et les vitesses au fond ou à la surface. Si la section CD est plus petite que AB, il faut nécessairement admettre que y est positif, sans quoi les vitesses v seraient plus petites que les vitesses v_0, et la dépense de CD ne pourrait égaler celle de AB. On voit alors que le terme constant $2gy$ tend à rapprocher de l'unité le rapport de la vitesse minimum à la vitesse moyenne ; et comme le frottement des parois paraît surtout dépendre de cette vitesse minimum qui a lieu au fond, l'expression ordinaire $\Pi b_1 U^2$, qui représente le frottement en question par mètre carré, dans le cas du mouvement uniforme, deviendra ici trop faible, attendu que nous avons une vitesse au fond plus grande, à égalité de vitesse moyenne (*). Quant à la convergence des trajectoires suivies par les filets, on a dit quelquefois qu'il pouvait en naître une résistance particulière ; mais cette résistance est sans doute très-faible, car dans l'écoulement par un orifice en mince paroi, où le fait de la convergence existe à un très-haut degré, la perte de charge produite est négligeable.

Considérons maintenant le cas d'un élargissement de section. S'il est brusque, il en résultera des remous et tourbillons qui produiront une perte de charge analogue à celle dont la valeur a été étudiée au n° 31. S'il est progressif, mais rapide, les filets suivant le bord tendront à s'en détacher, ce qui sera encore une cause de remous et de perte de charge. Il serait à désirer qu'on pût fixer une limite précise de l'inclinaison relative des bords, au delà de laquelle ce phénomène serait à craindre ; faute de données expérimentales sur ce sujet, il faut prendre une limite assez faible, par exemple un angle de 3 ou 4 degrés. Cet angle n'atteignait pas 4° 30′ dans l'ajutage divergent de Venturi, dont nous avons cité les dimensions au n° 37, et cependant la perte de charge y était considérable : mais le frottement des parois contribuait sans doute à cette perte.

(*) Cette considération montre l'incertitude qui affecte l'expression adoptée pour le frottement du lit contre un liquide en mouvement permanent varié, aussi bien à l'intérieur de tuyaux fermés (n° 55) que dans les canaux découverts (n° 74).

Les changements brusques de section peuvent donner lieu, dans certains cas exceptionnels, à des conséquences qui semblent contraires aux opinions reçues. Par exemple, on admet généralement que si on élargit une rivière sur une assez grande longueur, la vitesse ainsi que la pente superficielle diminuent dans la partie élargie; que, par conséquent, si le niveau en aval de l'élargissement ne change pas, l'opération fera baisser celui de la partie située en amont. Mais les choses peuvent ne pas se passer ainsi pour un élargissement brusque et court. En effet, la partie élargie formera une espèce de bassin, de pente presque nulle, qui devra se trouver au-dessus du niveau constant d'aval, d'une quantité représentant à peu près la hauteur due à la vitesse de sortie. Rien n'empêche que cette surélévation fasse plus que compenser l'affaiblissement de la pente superficielle, et l'on aurait alors, à l'origine de l'élargissement, un niveau plus élevé que dans l'état primitif.

Il y a, au sujet des tuyaux cylindriques, une remarque analogue qui vient à l'appui des appréciations précédentes. Si un tuyau à diamètre et à débit constants est, sur une certaine fraction de sa longueur, remplacé par un autre de diamètre plus grand, le frottement des parois consomme une charge moindre sur la partie élargie; de sorte que, le niveau piézométrique étant supposé constant en aval, celui d'amont tendrait à baisser, par cette cause, à égalité de volume dépensé. Mais d'un autre côté il tend à monter à cause des pertes de charge produites par les changements brusques de diamètre; et comme ces dernières pertes sont indépendantes de la longueur sur laquelle a lieu l'élargissement, tandis que le gain obtenu lui est proportionnel, on conçoit bien qu'elles puissent devenir prédominantes quand on n'élargit qu'une petite fraction de la longueur totale.

Les changements brusques de section dans les cours d'eau donnent lieu à divers problèmes d'un grand intérêt pour les ingénieurs. Malheureusement il n'est pas encore possible, dans l'état actuel de la science, d'en indiquer une solution bien satisfaisante. Nous nous contenterons des exemples traités dans les deux numéros suivants, où la théorie fournit quelques aperçus sans doute incomplets et peu rigoureux, mais que la pratique peut cependant utiliser.

88. *Barrages noyés.* — On suppose un barrage ou déversoir établi en travers sur un cours d'eau, dont le niveau et la dépense sont variables; pour simplifier les calculs que nous avons à faire, nous considérerons le lit comme sensiblement rectangulaire et le fond comme horizontal, aux environs de ce barrage. La dépense ayant une valeur déterminée et connue, on demande : 1° la plus grande hauteur que peut atteindre le niveau d'aval, sans que celui d'amont soit influencé; 2° dans le cas où cette limite serait dépassée, quelle chute s'établira de l'amont à l'aval.

Nous appellerons :

L la largeur du courant;
h_0 sa profondeur en amont à quelques mètres du barrage;
U_0 sa vitesse moyenne au même point;
h et U les quantités analogues pour une section prise un peu en aval;
c la hauteur de la crête du barrage au-dessus du fond du lit;
v la vitesse de la lame fluide au-dessus de cette crête;
η l'épaisseur de la même lame fluide.

La contraction latérale n'existant pas, si le barrage fonctionne comme déversoir en mince paroi, la dépense Q sera donnée (n° 29) par la formule

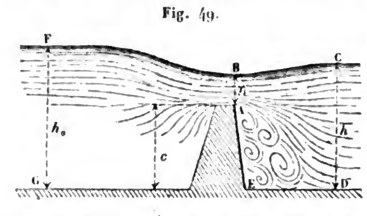
$$Q = 0,45\,L\left(h_0 - c + \frac{U_0^2}{2g}\right)\sqrt{2g\left(h_0 - c + \frac{U_0^2}{2g}\right)}.$$

Le coefficient 0,45 devrait subir une certaine réduction et descendre à 0,385, ou peut-être à un nombre plus faible, comme 0,36 ou 0,37, si la crête, au lieu d'être en mince paroi, avait une longueur notable, avec une légère inclinaison. La formule subsiste tant que le déversoir débouche librement dans l'air, ce qui exige seulement que l'eau d'aval soit à un niveau inférieur à celui de la crête. Quand l'eau d'aval dépasse la crête, mais seulement d'une quantité moindre que η, il semble évident que la formule ne doit pas être modifiée; tout au plus il arrive que les filets perdant leur forme parabolique et devenant parallèles en dessus du déversoir, comme dans le cas où celui-ci a une épaisseur notable, il faudrait réduire le coefficient numé-

rique, ainsi que nous venons de le dire ; ce qui relèverait faiblement le niveau d'amont, à égalité de dépense. En examinant la chose de plus près, on voit même que le niveau d'aval peut s'élever encore plus haut sans que la dépense ait à subir d'altération sensible.

Appliquons, en effet, le théorème général des quantités de mouvement projetées, au liquide compris entre le plan vertical AB (*fig.* 49) qui passe par le seuil du barrage, et la section CD où la vitesse est U. Par des considérations semblables à celles dont on a fait usage à l'occasion du ressaut, on reconnaîtra d'abord que l'augmentation algébrique de la quantité de mouvement du système en projection sur l'horizontale, pendant un temps très-court θ, est $\frac{\Pi Q \theta}{g}(U - v)$, en admettant que toutes les molécules d'une même section possèdent une même vitesse. Quant aux impulsions, il faut tenir compte seulement de celle produite par la pression sur les surfaces BAE et CD, abstraction faite de la pression atmosphérique qui enveloppe tout le système. Les pressions de ces surfaces doivent suivre à peu près la loi hydrostatique, d'abord parce que les filets sont sensiblement parallèles en traversant AB et CD, et que le liquide en contact avec AE n'a qu'un mouvement assez lent ; dès lors l'impulsion projetée a pour valeur $\frac{1}{2}\Pi\theta L[(c+n)^2 - h^2]$.

Fig. 49.



On a donc

$$\frac{\Pi Q \theta}{g}(U - v) = \frac{1}{2}\Pi\theta L[(c+n)^2 - h^2],$$

soit plus simplement

$$\frac{2Q}{Lg}(U - v) = (c+n)^2 - h^2.$$

On a en outre

$$\frac{Q}{L} = vn = Uh;$$

par suite, en éliminant Q et U, la relation précédente devient

$$\frac{2v^2}{g}\eta\left(\frac{\eta}{h}-1\right)=(c+\eta)^2-h^2,$$

équation du troisième degré en h, d'où l'on tirerait cette quantité si l'on connaissait v et η. Pour calculer ces inconnues auxiliaires, nous admettrons que, conformément à ce qu'on a vu dans la théorie du déversoir (n° 29), l'abaissement superficiel en amont $h_0-\eta-c$ est lié à la charge totale sur le seuil par l'équation

$$3\left(h_0-\eta-c+\frac{U_0^2}{2g}\right)=h_0-c+\frac{U_0^2}{2g};$$

nous en tirons

$$3\eta=2\left(h_0-c+\frac{U_0^2}{2g}\right),$$

relation qui, combinée avec

$$Q=0,37\,L\left(h_0-c+\frac{U_0^2}{2g}\right)\sqrt{2g\left(h_0-c+\frac{U_0^2}{2g}\right)},$$

donnerait, pour déterminer η,

$$Q=0,37\,L.\frac{3}{2}\eta\sqrt{2g.\frac{3}{2}\eta}=0,68\,L\eta\sqrt{2g\eta}.$$

Ayant η, on calculerait $v=\frac{Q}{L\eta}$, et l'on aurait ainsi les éléments nécessaires pour obtenir la valeur numérique de h.

Voici un exemple. Soient $\frac{Q}{L}=1^{\text{mc}},20$, $c=2^{\text{m}}$; nous aurons d'abord

$$1,20=0,68\,\eta\sqrt{2g\eta},\qquad \text{d'où}\qquad \eta=0^{\text{m}},54;$$

puis

$$v=\frac{1,20}{0,54}=2^{\text{m}},222,\qquad \text{et}\qquad \frac{v^2}{2g}=0^{\text{m}},2515.$$

Par suite, l'équation en h devient

$$1,006.0,54\left(\frac{0,54}{h}-1\right)=(2,54)^2-h^2,$$

ou bien

$$h^3-6,995\,h+0,293=0.$$

Il y a une racine positive comprise entre o et 1 ; mais elle ne convient pas à la question, puisque nous cherchons le relèvement du bief d'aval au-dessus du déversoir, et que par conséquent h doit être supérieur à 2. Le tâtonnement donne une autre racine égale à $2^m,623$ environ : c'est la limite demandée de la profondeur en aval, au delà de laquelle l'eau ne pourra s'élever sans entraîner une élévation correspondante en amont.

Maintenant, si la profondeur en aval dépasse cette limite, quelle sera la profondeur en amont? Afin de répondre à cette question, désignons par η', v', h'_0, U'_0, h' ce que deviennent respectivement η, v, h_0, U_0, h, la dépense Q restant toujours la même : nous aurons les équations

$$\frac{2\eta' v'^2}{g}\left(\frac{\eta'}{h'} - 1\right) = (c + \eta')^2 - h'^2,$$

$$\frac{v'^2}{2g} - \frac{U'^2_0}{2g} = h'_0 - c - \eta',$$

$$\frac{Q}{L} = \eta' v' = h'_0 U'_0,$$

dont la première et les deux dernières sont connues; la seconde est une application immédiate du théorème de Bernoulli au parcours d'une molécule depuis la section FG, où la vitesse est U'_0, jusqu'à la section AB. Ces quatre équations serviront à déterminer les inconnues η', v', h'_0, U'_0, lorsque Q et h' seront donnés. L'épaisseur η' de la lame d'eau AB n'est pas calculable par la même relation que η, parce que le barrage ne fonctionne plus comme déversoir.

Pour continuer l'application numérique ci-dessus commencée, faisons

$$\frac{Q}{L} = 1^{mc},2, \quad c = 2^m \quad \text{et} \quad h' = 3^m.$$

Nous pouvons faire dans la première équation $v' = \frac{Q}{L\eta'} = \frac{1,2}{\eta'}$, et nous aurons

$$\frac{2(1,2)^2}{g\eta'}\left(\frac{\eta'}{3} - 1\right) = (2 + \eta')^2 - 3^2,$$

ou bien, en faisant disparaître les dénominateurs et ordonnant,

$$\eta'^3 + 4\eta'^2 - 5,098\eta' + 0,2936 = 0;$$

cette équation nous donne

$$\eta' = 0^m,966 \text{ environ.}$$

Par suite, $v' = \frac{1,2}{0,966} = 1^m,242$ et $\frac{v'^2}{2g} = 0,0786$; substituant dans la seconde équation et faisant $U'_0 = \frac{1,2}{h'_0}$, on trouvera

$$0,0786 - \frac{(1,2)^2}{2g\,h_0'^2} = h'_0 - 2 - 0,966;$$

on tire de là

$$h'_0 + \frac{0,0734}{h_0'^2} = 3^m,045,$$

ce qui donne h'_0 sensiblement égal à $3^m,037$. Il y aurait donc de l'amont à l'aval une chute de $3^m,037 - 3^m$, soit de $0^m,037$ environ.

Tous ces calculs sont susceptibles de simplifications assez grandes quand on veut se contenter d'un degré d'approximation ordinairement très-acceptable en pratique. Supposons d'abord le barrage fonctionnant comme déversoir et proposons-nous de chercher la hauteur limite h, en aval, compatible avec l'existence du déversoir. Soit $x = h - c - \eta$ la contre-pente superficielle entre les sections AB et CD : l'équation fournie par le théorème des quantités de mouvement pourra s'écrire

$$(1) \qquad \frac{2\eta v^2}{g}\left(\frac{h-\eta}{h}\right) = (h+c+\eta)(h-c-\eta),$$

ou bien

$$(2) \qquad x = \frac{2v^2}{g} \cdot \frac{\eta(h-\eta)}{h(h+c+\eta)} = \frac{2v^2}{g} \cdot \frac{\eta(c+x)}{(c+\eta+x)(2c+2\eta+x)},$$

relation du troisième degré en x, qui détermine cette inconnue (et par suite h) quand η et c sont donnés. Or si l'on considère la fonction de x

$$y = \frac{c+x}{(c+\eta+x)(2c+2\eta+x)},$$

en faisant varier $x+c$ de 0 à ∞, on voit y croître d'abord jusqu'à un maximum répondant à $x+c = \sqrt{\eta(c+2\eta)}$, puis décroître jusqu'à zéro; le maximum dont il s'agit a pour valeur $\frac{1}{(\sqrt{\eta}+\sqrt{c+2\eta})^2}$. Comme dans la question actuelle $x+c$ ne peut être que positif, on a donc nécessairement

$$\frac{c+x}{(c+\eta+x)(2c+2\eta+x)} < \frac{1}{(\sqrt{\eta}+\sqrt{c+2\eta})^2};$$

par conséquent, d'après l'équation (2),

$$x < \frac{2v^2}{g} \cdot \frac{\eta}{(\sqrt{\eta}+\sqrt{c+2\eta})^2}.$$

ou encore

(3) $$x < \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{4}{\left(1 + \sqrt{2 + \frac{c}{\eta}}\right)^2}.$$

Si la hauteur c du barrage pouvait s'annuler devant η, on tirerait de là

$$x < \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{4}{(1+\sqrt{2})^2} \quad \text{ou} \quad x < 0,906 \frac{v^2}{2g}.$$

Mais en réalité, pour qu'il y ait déversoir, c ne peut guère descendre au-dessous de trois ou quatre fois η; faisant $\frac{c}{\eta} = 3$ dans l'inégalité (3), elle devient

$$x < \frac{4}{(1+\sqrt{5})^2} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

soit

$$x < 0,38 \frac{v^2}{2g}.$$

D'un autre côté, on a

$$Q = 0,68 \, L\eta \sqrt{2g\eta},$$

et par suite

$$v = \frac{Q}{L\eta} = 0,68 \sqrt{2g\eta},$$

$$\frac{v^2}{2g} = (0,68)^2 \eta = 0,46 \eta;$$

donc nous posons enfin

$$x < 0,38 . 0,46 \eta,$$

c'est-à-dire

$$x < 0,175 \eta.$$

Le but de cette discussion préliminaire est de montrer que si la profondeur en aval est suffisante pour permettre la formation d'une contre-pente superficielle, sans cependant dépasser la limite cherchée h, la hauteur x de la contre-pente sera une faible fraction de η. On peut donc, sans grande erreur, supprimer x dans le second membre de l'équation (2) devant c, $c + \eta$, $2c + 2\eta$, d'autant plus qu'on aura diminué simultanément les deux termes de la fraction y, et que les erreurs se compenseront en partie; ainsi nous aurons approximativement

(4) $$x = \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{2\eta c}{(c+\eta)^2} = 0,92 c \frac{\eta^2}{(c+\eta)^2},$$

ou encore

(5) $$h = c + \eta + 0,92 c \frac{\eta^2}{(c+\eta)^2}.$$

Dans la seconde partie de la question, il s'agissait, étant données Q et h', de calculer η' et h'_0. L'équation des quantités de mouvement et des impulsions subsistant toujours, un calcul pareil à celui qu'on vient de faire donnerait encore l'inégalité

$$x' < \frac{v'^2}{2g} \cdot \frac{4}{\left(1 + \sqrt{2 + \frac{c}{\eta'}}\right)^2},$$

dans laquelle x' désigne la nouvelle contre-pente superficielle en aval du barrage. On a en outre

$$v' = \frac{Q}{L\eta'},$$

et conséquemment

$$x' < \frac{Q^2}{2gL^2\eta'^2} \cdot \frac{4}{\left(1 + \sqrt{2 + \frac{c}{\eta'}}\right)^2}.$$

Le second membre est une fonction décroissante de η' : donc, lorsqu'en faisant croître la profondeur en CD depuis h jusqu'à h', on aura forcé l'épaisseur de la lame sur le barrage à prendre la valeur η', plus grande que l'épaisseur primitive η, la limite supérieure de la contre-pente aura diminué; et puisque le rapport $\frac{x}{\eta}$ ne pouvait être déjà qu'une faible fraction, à plus forte raison la même chose doit se dire du rapport $\frac{x'}{\eta'}$. On posera donc d'abord, en raisonnant comme tout à l'heure

$$x' = h' - c - \eta' = \frac{v'^2}{2g} \cdot \frac{2\eta' c}{(c + \eta')^2} = \frac{Q^2}{2gL^2} \cdot \frac{2c}{\eta'(c + \eta')^2};$$

d'où résulte

$$\eta' = h' - c - \frac{Q^2}{2gL^2} \frac{2c}{\eta'(c + \eta')^2}.$$

Or on a reconnu que $\frac{x'}{\eta'}$ ou $\frac{h' - c}{\eta'} - 1$ est une petite quantité : on pourra donc, dans le second membre de cette dernière égalité, faire approximativement $\eta' = h' - c$, et l'on aura

$$(6) \qquad \eta' = h' - c - \frac{Q^2 c}{gL^2 h'^2 (h' - c)},$$

ou, en nommant U' la vitesse $\frac{Q}{Lh'}$ dans la section CD,

$$(7) \qquad \eta' = h' - c - \frac{U'^2}{2g} \cdot \frac{2c}{h' - c}.$$

Il ne reste plus à trouver que h'_0 : pour cela, on prendra l'équation

$$h'_0 = c + z' + \frac{v'^2}{2g} - \frac{U'^2_0}{2g},$$

on y fera

$$v' = \frac{Q}{Lz'} = \frac{U'h'}{z'} = \frac{U'h'}{h'-c}, \quad c + z' = h' - \frac{U'^2}{2g}\cdot\frac{2c}{h'-c},$$

et l'on trouvera

$$h'_0 = h' + \frac{U'^2}{2g}\cdot\frac{(h'-c)^2 + c^2}{(h'-c)^2} - \frac{U'^2_0}{2g}.$$

On voit d'après cela que si les vitesses U_0 et U'_0 sont modérées, h'_0 différera peu de h', et par conséquent on peut, dans le second membre de l'équation précédente, remplacer U'_0 par U', ce qui donnera définitivement

(8) $$h'_0 = h' + \frac{U'^2}{2g}\,\frac{c^2}{(h'-c)^2}.$$

La vitesse U' n'étant autre chose que $\frac{Q}{Lh'}$, on tirerait encore de l'équation (8),

(9) $$Q' = Lh'\left(\frac{h'}{c} - 1\right)\sqrt{2g(h'_0 - h')},$$

formule qui ferait connaître la dépense d'un barrage noyé, pour une hauteur suffisante de l'eau d'aval au-dessus du seuil; mais il faut reconnaître que la petite erreur commise dans l'évaluation de h'_0 peut devenir importante relativement à $h'_0 - h'$, et que par suite on ne doit pas compter beaucoup sur la parfaite exactitude de la formule en question.

Les équations (5), (7) et (8) donnent une solution fort simple du problème. Afin de voir jusqu'à quel point elles concordent avec celles que nous avons d'abord employées, reprenons le même exemple numérique. Le barrage fonctionnant comme déversoir, on avait

$$\frac{Q}{L} = 1^{mc},20, \quad z = 0^m,54, \quad c = 2^m;$$

on tire alors de l'équation (5)

$$h = 2,54 + 0,92.2\left(\frac{0,54}{2,54}\right)^2 = 2^m,623.$$

Si l'on fait ensuite $h' = 3^m$, il en résulte

$$U' = \frac{1,20}{3} = 0^m,40, \quad \frac{U'^2}{2g} = 0^m,00816,$$

et en vertu de l'équation (7),

$$z' = 3 - 2 - 0,00816.4 = 0^m,967.$$

enfin l'équation (8) donne

$$h'_0 = 3 + 0,00816.4 = 3^m,033.$$

Tous ces résultats sont presque identiques avec ceux du premier calcul; cependant l'erreur relative sur $h'_0 - h'$ atteindrait environ $\frac{1}{9}$.

L'influence d'un barrage noyé s'efface de plus en plus, c'est-à-dire que la chute $h'_0 - h'$ devient de plus en plus petite, à mesure que le niveau monte en aval. Cela se comprend à priori, sans calcul; car si le barrage est recouvert par une nappe beaucoup plus haute que lui, il n'occupe plus qu'une petite fraction de la section transversale, et devient en quelque sorte assimilable à une ondulation légère du fond.

89. *Gonflement produit par le passage d'une rivière sous un pont.* — Nous supposerons ici un cours d'eau qu'on oblige à passer dans un étranglement brusque de peu de longueur, comme celui qui est produit par les piles et culées d'un pont. La diminution de section n'a lieu d'ailleurs que dans le sens horizontal, et le profil transversal du lit conserve ses lignes primitives dans la partie non occupée par les obstacles. Étant donnés la dépense par seconde, la définition complète de la forme du lit aux environs du rétrécissement et le niveau de l'eau en aval, il s'agit de déterminer le niveau d'amont.

Cette question, aussi bien que la précédente, est extrêmement difficile à résoudre d'une manière satisfaisante. Il n'est guère possible d'analyser à fond le phénomène, à cause de sa complication : la loi suivant laquelle se contractent et s'épanouissent les filets fluides, l'influence de leur frottement mutuel et des mouvements tumultueux, sont des choses très-imparfaitement connues et qui jouent ici le principal rôle. On n'est pas même complétement d'accord sur la manière dont les faits se passent : quelques personnes pensent que la diminution de vitesse au delà du rétrécissement doit correspondre à une élévation du niveau, ce qui aurait lieu en effet, d'après le théorème de Bernoulli, s'il n'y avait aucune perte de charge; suivant d'autres, au contraire, ces pertes de charge sont telles, que la diminution de vitesse n'occasionne pas de relèvement. Au reste les observations sur ce sujet sont difficiles à faire;

car, dans les circonstances où cette contre-pente pourrait être notable, la grande vitesse de l'eau donne lieu à des ondulations de niveau et à une agitation qui rend les mesures presque impossibles.

Nous sommes donc forcé de nous contenter d'aperçus théoriques plus ou moins incomplets. D'abord nous admettrons que la contre-pente dont on vient de parler est sensiblement nulle; alors, comme c'est un fait d'expérience que le niveau d'aval n'est pas modifié par l'exécution de l'ouvrage qui produit le rétrécissement, nous connaîtrons ainsi le niveau et la profondeur de l'eau dans le passage rétréci. En outre, nous considérerons pour plus de simplicité le lit comme étant rectangulaire et à fond horizontal, aux environs du passage dont nous nous occupons. Cela posé, soient

Q le débit du courant;
y la chute superficielle, entre une section (A) prise un peu vers l'amont, et la section (B) prise dans le rétrécissement, à l'endroit où la contraction des filets atteint son maximum;
μ le coefficient de cette contraction;
L largeur du lit avant le rétrécissement;
l la portion de cette largeur laissée libre par les obstacles, dans le passage rétréci;
h la profondeur connue de l'eau dans ce passage.

L'aire de la section (A) aura pour valeur $L(h+y)$, attendu que $h+y$ exprime la profondeur de l'eau, du côté d'amont; la vitesse est donc $\frac{Q}{L(h+y)}$. De même en (B) l'aire de la section s'exprime par μlh, valeur à laquelle répond la vitesse $\frac{Q}{\mu lh}$. Maintenant on peut appliquer le théorème de Bernoulli dans l'intervalle des sections (A) et (B), en négligeant le frottement du lit, vu le peu de distance de l'une à l'autre : on aura de cette manière

$$\frac{Q^2}{2g}\left[\frac{1}{\mu^2 l^2 h^2}-\frac{1}{L^2(h+y)^2}\right]=y.$$

équation du troisième degré en y, d'où l'on tirera cette inconnue par tâtonnement. On commencera par supposer $y = 0$ dans le premier membre, et alors on en calculera la valeur, qui sera une première approximation pour celle de y; cette valeur, substituée à son tour dans le premier membre de l'équation, donnera l'inconnue plus exactement; et ainsi de suite, jusqu'à ce que deux substitutions successives donnent des résultats peu différents.

D'après Eytelwein, pour appliquer cette formule au passage de l'eau sous un pont, il faudrait prendre $\mu = 0,85$ quand les piles présentent carrément leur face antérieure au courant, et $\mu = 0,95$ quand elles ont des avant-becs aigus. Dans le cas ordinaire, où les avant-becs ont la forme d'un demi-cercle, on pourrait supposer $\mu = 0,90$. Mais il est vraisemblable que ce coefficient ne dépend pas uniquement de la forme des piles et qu'il varie un peu avec le rapport $\frac{l}{L}$, car si ce rapport atteignait l'unité, toute contraction disparaîtrait, de manière qu'on aurait alors $\mu = 1$.

CHAPITRE CINQUIÈME.

DU MOUVEMENT DES GAZ.

§ I. — Écoulement d'un gaz par un orifice ou dans un tuyau.

90. *Modification du théorème de Bernoulli pour un gaz pesant à température constante.* — Nous avons démontré au n° 11 l'équation générale suivante, applicable aux gaz en mouvement permanent dans lesquels on suppose une température constante :

$$T - \frac{1}{K} \log \text{hyp}\, p - \frac{1}{2} V^2 = \text{const.};$$

T désigne une fonction des coordonnées rectangulaires x, y, z, dont les trois dérivées partielles $\frac{dT}{dx}, \frac{dT}{dy}, \frac{dT}{dz}$ donnent, en chaque point, les composantes X, Y, Z parallèles aux axes coordonnés, de la force rapportée à l'unité de masse qui agit en ce point sur les molécules gazeuses, non compris les pressions des molécules environnantes; p et V désignent la pression et la vitesse, K une constante qui multipliée par la pression donne la densité. On se rappellera enfin que le premier membre est constant pour tous les points du gaz qui sont situés sur la trajectoire d'une même molécule.

Dans le cas où la pesanteur est la seule attraction extérieure qui agisse sur la masse gazeuse, et où l'on néglige les frottements, si l'on prend pour plan des xy un plan horizontal, et que l'axe des z soit vertical et descendant, alors on posera $T = gz$, puisque la force rapportée à l'unité de masse est constamment égale à g et parallèle à l'axe des z. Donc on aura dans ce cas.

$$z - \frac{1}{gK} \log \text{hyp}\, p - \frac{V^2}{2g} = \text{const.}$$

Il faut maintenant exprimer K en fonction des quantités qui

servent ordinairement à distinguer un gaz d'un autre, au point de vue de la Mécanique.

Nommons à cet effet

Π_m le poids d'un mètre cube de mercure à la température zéro;

Π_a le poids d'un mètre cube d'air atmosphérique à la température zéro, et sous une pression exprimée par $0,76\,\Pi_m$, égale à la pression moyenne de l'atmosphère;

Π le poids du mètre cube du gaz considéré, sous la pression et à la température qui viennent d'être définies (*);

δ le rapport $\frac{\Pi}{\Pi_a}$;

α le coefficient de dilatation des gaz, égal, d'après M. Regnault, au nombre 0,00366, soit à $\frac{1}{273}$ environ;

θ une température exprimée en degrés centigrades.

Le poids d'un mètre cube de gaz, à la température zéro et sous la pression $0,76\,\Pi_m$, étant $\delta\Pi_a$, deviendra, sous la pression p et à la même température, $\delta\,\Pi_a \cdot \frac{p}{0,76\,\Pi_m}$, en vertu de la loi de Mariotte; et si en même temps la température passe de zéro à θ degrés, le volume primitif de 1 mètre cube devenant $1+\alpha\theta$, le poids du mètre cube, à θ degrés et sous la pression p, sera

$$\delta\,\Pi_a \cdot \frac{p}{0,76\,\Pi_m} \cdot \frac{1}{1+\alpha\theta}.$$

Ce résultat devrait être divisé par g pour avoir la masse de l'unité de volume, c'est-à-dire la densité ρ : ainsi

$$g\rho = \delta\,\Pi_a \cdot \frac{p}{0,76\,\Pi_m} \cdot \frac{1}{1+\alpha\theta},$$

et attendu que K désigne le rapport $\frac{\rho}{p}$,

$$g\mathrm{K} = \frac{\delta}{0,76} \cdot \frac{\Pi_a}{\Pi_m} \cdot \frac{1}{1+\alpha\theta}.$$

(*) A la rigueur, les trois quantités Π_m, Π_a et Π ne sont pas des constantes; elles doivent varier un peu avec la latitude et la hauteur du lieu où l'on se trouve. Mais dans les questions usuelles, on peut, sans aucun inconvénient, faire abstraction de ces différences, qui sont très-faibles.

Le rapport $\frac{\Pi_a}{\Pi_m}$ a été trouvé par M. Regnault égal à $\frac{1}{10517}$ pour Paris, et à la hauteur du Collége de France. Par suite nous prendrons

$$gK = \frac{\delta}{0,76 \cdot 10517} \cdot \frac{1}{1+\alpha\theta} = \frac{1}{7993} \frac{\delta}{1+\alpha\theta},$$

ou en nombres ronds

$$gK = \frac{1}{8000} \frac{\delta}{1+\alpha\theta}.$$

L'équation posée tout à l'heure devient, par la substitution de cette valeur,

$$(1) \qquad z - \frac{V^2}{2g} - 8000 \frac{1+\alpha\theta}{\delta} \log \text{hyp}\, p = \text{const.};$$

si l'on remplace les logarithmes hyperboliques par les logarithmes ordinaires, il faut multiplier ces derniers par 2,3026 environ, et l'on trouve

$$(1\ bis) \qquad z - \frac{V^2}{2g} - 18400 \frac{1+\alpha\theta}{\delta} \log p = \text{const.}$$

Les équations (1) et (1 *bis*) sont pour les gaz pesants à température constante ce qu'est le théorème de Bernoulli pour les liquides pesants et homogènes.

91. *Écoulement permanent d'un gaz par un orifice percé dans un réservoir.* — Supposons un réservoir rempli d'un gaz dont la température est partout la même; ce gaz s'écoule par un orifice de petites dimensions, et il s'agit de calculer la vitesse d'écoulement ainsi que le volume dépensé par seconde. Nous appellerons

p la pression d'une molécule à l'instant où elle traverse une section faite dans la veine fluide qui s'écoule, un peu après l'orifice, en un point où les filets ont éprouvé la plus grande contraction et sont devenus parallèles;

p_0 la pression dans le réservoir, en un point situé sur la trajectoire de la même molécule, à une assez grande distance de l'orifice;

z et z_0 les hauteurs de ces deux points au-dessous d'un plan horizontal de comparaison;

V et V_0 les vitesses correspondantes;

α, θ et δ les mêmes quantités qu'au numéro précédent.

L'équation (1) donnera immédiatement

$$z - \frac{V^2}{2g} - 8000\,\frac{1+\alpha\theta}{\delta}\log\text{hyp}\,p = \text{const.},$$

$$z_0 - \frac{V_0^2}{2g} - 8000\,\frac{1+\alpha\theta}{\delta}\log\text{hyp}\,p_0 = \text{const.},$$

et par suite

$$z - z_0 - \frac{V^2 - V_0^2}{2g} + 8000\,\frac{1+\alpha\theta}{\delta}\log\text{hyp}\,\frac{p_0}{p} = 0.$$

Le réservoir étant supposé assez grand et les molécules se rendant vers l'orifice dans toutes les directions, V_0 est petit relativement à V; on peut donc négliger $\frac{V_0^2}{2g}$ et poser

$$\frac{V^2}{2g} = z - z_0 + 8000\,\frac{1+\alpha\theta}{\delta}\log\text{hyp}\,\frac{p_0}{p}.$$

Habituellement aussi on néglige la hauteur $z - z_0$, à moins qu'elle ne soit très-grande; il est alors assez indifférent de mesurer la pression p_0 en tel ou tel point du réservoir, pourvu que ce ne soit pas près de l'orifice, parce que ses variations sont insensibles. Pour donner à ce raisonnement plus de précision, soient z' la hauteur d'une molécule du réservoir au-dessous du plan horizontal de comparaison, p' la pression et ρ' la densité correspondantes. Comme il n'y a pas de mouvement sensible dans le réservoir à une distance notable de l'orifice, la pression y varie à peu près suivant la loi hydrostatique (n° 18), on aura donc (n° 6)

$$dp' = \rho' g dz'.$$

Or, comme on l'a vu au n° 90, on peut remplacer $\rho' g$ par $\delta\,\frac{\Pi_a p'}{0,76\,\Pi_m}\cdot\frac{1}{1+\alpha\theta}$ ou par $\frac{\delta}{8000(1+\alpha\theta)}p'$; par suite, l'équation précédente devient

$$dz' = 8000\,\frac{1+\alpha\theta}{\delta}\cdot\frac{dp'}{p'},$$

ou, en intégrant depuis le point où la pression est p_0, jusqu'à un autre placé au niveau de l'orifice et où la pression serait P,

$$z - z_0 = 8000 \frac{1 + \alpha\theta}{\delta} \log \text{hyp} \frac{P}{p_0}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'expression (1) de $\frac{V^2}{2g}$, on trouvera

$$(2) \qquad \frac{V^2}{2g} = 8000 \frac{1 + \alpha\theta}{\delta} \log \text{hyp} \frac{P}{p},$$

formule qui fait connaître la vitesse d'écoulement, en fonction de la pression p subie par la veine contractée, et de la pression P mesurée dans le réservoir, à une distance notable de l'orifice et à la hauteur de celui-ci, ou à une hauteur quelconque si le réservoir n'est pas très-grand dans le sens vertical. L'emploi de l'équation (1 *bis*) aurait donné une formule analogue, avec le coefficient 18400 au lieu de 8000, et les logarithmes ordinaires au lieu des logarithmes hyperboliques.

La pression p est ordinairement confondue avec celle de l'atmosphère dans laquelle débouche la veine. Cela semble exiger que la vitesse soit modérée, et, par suite, que le rapport $\frac{P}{p}$ ne soit pas très-éloigné de 1. Car si la vitesse était considérable, les filets s'épanouissant rapidement après la contraction, les forces d'inertie centrifuges auraient des valeurs assez grandes pour les molécules qui traversent la section contractée. Il en résulterait des augmentations notables de pression dans cette section (n° 16), en allant de la circonférence au centre, et la formule conduirait, pour les filets intérieurs, à une vitesse trop forte.

Le rapport $\frac{P}{p}$ étant très-peu supérieur à l'unité, on peut aisément remplacer la formule (2) par une autre où n'entrent pas les logarithmes. On a, en effet, x désignant une pression variable entre p et P,

$$\log \text{hyp} \frac{P}{p} = \int_p^P \frac{dx}{x};$$

or, puisque les limites de la variable x sont très-voisines l'une

de l'autre, on peut approximativement remplacer sous le signe $\int$, x par la moyenne de ses valeurs extrêmes $\frac{1}{2}(P+p)$, ce qui donnera

$$\log \text{hyp} \frac{P}{p} = \int_p^P \frac{2\,dx}{P+p} = \frac{2(P-p)}{P+p}.$$

Le tableau ci-dessous permet d'apprécier l'exactitude de cette substitution :

Valeurs de $\frac{P}{p}$	1,00,	1,05,	1,10,	2,00.
Rapport de log hyp $\frac{P}{p}$ à sa valeur approchée.	1,0000,	1,0002,	1,0008,	1,0391.

Il n'y a donc pas d'erreur sensible à craindre dans les applications de la formule (2), quand on remplace le logarithme par sa valeur approximative, car si $\frac{P}{p}$ allait jusqu'à 2, il faudrait renoncer à calculer théoriquement la vitesse. Ainsi, l'on aura

$$(3) \qquad \frac{V^2}{2g} = 16000\,\frac{1+\alpha\theta}{\delta}\,\frac{P-p}{P+p}.$$

C'est la formule à laquelle on serait parvenu en considérant le gaz comme un fluide homogène, ce qui est permis, puisque sa pression et sa densité varient peu. En effet, le poids ρg du mètre cube de gaz sous la pression $\frac{1}{2}(P+p)$ a pour valeur (n° 90)

$$\rho g = \frac{1}{8000}\,\frac{\delta}{1+\alpha\theta}\cdot\frac{1}{2}(P+p);$$

la formule précédente s'écrirait donc

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{P-p}{\rho g},$$

et l'on voit qu'elle est tout à fait analogue à celle qui donne la vitesse d'écoulement d'un liquide par un orifice en mince paroi, car $\frac{P}{\rho g}$ et $\frac{p}{\rho g}$ sont les hauteurs représentatives (en colonnes

gazeuses) des pressions P et p, prises en des points situés au même niveau, de sorte que $\frac{P-p}{\rho g}$ est la charge mesurée entre l'intérieur du réservoir et la section contractée.

Quand on a calculé $\frac{V^2}{2g}$ au moyen de l'une des formules établies ci-dessus, on obtient facilement V, soit par un calcul numérique, soit par la table I, faisant connaître une vitesse en fonction de la hauteur qui lui est due, ou inversement. Cependant si l'on voulait calculer V directement, sans passer par l'intermédiaire $\frac{V^2}{2g}$, on poserait l'une des égalités

$$V = \sqrt{16000 g \frac{1+\alpha\theta}{\delta} \log \text{hyp} \frac{P}{p}},$$

$$V = \sqrt{36800 g \frac{1+\alpha\theta}{\delta} \log \frac{P}{p}},$$

$$V = \sqrt{32000 g \frac{1+\alpha\theta}{\delta} \frac{P-p}{P+p}};$$

puis remplaçant g par sa valeur $9^m,8088$ et faisant sortir le facteur numérique du radical, on aurait

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} V &= 396\sqrt{\frac{1+\alpha\theta}{\delta} \log \text{hyp} \frac{P}{p}}, \\ V &= 600\sqrt{\frac{1+\alpha\theta}{\delta} \log \frac{P}{p}}, \\ V &= 560\sqrt{\frac{1+\alpha\theta}{\delta} \frac{P-p}{P+p}}. \end{aligned} \right.$$

92. *Calcul de la dépense par un orifice en mince paroi.* — Si nous supposons qu'on ait un orifice en mince paroi, les filets fluides, après leur sortie, éprouveront d'abord une contraction, suite de la convergence qu'ils ont à l'intérieur du réservoir pour affluer de toute part vers le point de sortie, puis ils deviendront sensiblement parallèles en traversant une section minimum, dite section contractée, laquelle se trouve à une faible distance de l'orifice. Soient

Ω l'aire de la section contractée, A celle de l'orifice;

V la vitesse d'écoulement;

Q la dépense;

il est clair d'abord que le volume gazeux qui traverse la section contractée dans un temps très-court dt est $\Omega V dt$, ce qui fait par unité de temps une dépense ΩV; l'expérience prouve d'ailleurs, suivant d'Aubuisson, que Ω est égal à $0,65\,A$; on aurait donc

$$(5) \qquad Q = 0,65\,AV,$$

résultat qui ressemble beaucoup à ce qu'on a vu pour les liquides (n° 24); la différence consiste seulement en ce que le coefficient de dépense a été porté de 0,62 à 0,65.

Il faut observer que le volume Q est celui que remplirait le gaz écoulé dans chaque seconde, s'il conservait la température θ du réservoir et la pression extérieure p. Dans le cas où l'on voudrait le volume Q' occupé par le même gaz à une autre pression p' et à une autre température θ', on aurait immédiatement, d'après les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, α étant le coefficient de dilatation des gaz,

$$Q' = Q\,\frac{1+\alpha\theta'}{1+\alpha\theta}\,\frac{p}{p'},$$

ou, en remplaçant Q par sa valeur (5),

$$(6) \qquad Q' = 0,65\,AV\,\frac{1+\alpha\theta'}{1+\alpha\theta}\,\frac{p}{p'}.$$

Si l'on demandait enfin, non pas le volume, mais le poids dépensé par seconde, il faudrait multiplier Q par le poids II du mètre cube de gaz à la pression p et à la température θ, soit (n° 90) par $\frac{1}{8000}\,\frac{p\delta}{1+\alpha\theta}$; le poids demandé serait donc

$$0,65\,AV.\frac{1}{8000}\,\frac{p\delta}{1+\alpha\theta},$$

ou, après avoir remplacé V par sa valeur tirée de l'équation (2) du n° 91,

$$(7) \qquad 0,65\,Ap\sqrt{2g\,\frac{\delta}{8000\,(1+\alpha\theta)}\,\log\text{hyp}\,\frac{P}{p}}.$$

Dans le cas où P, θ, A et δ seraient supposés invariables, cette expres-

sion varierait encore avec p, et il est naturel de chercher la valeur particulière de p qui la rendrait maximum. A cet effet, on cherchera le maximum du facteur variable $p\sqrt{\log\text{hyp}\frac{P}{p}}$, ou plutôt de son carré $p^2\log\text{hyp}\frac{P}{p}$; on obtiendra la valeur correspondante de p par l'équation

$$\frac{d}{dp}\left(p^2\log\text{hyp}\frac{P}{p}\right) = 0;$$

qui donne

$$\log\text{hyp}\frac{P}{p} = \frac{1}{2},$$

ou bien

$$\frac{P}{p} = e^{\frac{1}{2}} = 1,649,$$

e désignant la base des logarithmes hyperboliques.

Nous avons dit plus haut que les calculs faits pour obtenir la valeur de la vitesse supposent $\frac{P}{p}$ peu différent de 1; il est donc très-douteux que l'expression (7) reste encore passablement exacte pour $\frac{P}{p} = 1,649$. Comme la formule (2) exagère probablement la vitesse V (n° 91), le maximum théorique du poids dépensé doit être regardé comme une limite supérieure en dessous de laquelle les résultats de l'expérience resteraient toujours. Cette limite se met sous la forme

$$0,65\,A\frac{P}{1,649}\sqrt{g\frac{\delta}{8000(1+\alpha\theta)}},$$

ou bien, en effectuant le calcul des coefficients numériques,

$$0,0138\,AP\sqrt{\frac{\delta}{1+\alpha\theta}}.$$

93. *Effet d'un ajutage cylindrique ou légèrement conique.* — Lorsque l'orifice de sortie du gaz est suivi d'un ajutage cylindrique, il convient, d'après d'Aubuisson, de calculer la dépense en employant les mêmes formules qu'au n° 92, sauf le remplacement du coefficient 0,65 par 0,93. Si l'ajutage est légèrement conique, l'angle de convergence ne dépassant pas 12 degrés, le coefficient augmente encore un peu et passe à 0,94.

94. *Mouvement permanent d'un gaz dans une conduite cylindrique.* — Nous étudierons seulement ici le cas d'une con-

duite cylindrique à diamètre constant, n'alimentant aucun orifice entre les sections extrêmes de la partie dont on s'occupe. Soient A_0B_0, A_1B_1 (*fig.* 50) ces sections, et AB, A′B′ deux sections intermédiaires quelconques, infiniment voisines l'une de l'autre. Appelons

Fig. 50.

ds et L les longueurs $\overline{AA'}$ et $\overline{A_0A_1}$;

dz la différence de hauteur, relativement à un plan horizontal supérieur, des centres des sections AB, A′B′; h la quantité analogue pour les sections extrêmes A_0B_0, A_1B_1;

D le diamètre constant $\overline{AB}$;

p la pression du gaz en AB, ρ sa densité, U sa vitesse moyenne;

p_0, ρ_0, U_0, p_1, ρ_1, U_1, les quantités analogues pour les sections A_0B_0, A_1B_1;

δ, α, θ, les quantités ainsi désignées au n° 90.

D'abord la permanence exige que le poids de la masse gazeuse comprise dans l'espace $A_0B_0A_1B_1$ soit constant. Or dans un élément de temps dt il entre par A_0B_0 un poids exprimé par $g\rho_0 . \frac{1}{4}\pi D^2 . U_0 dt$, tandis qu'il sort par A_1B_1 un poids égal à $g\rho_1 . \frac{1}{4}\pi D^2 . U_1 dt$; donc on a

$$\rho_0 U_0 = \rho_1 U_1.$$

Le même raisonnement pourrait être répété en considérant le gaz qui remplit le volume A_0B_0AB, et l'on en conclurait la relation

$$\rho U = \rho_0 U_0 = \rho_1 U_1 = \text{const}.$$

D'un autre côté, si nous supposons la température θ constante, la densité sera proportionnelle à la pression; on aura donc aussi

$$pU = p_0 U_0 = p_1 U_1 = \text{const}.,$$

relation d'où il résulte que, malgré la constance du diamètre, la vitesse varie d'une section à l'autre, si la pression n'est pas

constante, ce qui aura lieu nécessairement, comme on va le voir, dans l'état de mouvement.

A la vérité nous faisons ici abstraction des différences de pression ou de densité qui existent d'un point à l'autre d'une même section transversale; mais cela ne peut pas entraîner d'erreur appréciable. On pourrait reconnaître en effet, comme nous l'avons fait plusieurs fois pour les liquides, que, par suite du parallélisme supposé des filets, la pression varie dans une même section suivant la loi hydrostatique; ce qui veut dire qu'elle varie extrêmement peu, car, à cause de la grande légèreté du gaz, il faudrait une différence de niveau considérable pour produire une différence de pression sensible. D'ailleurs la loi de Mariotte nous montre que si la pression peut être regardée comme constante, il en est de même de la densité.

Maintenant appliquons à un filet élémentaire MM′ compris entre AB et A′B′ le théorème général établi au n° **15**. Ici les forces extérieures agissant sur une molécule, indépendamment des pressions et frottements des molécules voisines, se réduisent à la pesanteur; leur travail élémentaire dT rapporté à l'unité de masse, pour un abaissement dz, serait donc gdz. Nous admettrons, comme nous l'avons fait pour les liquides (n°s 55 et 74), que la force produite sur une molécule par le frottement des molécules voisines est dirigée en sens contraire de la vitesse des filets, et nous appellerons φ son intensité par unité de masse. Appelant en outre v la vitesse en M, l'équation (12) du n° 15 pourra dès lors s'écrire dans le cas actuel

$$dz - \frac{1}{\rho g}\, dp - \frac{1}{g}\varphi\, ds - \frac{v dv}{g} = 0.$$

Multiplions cette équation par la masse m du filet MM′, et faisons la somme des équations analogues pour tous les filets compris dans le volume ABA′B′; nous trouverons, en divisant par la masse totale Σm,

$$dz - \frac{1}{\rho g}\, dp - \frac{1}{g}\frac{\Sigma m\varphi}{\Sigma m}\, ds - \frac{\Sigma m v dv}{g\Sigma m} = 0.$$

$\dfrac{\Sigma m v dv}{g\Sigma m}$ est la valeur moyenne de $d\dfrac{v^2}{2g}$ pour les molécules m

renfermées dans la tranche ABA′B′ ; faute de pouvoir l'évaluer exactement, en tenant compte de la loi des vitesses dans une même section, on fait ce que nous avons déjà fait aux n°s 55 et 74, c'est-à-dire qu'on remplace cette quantité par $\frac{UdU}{g}$. Quant à $\Sigma m\varphi$, c'est la somme des forces exercées en vertu de la viscosité sur les mêmes molécules m ; dans cette somme, les actions intérieures disparaissent, de sorte qu'on trouve seulement les forces appliquées à la surface qui termine la tranche, savoir le frottement de la paroi solide, et deux résultantes sensiblement égales et contraires agissant sur les sections AB, A′B′. Or l'analogie qui existe entre la question que nous traitons et celle du mouvement de l'eau dans les tuyaux nous conduit à exprimer ce frottement par $\rho g b_1 U^2$, en le rapportant à l'unité de surface ; pour la tranche considérée il sera donc $\pi D ds . \rho g b_1 U^2$. Enfin $g\Sigma m$ a pour valeur $\frac{1}{4}\pi D^2 ds . \rho g$; donc $\frac{\Sigma m\varphi}{g\Sigma m} = \frac{4}{D} b_1 U^2$. Donc aussi nous aurons

$$dz - \frac{dp}{\rho g} - \frac{4}{D} b_1 U^2 ds - \frac{UdU}{g} = 0.$$

On sait (n° 90) que $\rho g = \frac{1}{8000}\ \frac{p\delta}{1+\alpha\theta} = g K p$, et l'on vient de voir tout à l'heure que le produit pU est constant, de sorte que B étant sa valeur, on a

$$U = \frac{B}{p} :$$

substituant ces expressions, on trouvera

$$\frac{1}{gK}\frac{dp}{p} - dz + \frac{4 b_1 B^2}{D p^2} ds - \frac{B^2}{g}\frac{dp}{p^3} = 0,$$

soit, après avoir multiplié par p^2,

$$(8) \qquad \frac{1}{gK} p dp - p^2 dz + \frac{4 b_1 B^2}{D} ds - \frac{B^2}{g}\frac{dp}{p} = 0.$$

Il y a dans cette équation un terme $p^2 dz$ qui n'est point une différentielle exacte ; l'équation ne peut donc pas, à la rigueur, être intégrée sans tenir compte de la forme de la conduite, c'est-

à-dire de la relation entre z et s. Si, par exemple, la conduite était rectiligne, on aurait $z = ns$, n étant un nombre constant; l'équation (8) deviendrait alors, en séparant les variables,

$$ds = dp \frac{\frac{1}{g\mathrm{K}}p^2 - \frac{\mathrm{B}^2}{g}}{p\left(np^2 - \frac{4b_1\mathrm{B}^2}{\mathrm{D}}\right)} = \frac{1}{g\mathrm{K}n} \frac{p^2 - \mathrm{KB}^2}{p\left(p^2 - \frac{4b_1\mathrm{B}^2}{n\mathrm{D}}\right)} dp,$$

forme sous laquelle l'intégration devient possible. Mais comme, par suite de la grande légèreté des gaz, le terme en dz qui provient de l'action de la pesanteur n'a ordinairement qu'une influence secondaire; comme de plus, dans les applications pratiques, la pression p est en général très-peu variable, il est beaucoup plus simple et tout aussi exact de remplacer p^2dz par $\frac{1}{2}(p_0^2 + p_1^2)\,dz$. Alors l'équation (8) peut s'intégrer sans tenir compte de la relation entre z et s, et l'on trouve, en effectuant cette intégration depuis $\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0$ jusqu'à $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$,

$$\frac{1}{2g\mathrm{K}}(p_1^2 - p_0^2) - \frac{1}{2}(p_1^2 + p_0^2)h + \frac{4b_1\mathrm{LB}^2}{\mathrm{D}} + \frac{\mathrm{B}^2}{g}\log\text{hyp}\frac{p_0}{p_1} = 0.$$

Suivant les cas particuliers qui pourront se présenter, on remplacera B par $p_0\mathrm{U}_0$ ou par $p_1\mathrm{U}_1$; alors cette relation déterminera l'une des pressions extrêmes, quand on connaîtra l'autre et la vitesse correspondante.

Soient données, par exemple, p_0 et U_0; on mettra $p_0\mathrm{U}_0$ au lieu de B et l'on divisera par p_0^2; l'équation ci-dessus devient alors

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2g\mathrm{K}}\left(\frac{p_1^2}{p_0^2} - 1\right) - \frac{h}{2}\left(\frac{p_1^2}{p_0^2} + 1\right) + \frac{4b_1\mathrm{L}}{\mathrm{D}}\mathrm{U}_0^2 \\ &+ \frac{\mathrm{U}_0^2}{g}\log\text{hyp}\frac{p_0}{p_1} = 0, \end{aligned} \right.$$

où il n'y a plus d'inconnue que $\frac{p_1}{p_0}$. Dans l'hypothèse d'une pression peu variable, on simplifierait le calcul de ce rapport en prenant pour inconnue $1 - \frac{p_1^2}{p_0^2} = x$; on aurait alors

$$\frac{p_1^2}{p_0^2} = 1 - x$$

et aussi

$$\log \text{hyp} \frac{p_0}{p_1} = -\frac{1}{2} \log \text{hyp} \frac{p_1^2}{p_0^2} = -\frac{1}{2} \log \text{hyp} (1 - x) = \frac{x}{2},$$

à cause de la petitesse de x. Par suite l'équation (9) se transforme comme il suit :

$$-\frac{x}{2gK} - \frac{h}{2}(2 - x) + \frac{4b_1 L}{D} U_0^2 + \frac{U_0^2 x}{2g} = 0,$$

d'où l'on tire immédiatement

$$(10) \qquad x = \frac{8b_1 \frac{L}{D} U_0^2 - 2h}{\frac{1}{gK} - h - \frac{U_0^2}{g}}.$$

Si les données avaient été p_1 et U_1, on aurait remplacé B par $p_1 U_1$; puis divisant l'équation par p_1^2 et prenant pour inconnue $\frac{p_0^2}{p_1^2} - 1 = y$, on aurait trouvé de même

$$(11) \qquad y = \frac{8b_1 \frac{L}{D} U_1^2 - 2h}{\frac{1}{gK} + h - \frac{U_1^2}{g}}.$$

On sait que gK a pour valeur $\frac{1}{8000} \frac{\delta}{1 + \alpha\theta}$ et par suite que $\frac{1}{gK} = 8000 \frac{1 + \alpha\theta}{\delta}$; cette quantité $\frac{1}{gK}$ représente donc une hauteur de plusieurs kilomètres, devant laquelle h est généralement négligeable; mais cela ne simplifierait pas beaucoup les formules (10) et (11).

Navier, d'après les expériences de Girard et d'Aubuisson, a reconnu que pour un gaz quelconque, le coefficient b_1 a pour valeur.

$$b_1 = 0{,}000355.$$

L'analogie porte à croire que ce coefficient n'est pas rigoureusement constant, ainsi que nous l'avons vu dans le cas de l'eau ; mais il paraît qu'il n'y a pas d'inconvénient à négliger ses variations.

Les formules (10) et (11) peuvent être employées dans le cas de pressions peu variables, soit pour déterminer une des pressions extrêmes, quand on connaît l'autre ainsi que le volume dépensé, soit pour trouver les vitesses U_0, U_1, et par suite le volume dépensé, connaissant les deux pressions extrêmes. L'exemple suivant montrera l'usage de cette théorie.

95. *Exemple de calculs numériques sur une conduite de gaz.* — On donne une conduite de 600 mètres de longueur et de $0^m,15$ de diametre, ayant 25 mètres de pente totale; cette conduite, terminée par une buse ou ajutage cylindrique de $0^m,06$ de diamètre, écoule de l'air à 300 degrés dans une atmosphère dont la pression p' est représentée par une colonne de $0^m,75$ de mercure. Le volume Q dépensé par seconde, ramené à la température zéro et à la pression p produite par $0^m,76$ de mercure, est de $0^{mc},10$. On demande la pression p_0, à l'origine de la conduite.

Soient p_1 la pression immédiatement en amont de la buse, dans la conduite; U_1 la vitesse correspondante; U' la vitesse de sortie à l'extrémité de la buse; les autres notations seront celles du numéro précédent. On aura dans cet exemple

$$L = 600^m, \quad D = 0^m,15, \quad h = 25^m, \quad \theta = 300^o, \quad \delta = 1;$$

par suite

$$\frac{1+\alpha\theta}{\delta} = 2,10 \quad \text{et} \quad \frac{1}{gK} = 16800.$$

On peut d'abord calculer U'. En effet le volume dépensé, ramené à la température θ et à la pression p', serait $Q(1+\alpha\theta)\dfrac{p}{p'}$ ou $0,21.\dfrac{76}{75}$, puisque ici $\theta = 300^o$; d'un autre côté, il s'exprime (n° 93) par $0,93.\frac{1}{4}\pi(0,06)^2U'$ ou par $0,93.0,0009\pi U'$. Donc

$$0,21.\frac{76}{75} = 0,93.0,0009\pi U',$$

d'où

$$U' = 80^m,93 \quad \text{et} \quad \frac{U'^2}{2g} = 334^m,12.$$

Connaissant U', on en déduira p_1 et U_1. En effet, le volume dépensé par seconde, ramené à la pression p_1 et à la température de 300 degrés, a pour valeur les deux expressions $0.93.0,0009\pi U'.\dfrac{p'}{p_1}$ et $\frac{1}{4}\pi D^2 U_1$; donc on posera

$$0,93.0,0009.p'U' = 0,005625 p_1 U_1,$$

ou bien

$$U_1 = 0,1488 \frac{p'U'}{p_1}.$$

Ensuite, si l'on applique l'équation (1) du n° 90 au parcours d'une molécule depuis la section où la vitesse est U_1 jusqu'à celle où elle est U', on trouvera

$$\frac{U_1^2}{2g} + 8000 \frac{1+\alpha\theta}{\delta} \log \text{hyp}\, p_1 = \frac{U'^2}{2g} + 8000 \frac{1+\alpha\theta}{\delta} \log \text{hyp}\, p',$$

car la différence de niveau des deux sections est négligeable. On tire de là

$$8000 \frac{1+\alpha\theta}{\delta} \log \text{hyp} \frac{p_1}{p'} = \frac{U'^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g},$$

ou, en remplaçant U_1 par sa valeur,

$$8000 \frac{1+\alpha\theta}{\delta} \log \text{hyp} \frac{p_1}{p'} = \frac{U'^2}{2g} \left[1 - (0,1488)^2 \frac{p'^2}{p_1^2} \right].$$

Il n'y a donc d'inconnu dans cette dernière équation que le rapport $\frac{p_1}{p'}$, qui par conséquent pourrait se déterminer par tâtonnement. Mais, comme on doit en tirer une valeur peu différente de 1, en posant $\frac{p_1}{p'} = 1 + m$, on aurait approximativement $\log \text{hyp} \frac{p_1}{p'} = m$, $\frac{p'^2}{p_1^2} = \frac{1}{(1+m)^2} = 1 - 2m$; l'équation ci-dessus devient alors

$$8000 \frac{1+\alpha\theta}{\delta} m = \frac{U'^2}{2g} [1 - (0,1488)^2 (1 - 2m)];$$

ou, en remplaçant $\frac{1+\alpha\theta}{\delta}$ par 2,10, $\frac{U'^2}{2g}$ par 334,12, et réduisant,

$$16815m = 341,5,$$

ce qui donne

$$m = 0,0203 \quad \text{et} \quad \frac{p_1}{p'} = 1,0203.$$

Ce résultat justifie le calcul approximatif dont nous avons fait usage. D'ailleurs nous avons trouvé ci-dessus $U_1 = 0,1488 \frac{p'U'}{p_1}$; on fera dans cette expression $U' = 80,93$, $\frac{p'}{p_1} = \frac{1}{1,0203}$, et l'on obtiendra

$$U_1 = 11^{m},80 \quad \text{et} \quad \frac{U_1^2}{2g} = 7^{m},10.$$

On a maintenant tous les éléments nécessaires pour appliquer la formule (11) du n° 94, qui donnera

$$y = 1,0912;$$

ainsi $\frac{p_0^2}{p_1^2} - 1 = 0,0912$, $\frac{p_0^2}{p_1^2} = 1,0912$ et $\frac{p_0}{p_1} = 1,045$. On a donc définitivement

$$\frac{p_0}{p'} = \frac{p_0}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p'} = 1,045 \cdot 1,020 = 1,066;$$

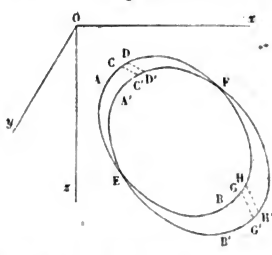
la pression p_0 serait représentée par une colonne de mercure ayant pour hauteur $0^m,75 \cdot 1,066 = 0^m,80$; la différence $p_0 - p'$ répondrait à une hauteur de $0^m,05$ de mercure ou à $0^m,68$ d'eau.

96. *Des changements brusques de section dans les conduites de gaz.* — Les variations de pression d'un point à l'autre de la conduite étant généralement faibles, on ne s'écarte pas beaucoup de la vérité en supposant au gaz une densité constante. Dès lors rien n'empêche de le traiter comme un liquide, et tous les calculs donnés au § II du chapitre deuxième sont parfaitement applicables, en tenant compte, bien entendu, du poids Π par mètre cube de gaz, répondant à la pression moyenne et à la température de la conduite. On appréciera ainsi la différence de niveau piézométrique, et par suite l'excès de pression existant de l'amont à l'aval du point où se fait la perte de charge.

§ II. — Du travail produit par la compression ou la détente des gaz.

97. *Travail exercé par une masse gazeuse sur son enveloppe.* — Considérons une masse gazeuse qui occupe le volume AB (*fig.* 51); ce gaz se déplace infiniment peu et vient occuper la position A'B' : il s'agit de calculer le travail infiniment petit $d\mathfrak{T}$ des pressions exercées sur les différents éléments superficiels de l'enveloppe AB pendant ce déplacement.

Fig. 51.



Soient à cet effet CD un élément de la surface AB, ω son aire, p la pression qu'il subit de la part du gaz, rapportée à l'unité de surface. Cet élément CD, pendant le déplacement du système, est venu en C'D', et a changé infiniment peu de grandeur et de direction, de manière que le volume CDC'D' peut être considéré comme un cylindre oblique, dont ω serait la base, et dont la hauteur h serait la projection de $\overline{CC'}$ sur la normale en C à la surface AB. Maintenant remarquons que la pression exercée par le gaz sur CD est $p\omega$; que son travail est négatif et a pour valeur absolue le produit de la force $p\omega$ par la projection h du chemin parcouru, sur la direction de la force : ce travail sera donc $-p\varepsilon$, en désignant par ε le volume CDC'D'. Si, au lieu de considérer un élément CD, qui engendre un volume CDC'D' rentrant dans le volume primitif AB, nous avions pris un élément GH qui engendre un volume GHG'H' sortant de AB, nous serions arrivé de même à l'expression $p_1\varepsilon_1$ du travail exercé par le gaz sur GH, en appelant p_1 la pression par unité de surface en G, et ε_1 le volume GHG'H'. Ainsi donc, pour avoir le travail total demandé, il faut faire la somme des travaux positifs $p_1\varepsilon_1$ et en retrancher la somme des travaux négatifs $p\varepsilon$.

Le calcul des sommes dont il s'agit suppose nécessairement connue la loi suivant laquelle varient les pressions aux différents points de l'enveloppe. Nous ferons à cet égard deux hypothèses simplificatives. D'abord nous admettrons que les mouvements des molécules gazeuses sont assez lents pour que la pression s'écarte peu de la loi hydrostatique (n° 18, 2e règle); en second lieu, l'enveloppe AB sera supposée avoir des dimensions modérées, de sorte que les changements de pression d'un point à l'autre seront peu sensibles. Dès lors le gaz pourra être considéré, s'il est partout à la même température, comme un fluide homogène, de densité constante; donc si l'on nomme z la distance d'un point quelconque au plan horizontal xOy, p la pression en ce point, p_0 une constante, Π le poids du mètre cube de gaz, on aura

$$p = p_0 + \Pi z.$$

Les quantités telles que $p\varepsilon$ ou $p_1\varepsilon_1$ seront donc exprimées gé-

néralement par $\varepsilon(p_0 + \Pi z)$; les deux sommes dont on a parlé ci-dessus se décomposeront chacune en deux, l'une proportionnelle à p_0, l'autre à Π; ainsi, l'on trouvera, en appelant Σ une somme étendue à tous les ε,

$$\Sigma p\varepsilon = p_0 \Sigma\varepsilon + \Pi\Sigma z\varepsilon.$$

De même, en affectant de l'indice $_1$, les quantités analogues pour les volumes élémentaires ε_1, on aurait

$$\Sigma_1 p_1 \varepsilon_1 - \Sigma p\varepsilon = p_0(\Sigma_1 \varepsilon_1 - \Sigma\varepsilon) + \Pi(\Sigma_1 z_1 \varepsilon_1 - \Sigma z\varepsilon).$$

Or $\Sigma_1 \varepsilon_1$ n'est autre que le volume EGFG', et $\Sigma\varepsilon$ est le volume ECFC'; en leur ajoutant à chacun le volume EC'FG, commun à AB et A'B', on voit que $\Sigma_1\varepsilon_1 - \Sigma\varepsilon$ est égal à la différence des volumes A'B' et AB : ainsi donc, en appelant dV l'augmentation de volume du gaz pendant son déplacement, nous pourrions d'abord remplacer $p_0(\Sigma_1\varepsilon_1 - \Sigma\varepsilon)$ par $p_0 dV$. Pareillement si l'on ajoute à $\Sigma_1 z_1 \varepsilon_1$ et à $\Sigma z\varepsilon$ le moment du volume EC'FG relativement au plan xOy, ce qui n'altère pas la différence de ces quantités, on voit que cette différence représente l'accroissement du moment du volume total AB, relativement à xOy. Désignant donc par V le volume AB et par ζ l'ordonnée z de son centre de gravité, $\Pi(\Sigma_1 z_1 \varepsilon_1 - \Sigma z\varepsilon)$ sera égal à $\Pi d.V\zeta$, c'est-à-dire à $\Pi\zeta dV + \Pi V d\zeta$. Donc le travail des pressions du gaz sur l'enveloppe, pendant que le volume V augmente de dV et que son centre de gravité descend de $d\zeta$, sera

$$(p_0 + \Pi\zeta)dV + \Pi V d\zeta = d\mathcal{T}. \tag{1}$$

Par suite de la grande légèreté des gaz, et surtout à cause de l'hypothèse faite toute à l'heure sur la lenteur du mouvement, on peut regarder le gaz comme possédant une puissance vive toujours sensiblement nulle : la somme des travaux de toutes les forces, tant intérieures qu'extérieures, auxquelles il est soumis, doit donc également s'annuler. Or, pour le déplacement qu'on vient d'étudier, ces travaux sont :

1°. Celui de la pesanteur, lequel a pour valeur $\Pi V d\zeta$;

2°. Celui qu'exerce l'enveloppe, égal et contraire à $d\mathcal{T}$, et en conséquence exprimé par $-(p_0 + \Pi\zeta)dV - \Pi V d\zeta$;

3°. Celui des actions intérieures.

Pour que la somme soit nulle, il faut que ce dernier travail soit $(p_0 + \Pi\zeta)\,dV$. Ainsi chacune des parties de $d\varpi$ a une signification bien déterminée : l'une représente le travail de la pesanteur sur le gaz ; l'autre est la somme des travaux faits par les actions intérieures du système gazeux, somme dont on a ainsi trouvé une expression remarquable.

Actuellement, supposons que la masse gazeuse éprouve un déplacement fini, pendant lequel Π, V et ζ, qui sont des quantités déterminées pour chaque position du système, varient respectivement entre les limites Π_1 et Π_2, V_1 et V_2, ζ_1 et ζ_2. Pendant ce mouvement, ΠV sera constant, puisque c'est toujours le poids Q d'un même ensemble de molécules ; mais le volume V varie et l'on peut admettre qu'il est toujours lié à la pression moyenne $p_0 + \Pi\zeta$ ou p', par la relation

$$p'V = \text{const.} = C,$$

qui résulte de la loi de Mariotte. On tire de là

$$p' = p_0 + \Pi\zeta = \frac{C}{V};$$

par suite le travail élémentaire $d\varpi$ devient

$$C\frac{dV}{V} + Q\,d\zeta,$$

et en intégrant entre les limites données, on trouve le travail fini

$$(2) \qquad \varpi = C \log\text{hyp} \frac{V_2}{V_1} + Q(\zeta_2 - \zeta_1).$$

Si l'on appelle p'_1 et p'_2 les pressions moyennes répondant aux limites, on pourra remplacer C par $p'_1 V_1$ ou par $p'_2 V_2$, et $\frac{V_2}{V_1}$ par $\frac{p_1}{p_2}$, ce qui donnerait diverses expressions de la même quantité. On retrouve d'ailleurs ici les deux parties qui composaient le travail élémentaire, savoir le travail de la pesanteur et celui des forces mutuelles, ce dernier ayant pour valeur $C \log\text{hyp} \frac{V_2}{V_1}$.

Voici enfin une autre transformation de la formule (2). Si K

désigne le rapport de la densité $\frac{\Pi}{g}$ du gaz, à la pression correspondante p', on aura, suivant les raisonnements du n° 90, en conservant le même sens aux notations α, θ et δ :

$$\frac{\Pi}{g} = K p',$$

$$g K = \frac{1}{8000} \frac{\delta}{1 + \alpha\theta},$$

d'où l'on tire, par l'élimination de K,

$$p' = \Pi \frac{8000(1 + \alpha\theta)}{\delta}.$$

Donc on a aussi

$$C = p'V = \Pi V \frac{8000(1 + \alpha\theta)}{\delta} = Q \frac{8000(1 + \alpha\theta)}{\delta},$$

valeur qui reportée dans l'égalité (2) donnera

$$(3) \qquad \mathfrak{T} = Q \left[\frac{8000(1 + \alpha\theta)}{\delta} \log\text{hyp} \frac{V_2}{V_1} + \zeta_2 - \zeta_1 \right].$$

Cette formule a l'avantage de mettre en évidence l'importance du travail fait par les actions mutuelles des molécules gazeuses, comparativement à celui de la pesanteur : leur rapport est en effet celui de $\frac{8000(1 + \alpha\theta)}{\delta} \log\text{hyp} \frac{V_2}{V_1}$ à $\zeta_2 - \zeta_1$. Or le facteur $\frac{8000(1 + \alpha\theta)}{\delta}$ représente une hauteur ordinairement assez grande (ce serait 8 kilomètres pour l'air à 0°); donc si le rapport $\frac{V_2}{V_1}$ s'écarte notablement de l'unité, et que le centre de gravité du gaz ne subisse pas un déplacement vertical considérable, il sera permis de négliger le travail de la pesanteur. On conçoit effectivement à priori que le poids d'un gaz est généralement petit en comparaison des pressions exercées sur son enveloppe par suite de son élasticité, et que dès lors il n'y a pas grande erreur à en faire abstraction.

Il faut se rappeler que nous avons admis, dans le courant du calcul, des hypothèses qui ne sont point rigoureuses, notam-

ment la lenteur des mouvements assimilée à l'équilibre, la constance de la densité pour chaque position de la masse gazeuse et enfin la loi de Mariotte. Les résultats ne doivent donc être considérés que comme approximatifs. Nous allons maintenant en indiquer quelques applications.

98. *Calcul du travail nécessaire pour faire passer un gaz d'un réservoir dans un autre où la pression est différente.* — On prend une certaine quantité de gaz dont le volume primitif est V_1, dans un réservoir où elle était à la pression p_1, pour la faire passer dans un réservoir où sa pression sera p_2 et son volume V_2. On demande le travail qui doit être dépensé pour cet objet.

L'analyse du numéro précédent permet de répondre immédiatement à cette question. Le travail qu'on demande ici est celui que l'enveloppe du volume gazeux dont il s'agit exerce sur le gaz; il est donc égal et contraire à celui que le gaz exerce sur l'enveloppe, et a pour valeur, en conservant les notations du n° 97,

$$-\left[\mathrm{C}\log\mathrm{hyp}\frac{V_2}{V_1}+Q(\zeta_2-\zeta_1)\right]=-\mathfrak{T}.$$

Habituellement on néglige, comme nous l'avons dit tout à l'heure, le terme $-Q(\zeta_2-\zeta_1)$ ou travail destiné à vaincre l'action de la pesanteur.

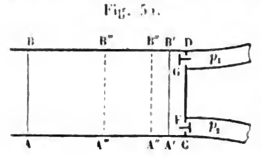
Dans les applications ordinaires, le travail à dépenser serait donc simplement $\mathrm{C}\log\mathrm{hyp}\frac{V_1}{V_2}$. Il est toutefois bien entendu que ceci représente uniquement le travail exigé en particulier par le changement de pression du gaz : si l'on avait simultanément (par suite de la disposition des machines employées) à déplacer certains corps, malgré des résistances indépendantes du gaz lui-même, il est clair que le moteur devrait fournir en outre un travail égal à celui desdites résistances. Imaginons, par exemple, un piston qui en montant dans un corps de pompe comprimerait un gaz au-dessus de lui, pendant que le couvercle supérieur se soulèverait malgré son poids : le travail moteur nécessaire comprendrait alors, outre l'expression loga-

rithmique ci-dessus donnée, un second terme égal en valeur absolue au travail produit par les poids du piston et du couvercle.

L'étude de quelques questions qui se rapportent au mouvement varié des machines exige que l'on connaisse, non-seulement le travail total employé pendant chaque période complète du mouvement, mais encore le travail employé depuis l'origine jusqu'à un instant quelconque de cette période. Il faut alors une analyse plus minutieuse. En voici un exemple que nous empruntons au Cours professé à l'École des Ponts et Chaussées par notre prédécesseur, M. Belanger.

Un piston oscille horizontalement entre la position A'B' et la position AB (*fig.* 52); au fond CD du corps de pompe aboutissent deux conduits qui communiquent à deux réservoirs où les pressions sont p_2 et p_1; ces conduits sont fermés par des soupapes F et G, dont la première s'ouvre de dedans en dehors du corps de pompe, la seconde s'ouvrant au contraire de dehors en dedans. La pression p_1 est plus petite que p_2; la pression atmosphérique agit sur la face du piston opposée à celle qui est en communication avec les deux réservoirs. On demande quelle sera la quantité de gaz qui passera d'un réservoir dans l'autre à chaque coup de piston; on demande aussi le travail exercé sur le piston par la pression du gaz et par la pression atmosphérique à un instant quelconque de la période.

Fig. 52.



Lorsque le piston, arrivé en A'B', commence une nouvelle course de droite à gauche, le volume A'B'CD vient d'être en communication avec le réservoir où la pression est p_2, et se trouve par conséquent rempli de gaz à cette pression. Le piston s'éloignant du fond CD, le volume A'B'CD est augmenté, la pression diminue et la soupape F se ferme. Mais la soupape G ne s'ouvre pas immédiatement; elle s'ouvre seulement quand le piston est A''B'', suffisamment loin de CD pour que la pression dans A''B''CD soit égale à p_1. Si l'on pose $\overline{A'C} = a$, $\overline{A''C} = y'$, et qu'on nomme Ω la section du corps de pompe, la loi de Mariotte fournit, pour déterminer y', l'équation

$$\Omega a . p_2 = \Omega y' . p_1 \quad \text{ou} \quad p_2 a = p_1 y'.$$

A partir de A''B'' jusqu'à AB, le piston se meut avec la soupape G ouverte et l'autre fermée; il supporte la pression p_1 sur sa face de droite, par unité superficielle. Le volume V_1 extrait du réservoir alimentaire, mesuré sous la pression p_1 et à la température de ce réservoir, sera donc égal

à ABA″B″, ou bien, en nommant l la longueur $\overline{AA'}$ de la course

$$V_1 = \Omega(l + a - y') = \Omega\left[l + a\left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right)\right].$$

La première partie de la question se trouve ainsi résolue. On remarquera que le terme $a\left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right)$ est en réalité négatif, de sorte que pour extraire le plus grand volume de gaz, avec une course l et une section Ω données, il faut que a soit aussi petit que possible : cela justifie le nom d'*espace nuisible* donné au volume A′B′CD, qui reste entre le fond CD du corps de pompe et la position la plus rapprochée du piston.

Avant de nous occuper du travail, voyons encore ce qui se passe dans le retour de la position AB à la position A′B′ du piston. Quand ce mouvement rétrograde commence, la soupape G se ferme de suite ; mais l'autre soupape F ne s'ouvre que lorsque le volume ABCD a été assez diminué pour que le gaz dont il est rempli passe de la pression p_1 à la pression p_2. Soient alors A‴B‴ la position du piston, et y'' la distance $\overline{A'''C}$; on aura, toujours en vertu de la loi de Mariotte,

$$(l + a)\,\Omega p_1 = y''\,\Omega p_2 \quad \text{ou} \quad p_1(l + a) = p_2 y'',$$

ce qui détermine y''. De A‴B‴ à A′B′, le piston se mouvra en éprouvant constamment la pression p_2 par unité de surface, en sens contraire de son mouvement.

Maintenant il est aisé d'avoir la valeur du travail exercé sur le piston, tant par la pression du gaz que par la pression atmosphérique. Nommons y la distance entre CD et la face intérieure du piston ; le travail dont il s'agit, compté depuis l'instant où le piston était en A′B′ jusqu'à une position quelconque prise dans l'étendue d'une double course (aller et retour), aura diverses expressions, suivant la position finale qu'on attribue au piston, savoir :

1°. Pendant que y croît de zéro à y', le gaz enfermé entre le piston et le fond CD, primitivement à la pression p_2 et sous le volume Ωa, passe à la pression p_1 et au volume $\Omega y'$; il exerce donc en se détendant un travail moteur égal à $p_2 \Omega a \log\text{hyp}\,\frac{y}{a}$ (nº 97), qui deviendra $p_2 \Omega a \log\text{hyp}\,\frac{p_2}{p_1}$ quand le piston aura pris la position A″B″. Dans le même intervalle, la pression atmosphérique p_a exerce une résistance constante sur l'autre face du piston ; le travail de cette résistance $p_a\Omega$ sera $-p_a\Omega(y - a)$ à un instant quelconque de cette période, et par conséquent $-p_a\Omega(y' - a)$ à la fin.

2°. y étant croissant de y' à $l + a$, le piston éprouve de la part du gaz

et de l'atmosphère une force constante $(p_1 - p_a)\Omega$, dont le travail, mesuré depuis A″B″, a pour valeur $(p_1 - p_a)\Omega(y - y')$. Pour avoir le travail compté depuis A′B′, il suffit d'ajouter le travail total accompli dans la première période, soit $p_2\Omega a \log\text{hyp}\frac{p_2}{p_1} - p_a\Omega(y' - a)$, ce qui donnera

$$p_2\Omega a \log\text{hyp}\frac{p_2}{p_1} + p_1\Omega(y - y') - p_a\Omega(y - a).$$

Faisant dans cette expression $y = l + a$, on aura le travail total dans le mouvement du piston de A′B′ en AB, qui sera

$$p_2\Omega a \log\text{hyp}\frac{p_2}{p_1} + p_1\Omega(l + a - y') - p_a\Omega l.$$

3°. Pendant que le piston décrit le volume ABA‴B‴, il comprime une masse gazeuse qui passe du volume $\Omega(l+a)$ au volume $\Omega y''$, et de la pression p_1 à la pression p_2. Ce gaz fait donc un travail résistant qui, compté depuis la position AB, a pour valeur $p_1\Omega(l+a)\log\text{hyp}\frac{y}{l+a}$; simultanément la pression atmosphérique fait un travail moteur $p_a\Omega(l+a-y)$. On y joindra le travail accompli dans la course de droite à gauche, et l'on aura, pour représenter le travail compté depuis A′B′, l'expression

$$p_2\Omega a\log\text{hyp}\frac{p_2}{p_1} + p_1\Omega(l+a-y') + p_1\Omega(l+a)\log\text{hyp}\frac{y}{l+a} - p_a\Omega(y-a).$$

A la fin de cette troisième période, on aura $y = y''$, et le rapport $\frac{y}{l+a}$ sera celui de p_1 à p_2; la valeur correspondante du travail cherché sera donc

$$p_2\Omega a\log\text{hyp}\frac{p_2}{p_1} + p_1\Omega(l+a-y') + p_1\Omega(l+a)\log\text{hyp}\frac{p_1}{p_2} - p_a\Omega(y''-a),$$

ou, en réduisant,

$$\Omega[p_2 a - p_1(l+a)]\log\text{hyp}\frac{p_2}{p_1} + p_1\Omega(l+a-y') - p_a\Omega(y''-a).$$

4°. Enfin, si l'on fait décrire au piston l'espace A‴B‴A′B′, il sera soumis à une résistance constante $(p_2 - p_a)\Omega$, faisant un travail exprimé par $-(p_2 - p_a)\Omega(y'' - y)$, si on le compte depuis A‴B‴, ou par

$$\Omega[p_2 a - p_1(l+a)]\log\text{hyp}\frac{p_2}{p_1} + p_1\Omega(l+a-y') - p_a\Omega(y-a) - p_2\Omega(y''-y),$$

en le comptant depuis A′B′, commencement de la première période. A la fin de cette période, qui complète une double oscillation, le travail total du gaz et de l'atmosphère sur le piston se calculera en faisant $y = a$ dans l'expression précédente, qui devient

$$\Omega[p_2 a - p_1(l+a)]\log\text{hyp}\frac{p_2}{p_1} + p_1\Omega(l+a-y') - p_2\Omega(y''-a).$$

C'est la valeur, sauf le changement de signe, du travail que doit fournir le moteur, pendant la double course du piston, pour entretenir le mouvement périodique de la machine, en supposant que les résistances proviennent uniquement des pressions p_a, p_1, p_2.

On voit que, comme on devait s'y attendre, cette expression est indépendante de la pression atmosphérique, force tantôt motrice, tantôt résistante, dont le travail positif, pendant le mouvement de gauche à droite, anéantit le travail négatif pendant le mouvement en sens contraire. On peut encore faire d'autres simplifications. D'abord, au lieu de $p_2 a$, on mettra $p_1 y'$, et le premier terme deviendra

$$-p_1 \Omega (l+a-y') \log \text{hyp} \frac{p_2}{p_1},$$

ou bien

$$-p_1 V_1 \log \text{hyp} \frac{p_2}{p_1}.$$

Ensuite, on remarquera que $\Omega(y''-a)$ est le volume, sous la pression p_2, du gaz extrait du réservoir alimentaire à chaque coup de piston et envoyé dans l'autre réservoir; comme ce même gaz, sous la pression p_1, occupait le volume $\Omega(l+a-y')$, on a $p_1 \Omega(l+a-y') = p_2 \Omega(y''-a)$, et le travail que nous calculons se réduit finalement à

$$-p_1 V_1 \log \text{hyp} \frac{p_2}{p_1};$$

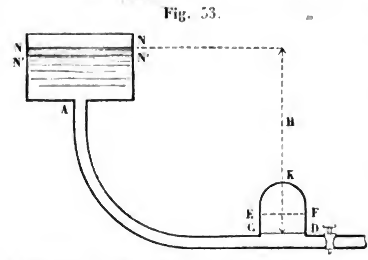
c'est ce qu'on aurait pu écrire immédiatement, si la connaissance du travail total accompli dans l'ensemble des quatre périodes ci-dessus étudiées eût été seule nécessaire.

99. *Des réservoirs d'air en communication avec les conduites d'eau.* — Lorsqu'une conduite contient une assez grande masse d'eau animée d'une certaine vitesse, et que l'écoulement vient à être brusquement interrompu, l'eau en mouvement ne peut perdre sa puissance vive que par le travail résistant que développent les réactions des corps en contact avec elle. Si elle est enfermée purement et simplement dans des parois qu'elle mouille en entier, ces parois devront céder un peu à la pression de l'eau, afin que les forces élastiques dues à cette déformation produisent le travail négatif nécessaire. De là résultent des suppléments assez considérables de tension dans la matière des parois, qui obligent de renforcer beaucoup les tuyaux, pour qu'ils résistent convenablement. Cette espèce de choc a reçu, parmi les ingénieurs, le nom de *coup de bélier*, sans doute

à cause de son analogie avec ce qui se passe dans le bélier hydraulique de Montgolfier. Pratiquement on atténuerait beaucoup les effets dont nous parlons, en fermant les robinets progressivement et avec lenteur : on peut aussi avoir recours aux réservoirs d'air. Près de l'extrémité où se trouve placé le robinet qui interrompt l'écoulement, on fait communiquer la conduite avec une capacité remplie d'air. Pendant que la conduite fonctionne, cette capacité ou ce réservoir renferme de l'air à une pression plus ou moins forte, mais généralement peu différente de celle de l'eau dans la conduite, au point où la communication existe. Quand l'écoulement cesse, l'eau tend à pénétrer dans le réservoir en vertu de la vitesse acquise, l'air se comprime de plus en plus, et produit en grande partie le travail résistant dont on avait besoin.

Connaissant la pression initiale de l'air dans le réservoir, avant la fermeture du robinet, on peut se demander quelle sera sa pression finale quand l'eau sera réduite à une vitesse nulle. Pour résoudre cette question, qui entraîne comme on va le voir, la détermination du volume qu'on doit donner au réservoir, nous appliquerons le théorème de la puissance vive et du travail. Nous nous bornerons d'ailleurs à considérer une conduite cylindrique alimentée par un seul bassin et ne dépensant de l'eau qu'à son extrémité. Soit AA' (*fig.* 53) cette conduite recevant en A l'eau d'un bassin dont le niveau est NN, près de l'extrémité A' se trouve un robinet et un réservoir d'air, dans lequel l'air a primitivement la pression p_1, et l'eau s'élève au niveau CD.

Fig. 53.



Nommons

U_0 la vitesse moyenne de l'eau dans la conduite, pendant son service normal;

U sa vitesse moyenne à un instant quelconque du mouvement varié qui suit la fermeture du robinet;

D le diamètre, L la longueur du tuyau;

Π le poids du mètre cube de liquide;

V_1 le volume de l'air dans le réservoir quand la pression est p_1;

p_2 la pression finale et V_2 le volume correspondant EFK lorsque, le robinet ayant été fermé, la vitesse de l'eau s'est annulée;

H la distance des plans horizontaux NN et CD.

Nous appliquons le théorème du travail à la masse liquide pendant le temps employé pour l'anéantissement de sa vitesse. Le gain de puissance vive, dans cet intervalle, a pour valeur

$$-\frac{1}{2}\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{1}{4}\pi D^2 L . U_0^2.$$

Cherchons maintenant les travaux des différentes forces. Ces forces sont :

1°. La pression résistante du gaz enfermé dans le réservoir, qui produit un travail exprimé par $-p_1V_1 \log \text{hyp} \frac{V_1}{V_2}$ (n° 97), en négligeant la faible hauteur dont s'élève le centre de gravité de ce gaz;

2°. La pression atmosphérique exercée en NN; p_a étant cette pression par mètre carré, S la section du bassin supposé prismatique, ζ l'abaissement NN' du niveau NN pendant le temps considéré, cette force fait un travail égal à $p_a S\zeta$, ou à $p_a(V_1 - V_2)$, car l'incompressibilité de l'eau exige que le volume $S\zeta$ sorti du bassin soit égal à celui qui est entré dans le réservoir d'air;

3°. La pesanteur; son travail est le même que si la tranche NNN'N' était venue se substituer à la place de CDEF et que la partie intermédiaire N'N'CD fût restée immobile, car dans ce déplacement fictif le centre de gravité de la masse totale d'eau se serait abaissée de la même quantité que dans le mouvement réel; le travail de la pesanteur est donc

$$\Pi(V_1 - V_2)\left(H - \frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{2}\overline{CE}\right),$$

ou en désignant par Ω la section CD du réservoir, supposé aussi

prismatique, et mettant à la place de ζ et $\overline{CE}$ leurs valeurs $\frac{V_1 - V_2}{S}$, $\frac{V_1 - V_2}{\Omega}$, ce travail s'exprime par

$$\Pi (V_1 - V_2)\left[H - \frac{1}{2}(V_1 - V_2)\left(\frac{1}{S} + \frac{1}{\Omega}\right)\right];$$

4°. Les réactions du tuyau. Elles peuvent se décomposer en réactions normales et réactions tangentielles, dont les dernières font seules du travail, si l'on fait abstraction de la déformation peu sensible de la conduite. Quant au travail des forces tangentielles ou frottements, on ne peut l'évaluer que par un simple aperçu. On ne connaît en effet l'expression de ces forces que dans le cas du mouvement rectiligne et uniforme, tandis qu'il s'agit ici d'un mouvement rapidement varié, probablement accompagné de vibrations et secousses notables. La force retardatrice φ rapportée à l'unité de masse, si le mouvement était uniforme, s'obtiendrait (n° 43) en multipliant g par la charge $\frac{\zeta}{L}$ ou J consommée sur chaque mètre courant de conduite, soit (n° 48) par $\frac{4 b_1}{D}$ U^2; ainsi l'on aurait

$$\varphi = \frac{4 b_1 g U^2}{D}.$$

Nous admettrons que cette expression est encore vraie, malgré le changement de U d'un instant à l'autre, dans le mouvement que nous considérons; dès lors une molécule liquide de masse m, animée de la vitesse u et parcourant dans un temps dt un intervalle $ds = udt$ sur sa trajectoire, éprouvera de la part de l'action résistante $m\varphi$ un travail négatif égal à

$$-\frac{4 b_1 g U^2}{D} mudt;$$

pour l'ensemble de la conduite ces travaux donneront

$$-\frac{4 b_1 g U^2}{D} dt \Sigma mu,$$

la somme Σ étant étendue au liquide entier. Or, si l'on décompose toute la masse d'eau en filets parallèles à l'axe du tuyau,

l'un de ces filets ayant ω pour section transversale, possédera une masse $\frac{\Pi}{g}\omega L$ et une vitesse u sur toute sa longueur; pour ce filet en particulier, la somme des produits mu se réduira donc à $\frac{\Pi}{g}\omega L u$, et pour l'ensemble des filets elle sera $\frac{\Pi L}{g}\Sigma\omega u$, cette nouvelle somme Σ devant être faite pour tous les éléments ω d'une section transversale. Comme $\Sigma\omega u$ n'est autre chose, d'après la définition même de la vitesse moyenne, que le produit $\frac{1}{4}\pi D^2 U$ de cette vitesse par la section totale, le travail élémentaire de l'ensemble des frottements serait donc

$$-\frac{4b_1 g U^2}{D}dt.\frac{\Pi L}{g}\cdot\frac{1}{4}\pi D^2 U,$$

soit

$$-\frac{4\Pi b_1 L}{D}U^2.\frac{1}{4}\pi D^2 U dt,$$

ou enfin, en nommant dV l'accroissement négatif du volume d'air pendant sa compression, $\frac{4\Pi b_1 L}{D}U^2 dV$. On ne peut intégrer cette quantité sans connaître la relation qui lie U à V pendant que U diminue depuis U_0 jusqu'à zéro. Nous éviterons la recherche de cette relation, en supposant que U^2 conserve constamment sa valeur moyenne $\frac{1}{2}U_0^2$; de sorte que le travail des frottements aurait pour expression le produit de $\frac{2\Pi b_1 L}{D}U_0^2$ par $\int_{V_1}^{V_2} dV$, c'est-à-dire

$$-\frac{2\Pi b_1 L}{D}U_0^2(V_1 - V_2).$$

L'équation suivante existera donc entre les quantités que nous avons considérées :

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{1}{4}\pi D^2 L.U_0^2 = p_1 V_1 \log\text{hyp}\frac{V_1}{V_2}\\ &-\Pi(V_1 - V_2)\left[\frac{p_a}{\Pi}+H-\frac{1}{2}(V_1-V_2)\left(\frac{1}{S}+\frac{1}{\Omega}\right)\right]\\ &+\frac{2\Pi b_1 L}{D}U_0^2(V_1-V_2).\end{aligned}\right.$$

Il faut y joindre la relation donnée par la loi de Mariotte :

(2) $$p_1 V_1 = p_2 V_2.$$

On pourrait donc, si l'on connaissait p_1 et V_1 déterminer les deux inconnues p_2 et V_2, ou réciproquement, si l'on se fixe la valeur de la pression maximum p_2, on déterminera le volume V_1 que l'on doit donner au réservoir d'air.

On procéderait d'une manière semblable dans le cas d'une conduite formée d'un tuyau à diamètre variable, ou dans le cas d'une conduite complexe à plusieurs branches. Chaque terme de l'avant-dernière équation pourrait être remplacé par la somme de plusieurs autres, de forme analogue, dont chacun se rapporterait à une portion du système de tuyaux; mais s'il y avait plusieurs réservoirs d'air, le problème énoncé en dernier lieu serait indéterminé; car pour chaque réservoir en plus du premier on introduirait deux nouvelles inconnues, telles que p_2 et V_2 ou bien V_1 et V_2, tandis qu'on aurait seulement une équation de plus, le théorème de la puissance vive et du travail n'en fournissant toujours en somme qu'une seule.

Voici un exemple numérique. Soit une conduite en fonte ayant une longueur L de 1000 mètres entre le bassin alimentaire et le robinet A', un diamètre constant $D = 0^m,30$, et débitant par seconde un volume $Q = 0^{mc},092$; supposons encore $H = 31^m$, $\Omega = 1^{mq}$ et S assez grand pour que $\frac{1}{S}$ soit négligeable. U_0 sera déterminé par l'équation $\frac{1}{4}\pi D^2 U_0 = Q$, ce qui donne $U_0 = \frac{4Q}{\pi D^2} = 1^m,31$. En prenant le coefficient b_1 pour le cas de la fonte vieille, on aura (n° 47) $b_1 = 0,000529$. La charge consommée dans la longueur de la conduite sera donc

$$\frac{4L}{D} b_1 U_0^2, \quad \text{ou} \quad \frac{4000}{0,30} \cdot 0,000529\,(1,31)^2, \quad \text{ou enfin} \quad 12^m,10;$$

en y ajoutant $\frac{3}{2}\frac{U_0^2}{2g}$, charge entre le bassin alimentaire et la section contractée qui suit l'ouverture de la conduite dans ce bassin (n° 51), soit environ $0^m,13$, on aura $12^m,23$ pour la charge totale employée depuis le point de départ des molécules liquides jusqu'au point A' du tuyau; le niveau piézométrique en A', si la colonne débouchait dans l'atmosphère, s'élèverait à $31^m - 12^m,23$ ou $18^m,77$ au-dessus du plan CD. Ainsi la

pression initiale p_1 sera représentée par une hauteur d'eau de $18^m,77 + \frac{p_a}{\Pi}$ ou de $18^m,77 + 10^m,33 = 29^m,10$, si toutefois on peut négliger la hauteur entre le plan CD (*fig.* 53) et l'axe de la conduite pris à côté de A'. Maintenant supposons qu'on veuille avoir pour pression maximum p_2 le double de p_1 et qu'on demande le volume V_1. On tirera d'abord de l'équation (2) $V_2 = \frac{1}{2} V_1$ et l'on substituera cette valeur dans l'équation (1), où il n'y aura plus que V_1 d'inconnue. Divisant ensuite l'équation par Π et mettant les nombres au lieu des lettres qui les remplacent, on trouvera

$$6,185 = 29,10 V_1 \log\text{hyp}\, 2 - \frac{1}{2} V_1 \left(41,33 - \frac{1}{4} V_1\right) + \frac{1}{4} 12,10 V_1,$$

ou, toute réduction faite,

$$6,185 = 2,53 V_1 + \frac{1}{8} V_1^2;$$

on tire de là

$$V_1 = 2^{mc},20.$$

Dans le cas où l'on se serait donné V_1 et où l'on aurait demandé p_2, l'équation à résoudre aurait été transcendante; un tâtonnement aurait donné sa solution.

100. *Réservoir d'air en communication avec une pompe foulante.* — Les réservoirs d'air sont utilisés dans d'autres circonstances que celles qu'on vient d'étudier. Ainsi, quand une pompe à simple effet refoule de l'eau qui s'élève dans un bassin supérieur par un long tuyau, le volume débité n'étant pas fourni d'une manière continue par le corps de pompe, mais seulement pendant la course du piston dans un sens, la masse d'eau en mouvement dans le tuyau se ralentit pendant que le tuyau marche en sens contraire et produit une aspiration; lorsque ensuite il revient, il faut qu'il rende à cette masse la vitesse qu'elle a perdue par l'action de la pesanteur et des frottements. Cela peut entraîner des variations considérables dans la force résistante que doit vaincre le moteur; de là résultent aussi des secousses dans l'appareil et des pertes plus ou moins sensibles de travail. On évite ces inconvénients en plaçant un réservoir d'air sur le tuyau d'ascension près du point où il pénètre dans le corps de la pompe. Alors l'eau, refoulée à chaque coup de piston, s'emmagasine en partie dans le réservoir, dont le volume diminue pendant cette période; dans la période d'aspiration, l'air comprimé se détend et exerce toujours une pression, en vertu de laquelle l'eau continue à monter presque uniformément dans le tuyau.

Nous nous rendrons compte approximativement de la capacité à donner au réservoir d'air par la considération suivante.

Soient

V le volume engendré par le piston dans une course simple;
V_1 le volume maximum de l'air dans le réservoir;
V_2 le volume minimum;
p_1 et p_2 les pressions correspondantes.

Le volume V d'eau est dépensé par le tuyau d'ascension dans un temps égal à celui que le piston emploie pour faire une double course; donc, si nous admettons que le mouvement dans le tuyau d'ascension est à peu près régulier, la moitié de V seulement sera dépensée pendant la course employée au refoulement, et l'autre moitié sera emmagasinée dans le réservoir d'air. On aura donc

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{2} V.$$

Pour la régularité du mouvement, il faut que la pression varie peu dans le réservoir d'air; nous poserons donc, en appelant n un nombre qu'on prendra plus ou moins fort, suivant le degré de régularité désiré,

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2n}(p_1 + p_2);$$

enfin, on aurait, suivant la loi de Mariotte,

$$p_1 V_1 = p_2 V_2.$$

La résolution de ces équations donne successivement

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{2n+1}{2n-1},$$

$$\frac{V_1}{V_1 - V_2} = \frac{2V_1}{V} = \frac{2n+1}{2},$$

$$V_1 = \frac{1}{4} V(2n+1),$$

ce qui répond au problème proposé. Si par exemple on fait $n = 3$, on aura

$$V_1 = \frac{7}{4} V;$$

alors la pression maximum et la pression minimum seraient entre elles dans le rapport de 7 à 5.

101. *Des cloches à plongeur et des bateaux à air.* — Nous n'avons point ici à décrire en détail toutes les variétés de ces appareils; nous dirons seulement quelques mots d'un bateau à air comprimé, primitivement

imaginé par Coulomb, et employé par M. de la Gournerie, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, pour extraire des roches sous-marines. Nous renverrons les lecteurs qui désireraient des renseignements complets au Mémoire de M. de la Gournerie, inséré dans les *Annales des Ponts et Chaussées,* année 1848, 1er semestre.

L'appareil dont il s'agit consiste essentiellement en une caisse rectangulaire de tôle portée par un bateau, qu'on amène à l'endroit où l'on veut travailler et qu'on charge ensuite de manière à le faire échouer. La caisse, entièrement ouverte à l'eau par sa face inférieure, est divisée en deux compartiments par un plancher horizontal, qui n'établit pas d'ailleurs une séparation complète; celui d'en haut, situé au-dessus du niveau de l'eau extérieure, présente une ouverture par laquelle on fait entrer les hommes, et qu'on bouche ensuite hermétiquement. Alors, au moyen de pompes foulantes, on comprime de l'air dans la caisse. Cet air force peu à peu l'eau de sortir du compartiment inférieur, et celui-ci finit par être mis à sec. Les ouvriers descendent sur le sol et font le travail demandé; après quoi ils remontent sur le plancher, et, laissant échapper l'air comprimé par un robinet, ils peuvent ouvrir l'issue par laquelle ils sont entrés.

Le temps pendant lequel on comprime l'air dans la caisse pour en expulser l'eau étant perdu pour le travail, et celui-ci ne pouvant s'effectuer qu'à marée basse, c'est-à-dire pendant quelques heures seulement de chaque journée, il importe d'employer un moteur assez puissant, qui soit capable de terminer assez vite cette opération préalable. Comme il suffit ici d'une approximation grossière, attendu qu'une erreur relative assez forte sur un temps de quelques minutes serait insignifiante en pratique, il semble qu'on peut se contenter de l'aperçu suivant.

Soient

V le volume primitivement occupé par l'air dans la caisse, à la pression atmosphérique p_a, quand les hommes viennent d'y entrer;
V' le volume total de l'air quand l'eau est complétement expulsée;
S la surface de la coupe horizontale de la caisse;
x la hauteur dont l'eau est descendue intérieurement, à un instant quelconque de l'opération;
h la valeur finale de cette hauteur, c'est-à-dire la quantité dont le dessous de la caisse est immergé relativement au niveau de l'eau ambiante;
Π le poids du mètre cube d'eau.

Quand l'opération est terminée, le résultat obtenu consiste en ce qu'un volume $V'-V$ de liquide est sorti de la caisse et a été remplacé par de l'air. Si un tel effet se produisait au moyen d'un piston solide ayant la section S et découvert à sa partie supérieure, la résistance à vaincre,

rapportée au mètre carré de la surface S, serait la différence Πx des pressions sur les deux côtés; cela serait une force totale $\Pi S x$, dont le travail élémentaire s'exprimerait par $\Pi S x dx$ et le travail total par

$$\Pi S \int_0^h x dx = \frac{1}{2} \Pi S h^2 = \frac{1}{2} \Pi h (V' - V).$$

Mais ici l'air remplit l'objet de ce piston idéal, et comme il se comprime en même temps qu'il chasse l'eau, le travail absorbé par cette compression s'ajoute à celui qu'on vient de calculer, pour augmenter la dépense de force motrice. Le volume V' d'air comprimé ayant passé de la pression atmosphérique p_a, qu'il avait d'abord, à la pression $p_a + \Pi h$, il a fallu (n° 98) employer pour ce fait un travail

$$V'(p_a + \Pi h) \log \text{hyp} \left(1 + \frac{\Pi h}{p_a}\right).$$

Ainsi donc le travail total $\mathfrak{T}$ à fournir par le moteur, abstraction faite de toutes les pertes et résistances accessoires, aurait pour valeur

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \Pi h (V' - V) + V'(p_a + \Pi h) \log \text{hyp} \left(1 + \frac{\Pi h}{p_a}\right).$$

Maintenant supposons que ce travail soit donné uniformément dans un nombre t de secondes par une machine N chevaux, dont on utiliserait toute la puissance : on devrait poser l'équation

$$75 N t = \mathfrak{T},$$

attendu que le cheval vapeur correspond à un travail uniforme de 75 kilogrammètres par seconde. On pourra déduire de cette relation, où $\mathfrak{T}$ est déjà connu, la valeur de N, quand on se fixera le temps t; mais pour avoir égard aux pertes de travail qu'on a négligées, on fera bien d'augmenter ce nombre N en le multipliant par un coefficient plus grand que 1, qui dépend de la perfection des machines employées, et qui, dans les circonstances ordinaires, pourrait être pris égal à $\frac{3}{2}$.

Exemple. — On suppose

$$\frac{\Pi h}{p_a} = 0,225, \quad V = 13^{mc}, \quad V' = 37^{mc}, \quad t = 600''.$$

L'avant-dernière équation devient, en faisant $p_a = 10330^{kil}$,

$$\mathfrak{T} = 10330 \left[\frac{1}{2} \cdot 0,225(37 - 13) + 1,225 . 37 \log \text{hyp}\, 1,225\right]$$
$$= 123000 \text{ en nombres ronds;}$$

la dernière donne alors

$$45000\,N = 123000;$$

d'où

$$N = 2,7.$$

En forçant ce résultat de moitié environ, on prendrait $N = 4$, c'est-à-dire qu'une machine ayant une puissance nominale de 4 chevaux suffirait dans le cas actuel.

Voyons enfin comment on s'assurerait que le volume d'air injecté par seconde, pendant le travail des ouvriers, est suffisant pour empêcher que l'acide carbonique produit par la combustion des lampes et la respiration ne dépasse une proportion nuisible à la santé.

Désignons par

β la proportion, en volume, d'acide carbonique dans l'air extérieur;

γ le rapport entre le volume du même gaz fourni dans un certain temps par les lampes et les ouvriers, et le volume d'air injecté dans le même temps, ces volumes étant mesurés sous la même pression.

Quand les pompes auront donné un certain nombre de coups de piston, l'air primitivement contenu dans la cloche n'ayant qu'un volume très-faible relativement à celui qui aura été introduit, sera pour ainsi dire sans influence sur la proportion définitive d'acide carbonique. Or chaque mètre cube introduit contient par lui-même un volume β de cet acide, auquel se joint le volume γ produit simultanément en dedans de la cloche. Donc chaque mètre cube d'air de la cloche contient le volume $\beta + \gamma$ d'acide carbonique, abstraction faite du mélange avec l'air primitif, dont l'influence devient de plus en plus effacée à mesure que l'opération marche.

Suivant M. Dumas, un homme exhale 306 litres d'acide carbonique par jour, soit $12^{l},75$ par heure; on pourra porter ce nombre à 15 litres, parce que les hommes travaillent et que leur respiration est plus active que dans l'état ordinaire; une lampe qui consomme 45 grammes d'huile par heure transforme dans le même temps 120 litres environ d'oxygène en un pareil volume d'acide carbonique. De ces nombres et de la connaissance du volume d'air injecté par seconde, il est aisé de déduire γ. Ainsi, en supposant 16 hommes avec 4 lampes, on aurait la production suivante d'acide carbonique par heure :

Pour les 16 hommes............	$16 \times 15^{l} = 240$	litres
Pour les 4 lampes..............	$4 \times 120 = 480$	»
Total.............	720	litres

et comme il y a 3600 secondes par heure, cela ferait $0^{l},20$ par seconde.

Si le volume d'air injecté dans ce temps est de 45 litres, on voit que γ aurait pour valeur $\frac{0,20}{45}$, soit 0,0044. Quant à β, d'après M. Boussingault, il ne dépasse pas 0,0006. Enfin, d'après les recherches de M. Leblanc sur l'air confiné, la proportion d'acide carbonique s'élève quelquefois à 0,009 et même à 0,01 dans les salles d'hôpitaux ou dans les réunions nombreuses; ce sont là des quantités qui ne rendent pas l'air dangereux. On pourrait donc sans crainte s'imposer pour condition que $\beta+\gamma$ ne dépassât pas 0,005 ou 0,006. Dans l'exemple numérique cité ci-dessus, et qui se rapporte au bateau employé avec succès par M. de la Gournerie, on avait

$$\beta+\gamma=0,005.$$

CHAPITRE SIXIÈME.

DE LA PRESSION RÉCIPROQUE DES FLUIDES ET DES SOLIDES, PENDANT LEUR MOUVEMENT RELATIF; MESURE DE LA VITESSE DES COURANTS.

§ I. — Action exercée sur un solide par un fluide en mouvement (*).

102. *Généralités.* — Nous avons à nous occuper maintenant de ce qu'on appelle ordinairement la *résistance des fluides.* Un corps solide plongé partiellement ou en totalité dans un fluide, par rapport auquel il est en mouvement, éprouve sur les divers éléments de sa surface des pressions de la part de ce fluide; la résultante de ces pressions, dans les cas les plus usuels, est opposée au mouvement relatif du solide, et à ce point de vue elle constitue par conséquent une véritable résistance : c'est là l'origine de la dénomination donnée à ce genre de phénomènes.

Il serait facile d'évaluer la pression du fluide en chaque point et l'action qu'il exerce sur les éléments composant la surface du solide en contact, si l'on connaissait complétement le mouvement des molécules fluides, et si l'on pouvait en outre faire abstraction de la viscosité : on emploierait à cet effet les équations de l'Hydrostatique modifiées par l'introduction des forces d'inertie, et la recherche dont il s'agit ressemblerait tout à fait à celle de la pression totale supportée par une surface plongée dans un fluide en équilibre. Mais indépendamment de ce que l'influence de la viscosité n'est pas encore bien définie dans tous les cas, les problèmes dont nous parlons se présentent ordinai-

(*) Pour plus de détails sur les matières de ce paragraphe, le lecteur pourra consulter :

1°. L'*Introduction à la Mécanique industrielle*, par M. le général Poncelet, Membre de l'Académie des Sciences, n°s 372 à 455;

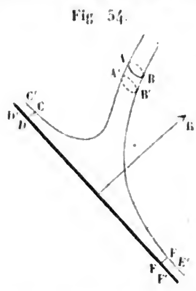
2°. Le *Traité d'Hydraulique* de d'Aubuisson, n°s 200 à 279 et 471 à 478.

rement sans comporter, comme donnée préalable, la connaissance entière du mouvement relatif du fluide par rapport au solide : tout au plus on donne le mouvement absolu du solide et le mouvement que le fluide prendrait si le solide était enlevé. Par exemple, un courant d'eau se meut, et l'on donne la vitesse primitive de ses différents filets; un corps solide est ensuite placé dans ce courant et assujetti au repos absolu : alors le mouvement des filets est dérangé par la présence de ce corps, et pour déterminer la pression résultante, il serait nécessaire de chercher d'abord en quoi consiste le dérangement. Or cette question préliminaire n'a pas encore été résolue. Aussi ne peut-on donner sur tout ce qui concerne la résistance des fluides que des indications encore bien vagues et bien incomplètes.

Dans un seul cas, on a pu arriver à exprimer analytiquement l'intensité de la résistance, en fonction des quantités qui la déterminent : c'est celui que nous allons exprimer ci-après.

103. *Choc d'une veine liquide contre un plan.* — Considérons un liquide sortant d'un vase par un orifice et tombant dans l'air, sous forme d'un jet sensiblement parabolique. Ce jet tombe sur un plan fixe FD (*fig.* 54) qui oblige le liquide à se dévier; l'expérience prouve alors que la veine se gonfle aux environs de sa rencontre avec le plan, mais qu'à une certaine distance, à partir de la section AB, par exemple, son mouvement reste ce qu'il serait sans la présence de l'obstacle; d'ailleurs, en vertu de l'inflexion subie par les trajectoires au-dessous de AB, les filets tendent à devenir parallèles à la surface choquée, et nous supposerons qu'effectivement, en tous les points du périmètre d'un cylindre droit représenté en coupe par EFCD, les molécules liquides se meuvent suivant des parallèles au plan. Le mouvement est supposé arrivé à l'état de permanence. On demande la réaction totale R exercée normalement par le

Fig. 54.



plan sur le liquide, dans l'étendue de la base FD du cylindre EFCD, déduction faite de la pression atmosphérique.

Le problème se résout en appliquant au système matériel formé du liquide compris entre AB et le cylindre EFCD, le théorème général des quantités de mouvement projetées. Soient,

U la vitesse dans la section AB;
α son angle avec la normale au plan;
β l'angle de celui-ci avec l'horizon;
P le poids du liquide ABCDEF;
Ω la section AB de la veine;
Π le poids du mètre cube d'eau;
θ un temps très-court pendant lequel le système est passé de la position ABCDEF à la position A'B'C'D'E'F'.

La quantité de mouvement de la partie intermédiaire A'B'CDEF étant la même au commencement et à la fin du temps θ, disparaît dans l'accroissement de la quantité de mouvement du système durant cet intervalle de temps. Nous projetterons sur la direction même de la force R : alors la projection des quantités de mouvement des molécules qui occupent le volume annulaire CDC'D'EFE'F' disparaît aussi, et l'accroissement total de la quantité de mouvement projetée est égal à la projection, changée de signe, de la quantité de mouvement possédée par ABA'B'. Or la masse de cette tranche a pour valeur $\frac{\Pi}{g}\Omega U \theta$ et sa quantité de mouvement projetée sera $-\frac{\Pi}{g}\Omega U^2\theta\cos\alpha$. Il faut donc égaler $\frac{\Pi}{g}\Omega U^2\theta\cos\alpha$ à la somme des impulsions des forces projetées sur le même axe.

Nous avons d'abord la pesanteur, force constante dont la projection sur R est $-P\cos\beta$, et l'impulsion correspondante $-P\theta\cos\beta$. En second lieu, il y a pression atmosphérique : elle s'exerce d'abord sur tout le contour découvert ACBE; elle existe aussi sur la surface AB, puisque c'est là une section faite dans une veine parabolique (n° 18) : de plus, comme nous ne cherchons pas la réaction totale de la surface FD dans le sens normal, mais seulement l'excès de cette force sur celle qui aurait

lieu si la pression y était partout celle de l'atmosphère, nous devons supposer aussi la pression atmosphérique agissant sur le liquide dans l'étendue FD : ce sera la force qui jointe à R donnerait l'action totale de la surface FD. Enfin, on peut la considérer comme appliquée sur la surface cylindrique CDEF, car les pressions sur cette surface disparaissent en projection, et leur altération ne causera aucune erreur. De cette manière la pression atmosphérique agit sur tout le contour du système matériel ; elle donne donc une résultante et une impulsion nulles. Il ne reste plus après cela que la force R dont l'impulsion est R θ. Donc on a

$$\Pi\,\Omega\,\theta\cos\alpha\,\frac{U^2}{g} = R\,\theta - P\,\theta\cos\beta,$$

d'où l'on tire l'inconnue

$$(1)\qquad R = P\cos\beta + \Pi\,\Omega\cos\alpha\cdot\frac{U^2}{g}.$$

La pression subie par le plan se compose d'abord de la pression atmosphérique et de la même force R prise en sens contraire. Le premier terme P cos β représente la composante normale du poids P, c'est-à-dire la pression normale que recevrait le plan si le système ABCDEF restait posé en équilibre sur lui. L'autre terme est analogue à ce qu'on a nommé en d'autres circonstances la *pression vive* ou pression supplémentaire due à l'existence de la vitesse : on voit que cette pression est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle au carré de la vitesse. Dans le cas d'un plan vertical choqué horizontalement, il faut faire $\beta = 90°$, $\alpha = 0$; alors R devient égale à la seule pression vive, dont l'expression fort simple est $\Pi\,\Omega\,\frac{U^2}{g}$, c'est-à-dire le poids d'un cylindre d'eau ayant pour base la section verticale Ω de la veine et pour longueur le double de la hauteur due à la vitesse U.

La section AB occupe une position indéterminée dans la partie parabolique de la veine ; en la changeant sans sortir de cette partie, on pourrait répéter les mêmes raisonnements pour arriver à l'expression de R, qu'on trouverait égale à $P'\cos\beta + \Pi\Omega'\cos\alpha\,\frac{U'^2}{g}$ (nous appelons P', Ω',

α', U', ce que deviennent P, Ω, α, U par suite du déplacement en question). Il faut nécessairement que cette seconde expression soit égale à la première, ce que rien n'empêche à priori, puisque quatre quantités ont varié simultanément. La vérification directe de ce fait par le calcul est immédiate quand on prend le plan FD vertical. En effet, R se réduit alors à $\Pi\Omega\cos\alpha\cdot\frac{U^2}{g}$ ou à $\frac{\Pi}{g}\cdot\Omega U.U\cos\alpha$; or $\frac{\Pi}{g}$ est un facteur constant; ΩU, dépense de la veine par seconde, est indépendante de la position de la section transversale AB; et $U\cos\alpha$, projection horizontale de la vitesse, est également constante, puisque les molécules liquides ont jusqu'en AB un mouvement parabolique dû à la pesanteur et à une vitesse initiale.

Dans le cas le plus général, la même vérification se fait encore assez simplement comme il suit. Imaginons qu'on mène en un point quelconque : 1° une parallèle à la vitesse U changée de sens; 2° une parallèle à R; 3° une verticale ascendante. Les angles de la seconde ligne avec la première et la troisième ont été nommés ci-dessus α et β; nous nommerons γ celui de U avec la verticale, et A celui des deux plans verticaux contenant U et R. Cela posé, les trois lignes dont nous parlons forment un trièdre dans lequel α, β, γ représentent les angles plans, et A l'angle dièdre opposé à α; on aura donc, suivant la formule principale de la trigonométrie sphérique,

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A,$$

valeur qui, substituée dans l'équation (1), donne

$$R = P\cos\beta + \Pi\Omega\frac{U^2}{g}(\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A).$$

Or la projection horizontale $U\sin\gamma$ de la vitesse étant constante, ainsi que l'inclinaison A et la dépense ΩU, quand la section AB se déplace dans la veine parabolique, le terme $\Pi\Omega\frac{U^2}{g}\sin\beta\sin\gamma\cos A$ est lui-même constant, puisqu'on peut l'écrire $\frac{\Pi}{g}\sin\beta\cos A.\Omega U.U\sin\gamma$, et qu'alors tous ses facteurs sont visiblement indépendants de la section particulière AB qu'on a choisie; il suffit donc de démontrer qu'il en est de même pour l'expression

$$P + \Pi\Omega\frac{U^2}{g}\cos\gamma,$$

qui, à part le facteur constant $\cos\beta$, forme le surplus de la force R. Pour cela nous attribuerons à AB un déplacement infiniment petit $U\theta$, qui lui fera prendre la position A'B', et nous constaterons que l'accroissement

différentiel correspondant

$$dP + \frac{\Pi\Omega U}{g} d.U\cos\gamma$$

de l'expression ci-dessus est nul. Or on a $dP = -\Pi\Omega U\theta$; comme $U\cos\gamma$ représente la projection verticale de la vitesse, on a en outre, par suite de propriétés bien connues, $d.U\cos\gamma = g\theta$; la différentielle en question peut donc s'écrire

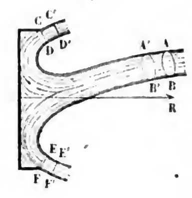
$$-\Pi\Omega U\theta + \frac{\Pi\Omega U}{g}\cdot g\theta,$$

quantité identiquement nulle. Donc enfin la valeur déduite pour R de l'équation (1) est bien indépendante de la position attribuée à la section AB dans la portion parabolique de la veine, comme on devait l'affirmer à priori.

Indépendamment de la pression normale, il doit encore s'exercer un frottement ou force tangentielle; mais cette seconde force est assez petite et on peut la négliger sans erreur sensible.

Quand la veine fluide, au lieu de rencontrer un plan uni, rencontre une surface concave ou un plan muni de rebords, comme dans la *fig.* 55, l'application du théorème des quantités de mouvement, analogue à celle que nous venons de faire tout à l'heure, donnerait un résultat un peu différent. En effet, si l'on considère le système fluide ABCDEF dans cette position et dans la position A′B′C′D′E′F′ qu'il occupe après le temps θ, l'accroissement de la quantité de mouvement de cette masse, en projection sur R, ne sera plus seulement égale à la quantité de mouvement projetée de la tranche ABA′B′; il faudrait encore y ajouter la quantité de mouvement projetée de la tranche annulaire CDEFC′D′E′F′, qui disparaissait précédemment parce que les vitesses de cette tranche étaient normales à R. La pression supportée par la surface sera donc plus grande que sans l'existence du rebord; car en supposant que la même vitesse U′ existe sur toute l'étendue de la section CDEF et que tous les filets traversent cette section avec une même incli-

Fig. 55.



naison α' sur la direction de R, on trouverait dans ce cas

$$R = P\cos\beta + \frac{\Pi}{g}\,\Omega\,U\,(U\cos\alpha + U'\cos\alpha').$$

Si les angles α et α' pouvaient être supposés égaux entre eux, ainsi que les vitesses U et U′, on voit que le rebord aurait pour effet de doubler la pression vive, qui deviendrait $2\frac{\Pi}{g}\Omega U^2\cos\alpha$.

Un fait contraire se produirait dans le cas où le liquide choquerait une surface convexe ou bien un plan trop peu étendu pour le dévier complétement (*fig.* 56). La quantité de mouvement de la tranche annulaire CDEFC′D′E′F′ se retrancherait de celle possédée par ABA′B′ au lieu de s'ajouter, et l'équation précédente serait modifiée par le changement de signe du terme $U'\cos\alpha'$: on aurait donc une force R moindre que celle qui est exprimée par l'équation (1).

Fig. 56.

Dans les premiers instants du choc de la veine liquide contre le plan, l'action supportée par celui-ci doit être plus considérable que lorsque le régime permanent est établi. En effet, quand l'état permanent existe, l'impulsion de la réaction R du plan pendant le temps θ ne doit modifier que la différence algébrique entre les quantités de mouvement projetées des tranches ABA′B′ et CDEFC′D′E′F′ ; tandis que, au commencement du choc, cette impulsion modifie aussi la quantité de mouvement projetée de toute la portion intermédiaire A′B′CDEF.

104. *Pression d'un liquide en mouvement permanent dans une conduite cylindrique contre divers obstacles.* — Les problèmes que nous allons traiter maintenant ont très-peu d'applications possibles en pratique ; ils offrent néanmoins de l'intérêt, en raison des analogies qu'ils peuvent présenter avec d'autres questions plus usuelles que nous examinerons après. Nous supposerons des obstacles de diverses formes dans une conduite cylindrique, où coule un liquide animé d'un mouvement permanent ; il s'agit de calculer la pression totale du liquide sur ces obstacles.

1°. *Cas où l'obstacle est une plaque mince perpendiculaire au courant.*

— Soit CD (*fig.* 57) cette plaque dont le centre de gravité sera supposé situé sur l'axe de la conduite; soient A_0B_0, AB deux sections transversales, l'une en amont, l'autre en aval de la plaque, dans lesquelles on suppose les filets liquides sensiblement parallèles; $A'B'a'b'$, la section contractée minimum qui succède à la déviation forcée des filets par la plaque. Nommons

Fig. 57.

p_0, p, p' les pressions moyennes du liquide dans ces trois sections;
z_0, z, z' les hauteurs de leurs centres de gravité au-dessous d'un même plan horizontal;
U_0, U, U' les vitesses moyennes correspondantes;
Ω la section $AB = A_0B_0$ de la conduite;
S l'aire de la plaque;
Π le poids du mètre cube de liquide.

L'abaissement du niveau piézométrique de A_0B_0 en AB est exprimé (n° 15) par $z - \frac{p}{\Pi} - \left(z_0 - \frac{p_0}{\Pi}\right)$, et comme par suite de l'égalité des sections A_0B_0 et AB on a nécessairement $U = U_0$, le théorème de Bernoulli (n° 15) montre que cet abaissement représente la perte de charge dans l'intervalle. En négligeant le frottement des parois, insensible sur une aussi faible étendue, la perte de charge est due au passage brusque de la vitesse U' à la vitesse U; sa valeur est donc $\frac{(U'-U)^2}{2g}$ (n° 31), et l'on a

$$z - \frac{p}{\Pi} - z_0 + \frac{p_0}{\Pi} = \frac{(U'-U)^2}{2g}.$$

Maintenant, si l'on applique au système liquide A_0B_0AB le théorème de la quantité de mouvement projetée sur l'axe du tuyau, la variation de cette quantité dans un temps très-court θ étant nulle, on en conclura que les forces qui sollicitent le système se font équilibre en projection sur le même axe. Or le poids a pour valeur $\Pi\Omega.\overline{A_0A}$, et α étant l'angle de A_0A avec la verticale, sa projection sera $\Pi\Omega.\overline{A_0A}.\cos\alpha$ ou $\Pi\Omega(z-z_0)$; les pressions $p_0\Omega$ et $p\Omega$ sur A_0B_0 et AB se projettent en vraie grandeur; les pressions latérales ont une projection nulle, en négligeant les frottements; donc enfin, si l'on nomme R la résultante des pressions exercées sur le liquide par les deux faces de la plaque CD, en sens contraire du mouvement, on aura

$$R = \Pi\Omega(z - z_0) + p_0\Omega - p\Omega = \Pi\Omega\left(z - z_0 + \frac{p_0}{\Pi} - \frac{p}{\Pi}\right),$$

ou, en vertu de l'équation précédente,

$$R = H\Omega \frac{(U' - U)^2}{2g}.$$

Afin d'évaluer la vitesse U', soit m le coefficient de la contraction qui a lieu après le passage de la section occupée partiellement par la plaque, section dont l'aire est $\Omega - S$; la section annulaire $A'B'a'b'$ s'exprimera par $m(\Omega - S)$, et le volume dépensé devant y être le même qu'en AB, on posera

$$m(\Omega - S)U' = \Omega U,$$

d'où

$$U' = U\frac{\Omega}{m(\Omega - S)}.$$

En conséquence la valeur de R s'écrira

$$(2) \qquad R = HS.\frac{U^2}{2g}.\frac{\Omega}{S}.\left[\frac{\Omega}{m(\Omega - S)} - 1\right]^2 = KHS.\frac{U^2}{2g},$$

en posant

$$K = \frac{\Omega}{S}\left[\frac{\Omega}{m(\Omega - S)} - 1\right]^2,$$

quantité qui ne dépend que du rapport $\frac{\Omega}{S}$, si, comme cela est probable, m n'est fonction que de ce rapport. On voit donc que, toutes choses égales d'ailleurs, la réaction de la plaque sur le liquide en sens contraire du mouvement, ou la pression du liquide sur la plaque dans le sens même de la vitesse, est proportionnelle au carré de la vitesse; et que, la vitesse et le rapport $\frac{\Omega}{S}$ restant les mêmes, la force en question est proportionnelle à la surface S de la plaque.

On pourrait se demander quelles sont isolément les pressions sur les deux faces de la plaque. La pression sur la face d'aval doit peu différer de $p'S$; car le liquide en contact n'ayant qu'un faible mouvement, appelé *remou*, la pression sur la section $a'b'$ varie suivant la loi hydrostatique, et il en est de même dans la section annulaire $A'B'a'b'$, à cause du parallélisme des filets (nº 18, 4ᵉ règle); d'autre part, les centres de gravité de ces deux sections coïncident et se trouvent à peu près sur l'horizontale passant au centre de gravité de la surface CD : elles ont donc une même pression moyenne p', qui se transmet à CD par le liquide intermédiaire, sensiblement en équilibre. Quant à la pression p', on l'évaluera au moyen du théorème de Bernoulli (nº 15), appliqué dans l'inter-

valle entre A'B'$a'b'$ et AB, qui donnera

$$z - z' - \frac{p}{\Pi} + \frac{p'}{\Pi} - \frac{(U'-U)^2}{2g} = \frac{U^2}{2g} - \frac{U'^2}{2g},$$

ou bien

$$\frac{p'}{\Pi} = z' - z + \frac{p}{\Pi} + \frac{U^2}{g} - \frac{UU'}{g},$$

soit, en mettant à la place de U' sa valeur en fonction de U,

$$\frac{p'}{\Pi} = z' - z + \frac{p}{\Pi} - \frac{U^2}{g}\left[\frac{\Omega}{m(\Omega - S)} - 1\right].$$

La pression totale R' sur la face d'aval de la plaque CD sera donc

$$R' = p'S = S[p - \Pi(z - z')] - \Pi S\frac{U^2}{2g}\cdot 2\left[\frac{\Omega}{m(\Omega - S)} - 1\right].$$

Ensuite, si l'on nomme R'' la pression totale sur la face d'amont, l'action résultante R du liquide serait égale à R'' — R'; ainsi l'on a

$$\begin{aligned} R'' = R + R' = {} & S[p - \Pi(z - z')] \\ & + \Pi S\frac{U^2}{2g}\left[\frac{\Omega}{m(\Omega - S)} - 1\right]\left\{\frac{\Omega}{S}\left[\frac{\Omega}{m(\Omega - S)} - 1\right] - 2\right\}. \end{aligned}$$

On remarquera que $p - \Pi(z - z')$ est la pression hydrostatique moyenne du liquide en contact avec CD, déduite de la pression moyenne en AB, comme si l'équilibre existait; en nommant p_1 cette pression, K' et K'' deux coefficients numériques dépendant de m et de $\frac{\Omega}{S}$, on pourrait écrire

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} R' &= p_1 S - 2K'\Pi S\frac{U^2}{2g}, \\ R'' &= p_1 S + K''\Pi S\frac{U^2}{2g}, \\ K' &= \left[\frac{\Omega}{m(\Omega - S)} - 1\right], \\ K'' &= K'\left(K'\frac{\Omega}{S} - 2\right). \end{aligned}\right.$$

Voici un exemple. On suppose $\frac{\Omega}{S} = 4$, $m = 0,85$; on adopte ici cette valeur de m, intermédiaire entre 0,62 et 1,00, parce que la contraction a lieu seulement tout autour de la plaque, et qu'une partie de filets, dans le voisinage des parois des tuyaux, passe sans déviation notable. On trouve alors

$$K' = 0,08, \quad K'' = 1,14.$$

et par suite

$$R' = p_1 S - 0{,}16 \Pi S \frac{U^2}{2g},$$

$$R'' = p_1 S + 1{,}14 \Pi S \frac{U^2}{2g},$$

$$R = R'' - R' = 1{,}30 \Pi S \frac{U^2}{2g}.$$

On voit que R' est inférieure à la pression hydrostatique, tandis que R'' lui est supérieure; la différence est dans les deux cas proportionnelle au carré de la vitesse. Suivant le langage adopté par Dubuat, la différence en moins, pour la face d'aval, s'appellerait *non-pression;* l'excès, pour la face d'amont, serait la *pression vive;* le terme $p_1 S$ serait nommé *pression morte*.

Ce qui empêcherait de pouvoir tirer dans la pratique un bon parti de ces calculs, si par hasard le problème se présentait, c'est l'incertitude qui reste sur le coefficient m. On pourrait le déterminer expérimentalement en mesurant d'abord, à l'aide du piézomètre différentiel (nº **32**), la perte de charge $\frac{(U' - U)^2}{2g}$, puis la dépense du tuyau, ainsi que son diamètre. Ces dernières données permettraient de calculer U; connaissant U et $\frac{(U' - U)^2}{2g}$, on en tirerait U'; enfin on aurait m par la relation

$$m U' (\Omega - S) = \Omega U.$$

2°. *Pression sur un corps arrondi en amont et plat en aval.* — Rien ne serait changé dans les calculs précédents; seulement m tendrait vers l'unité, sans vraisemblablement pouvoir tout à fait y atteindre. Ainsi, dans ce cas, R se rapprocherait de la limite

$$(4) \qquad R_1 = \frac{\Omega}{S} \left(\frac{\Omega}{\Omega - S} - 1 \right)^2 \cdot \Pi S \frac{U^2}{2g}.$$

En faisant dans l'exemple numérique précédent $m = 0{,}95$, on trouverait par la formule (2)

$$R = 0{,}65 . \Pi S . \frac{U^2}{2g},$$

c'est-à-dire moitié de ce que nous avions trouvé pour la plaque mince.

3°. *Cas d'un corps cylindrique d'une longueur modérée.* — Prenons une conduite horizontale pour plus de simplicité; plaçons à l'intérieur un obstacle également cylindrique dont l'axe coïncide avec celui du tuyau. Si l'obstacle est suffisamment long, les filets liquides, primitivement parallèles dans une section $A_0 B_0$ prise en amont (*fig.* 58), seront déviés et

donneront lieu à une section annulaire $A'B'a'b'$, puis ils redeviendront parallèles dans une section précédant l'autre section annulaire $A''B''EF$, où se termine l'obstacle; enfin il se trouvera, immédiatement à la suite de $A''B''EF$, un élargissement brusque produisant un remou contre la face EF du corps, et en AB les filets, redevenus parallèles, auront repris leur section totale et la vitesse moyenne qu'ils avaient en A_0B_0. Comme on le voit, ce qui distingue ce cas de celui d'une plaque mince, c'est que les filets, après s'être contractés au maximum en $A'B'a'b'$, ne reprennent pas de suite leur section primitive, mais qu'auparavant ils redeviennent parallèles dans une section intermédiaire. Il faut pour cela que le cylindre CDEF ait une longueur notable, qu'on peut évaluer à un minimum de trois fois son diamètre, par analogie avec des expériences dont il sera question tout à l'heure. D'ailleurs nous ne supposons pas la longueur beaucoup plus grande, afin de pouvoir négliger le frottement du liquide contre les parois solides, ou sur lui-même, quand il se meut par filets parallèles.

Fig. 58.

Soient

p_0, p, p', p'' les pressions moyennes dans les sections A_0B_0, AB, $A'B'$, $A''B''$;

U_0, U, U', U'' les vitesses correspondantes;

Ω la section de la conduite, S celle de l'obstacle;

m le rapport de la section annulaire $AB'a'b'$ à la section $A''B''EF$ ou $\Omega - S$;

Π, R, R', R'' les mêmes quantités que précédemment.

Le théorème de la quantité de mouvement projetée, appliqué au liquide A_0B_0AB, comme dans le premier cas, nous donnera

$$R = (p_0 - p)\Omega.$$

Or les vitesses U et U_0 étant identiques, la charge entre A_0B_0 et AB égale la perte de charge dans le même intervalle; la charge, c'est $\frac{p_0}{\Pi} - \frac{p}{\Pi}$, puisqu'il s'agit d'une conduite horizontale; la perte de charge due au passage brusque de la vitesse U' à la vitesse U'', et de la vitesse U'' à la vitesse U, a pour valeur totale (n° 31)

$$\frac{(U' - U'')^2}{2g} + \frac{(U'' - U)^2}{2g}.$$

Donc on aura

$$R = \Pi\Omega\left[\frac{(U'-U'')^2}{2g} + \frac{(U''-U)^2}{2g}\right].$$

De plus, l'invariabilité de la dépense dans les différentes sections exige que l'on ait

$$U' = U\frac{\Omega}{m(\Omega-S)}, \quad U'' = U\frac{\Omega}{\Omega-S};$$

ainsi nous pouvons écrire

$$(5)\quad \begin{cases} R = K'''\Pi S\dfrac{U^2}{2g}, \\ K''' = \dfrac{\Omega}{S}\left[\dfrac{\Omega^2}{(\Omega-S)^2}\left(\dfrac{1}{m}-1\right)^2 + \left(\dfrac{\Omega}{\Omega-S}-1\right)^2\right]. \end{cases}$$

On arrive donc à une expression de R ayant la même forme que pour une plaque mince; seulement, il est aisé de constater que le coefficient K''' est plus faible que K, lorsque $\frac{\Omega}{S}$ et m sont supposés les mêmes; en effet, si l'on pose

$$\frac{\Omega}{(\Omega-S)}\left(\frac{1}{m}-1\right) = a, \quad \frac{\Omega}{\Omega-S}-1 = b,$$

il en résultera

$$K = \frac{\Omega}{S}(a+b)^2 \quad \text{et} \quad K''' = \frac{\Omega}{S}(a^2+b^2);$$

donc K est plus grand que K''', car m étant inférieur à 1 et Ω supérieur à S, a et b sont des nombres positifs.

Si nous faisons encore $\frac{\Omega}{S} = 4$ et $m = 0{,}85$, nous trouverons $K''' = 0{,}67$, tandis que nous avions $K = 1{,}30$.

En ajoutant une proue au cylindre, on pourrait rendre m plus rapproché de l'unité; alors le coefficient K''' diminue. Ainsi les valeurs $\frac{\Omega}{S} = 4$ et $m = 0{,}95$ conduisent à $K''' = 0{,}46$.

Nous pourrions également, comme nous l'avons fait ci-dessus, calculer à part la pression R′ sur la face d'aval EF et en conclure la pression R″ sur la face d'amont. On aurait les équations

$$R' = p''S,$$

$$\frac{p''}{\Pi} = \frac{p}{\Pi} + \frac{U^2}{g} - \frac{UU''}{g} = \frac{p}{\Pi} - \frac{U^2}{g}\left(\frac{\Omega}{\Omega-S}-1\right),$$

$$R'' = R + R',$$

qui donneraient la solution immédiate du problème et conduiraient à des

expressions de R' et R" pareilles à celles que nous avons déterminées, sauf le changement des coefficients numériques K' et K".

En résumé, on voit que la pression totale supportée par l'obstacle, dans le sens de la vitesse du liquide, est proportionnelle : 1° au carré de la vitesse; 2° à l'aire que l'obstacle intercepte dans le courant; 3° à un coefficient qui paraît dépendre seulement du rapport de cette aire à l'aire totale de la section transversale du tuyau. Une plaque mince supporte une action plus forte qu'un corps de même section, mais de longueur sensible; dans tous les cas, l'action diminue par l'addition d'une proue du côté d'amont. La pression du courant sur la face d'amont, comme on l'a vu par un exemple, est supérieure à la pression hydrostatique, et le contraire a lieu sur la face d'aval. Ce sont là des faits qui offrent un certain intérêt théorique, malgré le peu d'application qu'il est possible d'en faire, parce qu'ils sont tout à fait analogues aux résultats observés par Dubuat sur des corps plongés dans un courant indéfini.

105. *Remarques générales sur la pression d'un liquide indéfini contre divers obstacles, dans le mouvement relatif uniforme.* — Nous supposerons un canal ou réservoir découvert dans lequel se trouvent un corps solide et un liquide en mouvement relatif; les dimensions du premier sont très-petites, et pour ainsi dire nulles, en comparaison de celles du second; on demande la résultante des pressions éprouvées par le solide, ou simplement la différence entre cette résultante et celle qui se produirait, si la pression du liquide variait d'un point à l'autre suivant la loi hydrostatique.

Les deux cas paraissant de prime abord les plus simples sont celui d'un liquide en mouvement rectiligne et uniforme, dans lequel on placerait un obstacle immobile, et celui d'un corps qui reçoit une translation rectiligne et uniforme dans un liquide primitivement en repos. Dubuat a trouvé par expérience que, à égalité de vitesse relative et avec un même solide, la pression totale était plus forte dans le premier cas que dans le second. Le liquide sur lequel il opérait était de l'eau. Il a expliqué le résultat auquel il arrivait, en disant que l'eau en repos se laissait plus facilement diviser que l'eau en mouvement. Mais cette explication paraît contraire aux idées généralement reçues en Mécanique. On fait dépendre l'action mutuelle de deux molécules, seulement de leurs masses et de leur distance, quand la température et l'état électrique sont

supposés invariables ; or dans des mouvements relatifs identiques, les masses et les distances restent les mêmes : il faudrait donc supposer, pour trouver une action mutuelle différente, un changement d'électricité ou de chaleur, ce qui dans l'espèce n'est guère probable. Il nous semble plus conforme à la vérité de supposer que dans les diverses expériences de Dubuat les mouvements relatifs n'étaient pas identiques ; et voici en effet, d'après M. Belanger, comment on peut le concevoir. Les courants d'eau sur lesquels opérait Dubuat se composaient, comme tous les courants naturels, des filets animés de vitesses décroissantes, depuis une valeur maximum V applicable au filet superficiel central, jusqu'à une valeur minimum W qu'on observe près des bords. Un corps étant placé immobile près de la surface du courant et dans son milieu, si l'on veut, sans changer leur mouvement relatif, réduire au repos le filet possédant la vitesse maximum V, il faudra imprimer à tout le système une vitesse V en sens contraire ; alors on aurait un solide se mouvant avec la vitesse V, non pas dans un liquide stagnant, mais dans un courant dont les filets auraient des vitesses dans le même sens que celle du corps, croissantes depuis le milieu jusqu'au bord, entre les limites zéro et V — W. Or, en comparant la pression éprouvée par le corps AB transporté avec la vitesse V dans ce courant fictif, avec celle qu'il éprouverait s'il était transporté de la même manière dans un liquide stagnant, on trouve une cause qui tend à rendre la première supérieure à la seconde : c'est que le vide laissé par le corps pendant son mouvement relatif devant être sans cesse rempli par du liquide qui passe de l'avant à l'arrière, ce liquide trouve sur son passage, au lieu de filets immobiles, des filets possédant des vitesses en sens contraire, qui contrarient ce passage. Le mouvement du corps produit donc un plus grand trouble dans le courant fictif qu'il n'en produirait dans le liquide stagnant ; le corps exerce donc une force plus grande, et par conséquent il doit éprouver plus de résistance.

Il n'y a donc pas encore de raison suffisante, malgré les expériences de Dubuat, pour ne pas admettre que la pression totale éprouvée par un corps solide qui se déplace dans un milieu fluide reste la même quand on imprime une même

vitesse à tout le système, c'est-à-dire que pour un corps et un fluide donnés, l'action mutuelle dépend uniquement du mouvement relatif : seulement, on voit qu'il faut examiner avec soin deux expériences avant de déclarer que le mouvement relatif est le même dans les deux. Moyennant cette précaution, il est clair qu'en donnant à tout le système un mouvement commun, on pourra toujours rentrer dans le cas où le corps solide serait immobile. Cela posé, considérons un obstacle fixe AB placé dans un courant liquide indéfini, composé de filets primitivement parallèles et à peu près rectilignes (*fig.* 59).

Fig. 59.

Du côté de l'amont les filets fluides sont déviés et décrivent des courbes qui présentent leur convexité à AB, sauf peut-être dans les environs des bords A et B. Au contraire, du côté de l'aval les filets tendent à reprendre leur direction première; hors de l'espace occupé par le remou, ils décrivent des courbes présentant leur concavité au corps AB. Il est impossible, pour avoir l'action totale supportée par ce corps de la part du liquide, d'appliquer ici la méthode qui nous a servi au numéro précédent; les filets voisins de AB sont en effet les seuls qui éprouvent des changements dans la direction et l'intensité de la vitesse, et comme nous ne connaissons pas d'avance les sections transversales du courant partiel formé par les filets dérangés, nous ne pourrions pas évaluer la perte de charge d'une molécule pendant son trajet de l'amont à l'aval. La théorie donne cependant encore quelques indications bonnes à connaître.

D'abord, si l'on étudie comment varient les pressions du liquide, du côté d'amont, en partant d'un point qui appartient à la portion non altérée du courant et cheminant vers AB, la loi hydrostatique sera modifiée par l'introduction des forces d'inertie et de celles que produit la viscosité. Nous négligerons ces dernières, et parmi les forces d'inertie, nous ferons en sorte d'avoir seulement à tenir compte des forces centrifuges : il suffira pour cela de cheminer dans le liquide en suivant des perpendiculaires aux directions des filets. On voit alors, dans un même plan horizontal, la pression augmenter à mesure

qu'on se rapproche de l'obstacle, parce que les forces centrifuges y concourent. Du côté d'aval, les forces centrifuges vont au contraire en s'éloignant de l'obstacle, de sorte que la pression calculée pour une série de points au même niveau varie en sens inverse. Maintenant imaginons qu'on circonscrive au corps AB un cylindre parallèle à la direction du courant, et que ce corps soit ainsi divisé par la courbe de contact en deux parties, l'une d'amont, l'autre d'aval; faisons abstraction des pressions hydrostatiques, faciles à rétablir quand on a besoin d'en tenir compte, et nommons

R″ la résultante des actions dues aux forces centrifuges, qui s'exercent sur la partie d'amont;

R′ la résultante analogue pour la partie d'aval.

Ce qui ressort déjà de l'explication dans laquelle nous venons d'entrer, c'est que la force R″ presse réellement le corps, tandis que R′ tend à le tirer; de sorte que l'action totale du courant doit en général surpasser l'action hydrostatique du côté d'amont, et lui rester inférieure du côté d'aval (*). R″ et R′ sont ce que Dubuat nomme la *pression vive* et la *non-pression*.

Afin d'arriver à connaître, autant que possible, les forces R″ et R′, supposons approximativement que la vitesse soit constante et égale à U pour tous les filets, et que la figure de ceux-ci ne change pas pour un même corps plongé dans des courants inégalement rapides; les forces centrifuges rapportées à l'unité de masse et les pressions supplémentaires qu'elles produisent contiendront le seul facteur variable U^2 : donc la pression vive et la non-pression sont proportionnelles au carré de la vitesse du courant. Elles doivent aussi être proportionnelles au poids Π du mètre cube de liquide; car si nous parcourons un élément de chemin horizontal dr, sur le prolon-

(*) Dans les circonstances ordinaires, les résultantes R″ et R′, aussi bien que les actions hydrostatiques correspondantes sur les deux parties du corps, ont une direction commune, parallèle au courant : alors cette conséquence devient évidente. Mais il pourrait se faire que la coïncidence de direction n'eût pas lieu, et c'est pour cela que notre affirmation n'est pas absolue.

gement du rayon de courbure r d'une trajectoire, la variation correspondante dp de la pression sera (n° 16) $dp = \frac{\Pi}{g}\frac{U^2}{r}dr$, quantité proportionnelle à Π, toutes choses égales d'ailleurs. L'expérience montre encore que deux corps solides semblables étant semblablement placés dans un courant indéfini, les filets déviés ont des figures semblables; on en conclut qu'aux points homologues des deux corps, la pression par unité de surface, spécialement due aux forces centrifuges, reste la même. En effet, quand on passe d'un système à l'autre, les quantités r et dr, ci-dessus considérées, sont multipliées toutes deux par le rapport de similitude, et dp ne change pas. Ainsi, pour ces deux corps, R′ et R″ seront proportionnelles au carré des côtés homologues, ou, ce qui revient au même, aux aires d'une section occupant dans les deux corps une position semblable.

En résumé, d'après ce qui précède, on peut poser

$$R'' = M''\Pi S\frac{U^2}{2g},\quad R' = M'\Pi S\frac{U^2}{2g},$$

en désignant par S l'aire d'une section faite dans le corps (par exemple la surface que couvre la projection du corps sur un plan perpendiculaire au courant), et par M″ et M′ deux constantes qui dépendent de la forme du corps, de la position attribuée à la section qu'on fait entrer comme facteur, et de l'orientation du corps dans le courant. Si l'on veut avoir l'action totale spécialement due aux forces centrifuges sur l'ensemble du corps, il est clair qu'il suffit de chercher la résultante de R″ et R′, ce qui donnerait une valeur de la forme $M\Pi S\frac{U^2}{2g}$, la lettre M désignant une nouvelle constante. Dans le cas le plus fréquent, où R′ et R″ sont parallèles au courant, leur résultante est égale à leur somme arithmétique et l'on a simplement

$$M = M'' + M'.$$

Voici maintenant sur ce sujet quelques résultats d'expériences.

106. *Expériences de Dubuat sur des prismes entièrement plongés dans un courant d'eau.* — L'appareil employé par cet observateur consistait essentiellement en une boîte de fer-blanc, ayant la forme d'un parallélipipède rectangle; la base de ce parallélipipède était un carré de $0^m,325$ de côté, et son épaisseur était de $0^m,009$. Une des bases carrées de cette boîte se plaçait normalement au courant, tantôt du côté d'amont, tantôt du côté d'aval; cette base était percée de petits trous régulièrement distribués, qu'on pouvait ouvrir chacun isolément, ou tous à la fois.

Supposons maintenant qu'il s'agisse de mesurer la pression vive sur la face d'amont d'une plaque mince. La base percée de la boîte sera tournée directement contre le courant, en laissant tous les trous ouverts; alors l'eau entrera par les trous, et si l'intérieur communique avec un tube piézométrique, elle montera et se maintiendra en équilibre dans ce tube à une hauteur qui dépassera le niveau extérieur. La différence représentera, en colonne d'eau, l'excès moyen de la pression par unité de surface sur la pression hydrostatique, aux points où sont percés les trous, c'est-à-dire dans la surface entière de la base choquée par le courant. En n'ouvrant qu'un seul trou, on pouvait déterminer la pression par unité de surface en chaque point de cette base, et, par suite aussi, la pression totale; ce qui permettait de contrôler la moyenne obtenue en laissant tous les trous ouverts. L'expérience donnait ainsi R''; connaissant U, Π, S, il était aisé d'en déduire M''. On procédait de la même manière à l'égard de la non-pression, qui se manifestait par un abaissement du liquide dans le tube. Enfin, on pouvait augmenter la longueur de la boîte, en lui ajoutant des prismes de bois de diverses longueurs et de $0^m,325$ d'équarrissage, ce qui donnait le moyen de chercher M'' et M' pour des prismes plus ou moins allongés.

Dubuat a opéré d'abord sur la boîte seule, qui représentait une plaque mince, puis sur un cube, et enfin sur un prisme ayant pour longueur le triple du côté de la section transversale, soit $0^m,975$. La vitesse U du courant était de $0^m,975$ par seconde. Il a trouvé pour les trois prismes la valeur de M'' égale à 1,19, c'est-à-dire une même pression vive; mais le coefficient M' de

la non-pression a varié et a été

Pour la plaque............ 0,67,
le cube............ 0,27,
le prisme allongé ... 0,15.

Ainsi le coefficient M entrant dans l'action totale du courant, ou $M'' + M'$, aurait les valeurs correspondantes 1,86, 1,46, 1,34.

En faisant mouvoir la plaque dans un liquide stagnant, Dubuat a trouvé $M'' = 1{,}00$ et $M' = 0{,}43$; admettant ensuite que cette dernière valeur devrait subir dans le cas actuel des réductions analogues à celles trouvées tout à l'heure, quand il s'agissait du cube ou du prisme, il a pris pour le premier

$$M' = 0{,}43 . \frac{0{,}27}{0{,}67} = 0{,}17,$$

et pour le second

$$M' = 0{,}43 . \frac{0{,}15}{0{,}67} = 0{,}10 :$$

Ainsi $M'' + M'$ serait successivement 1,43, 1,17, 1,10, nombres notablement moindres que ceux qui se rapportent aux mêmes corps immobiles dans un courant.

Nous avons donné plus haut une explication plausible de ce résultat singulier. D'ailleurs les expériences de Dubuat ne sont pas à l'abri de toute cause d'incertitude; il serait à désirer qu'on les répétât avant d'admettre le fait comme parfaitement démontré.

107. *Résultats relatifs aux corps prismatiques flottants, garnis de proues et de poupes.* — Par analogie avec ce qu'on vient de voir et aussi en vertu des considérations générales du n° 105, on représentera encore ici l'action totale R du liquide, exercée dans le sens de sa vitesse relative, par la formule

$$R = M \Pi S \frac{U^2}{2g},$$

dans laquelle M désigne un coefficient numérique variable avec la forme et les dimensions du corps, Π le poids du mètre cube de liquide, S la section de la partie plongée, U la vitesse relative.

Si la longueur du prisme est au moins trois fois la dimension moyenne de la section S ou $3\sqrt{S}$, et que ce corps soit en mouvement dans une eau tranquille, d'après les expériences de Dubuat (n° 106), on peut prendre

$$M = 1,10.$$

Avec une poupe suffisamment aiguë, on diminuerait beaucoup la non-pression, et l'action totale tendrait à se réduire à la pression vive ; ainsi l'on aurait à peu près (n° 106)

$$M = 1,00.$$

Si le prisme est en outre muni d'une proue formée d'un demi-cylindre vertical de même largeur que lui, ou de deux plans verticaux se coupant sous un angle voisin de 60 degrés, la résistance est réduite à moitié environ ; on posera donc

$$M = 0,50.$$

Si la proue est formée par le prolongement des faces latérales, coupées en dessous par un plan incliné de 30 degrés environ sur l'horizon, on trouve une nouvelle diminution, et

$$M = 0,33.$$

Enfin, suivant Navier, dans le cas d'un corps ayant la forme d'un navire, si S désigne la partie plongée de la section maximum, dite maître-couple, on pourrait avoir

$$M = 0,16.$$

On comprend aisément que ces nombres n'ont rien d'absolu et qu'ils peuvent varier en vertu de circonstances secondaires dont il serait à peu près impossible de tenir compte. La loi d'après laquelle la résistance R serait, pour un même corps, proportionnelle au carré de la vitesse, donne même lieu à quelques doutes : d'après certains auteurs, quand un corps flottant se meut de plus en plus vite dans une eau tranquille, la section plongée S diminue, en sorte que si l'on conserve la même valeur, il faut prendre M de plus en plus petit, ou encore diminuer l'exposant de U. En d'autres termes, si R contient le facteur U^2, il doit aussi avoir un autre facteur décroissant

avec U, dont l'influence deviendrait sensible dans les grandes vitesses.

108. ***Action supportée par un corps, de la part d'un milieu gazeux.*** — Si dans toutes les questions traitées du n° 103 au n° 106 inclusivement on substituait un gaz au liquide, ce serait une nouvelle complication introduite dans la théorie, car il faudrait tenir compte des changements de densité d'un point à l'autre du gaz. En général, comme ces changements sont peu sensibles, on peut pratiquement conserver les mêmes formules, en ayant soin de mettre pour Π le poids par mètre cube qui convient au milieu gazeux dont on s'occupe. Toutefois il faut restreindre l'application de cette règle au cas des vitesses modérées, car dans le cas contraire la densité pourrait subir de fortes altérations dans les environs de l'obstacle, et l'on se tromperait beaucoup en les négligeant.

109. ***Calcul théorique de la pression totale supportée par une surface placée dans un courant liquide ou gazeux.*** — La pression supportée par l'un des éléments de la surface peut toujours être regardée comme se composant de la pression hydrostatique et d'une pression spécialement due à la vitesse relative du fluide. On se propose seulement ici de calculer la résultante des pressions produites par la vitesse, parce que les autres sont connues d'avance et qu'il est facile d'en tenir compte après coup.

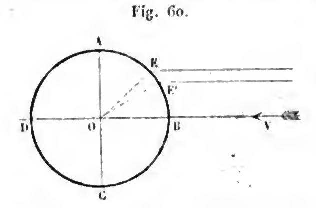
Pour effectuer ce calcul, on a souvent fait usage d'une hypothèse qui consiste à considérer chaque filet fluide comme allant isolément rencontrer un élément de la surface, sur lequel il produirait une pression analogue à celle d'une veine fluide contre un plan choqué par elle (n° 103); la partie de cette pression spécialement due à la vitesse serait proportionnelle : 1° à la section transversale du filet; 2° au carré de sa vitesse relative; 3° au cosinus de l'angle que cette vitesse fait avec la normale à l'élément de surface. Cela étant admis, tout se réduit à un simple exercice de calcul intégral. Nous allons en donner trois exemples simples.

Considérons d'abord une surface plane S placée dans un courant fluide dont la vitesse U fait avec la normale au plan un angle α. Un filet de section ω produira une pression $n\omega U^2 \cos\alpha$, n étant une constante; la pression totale s'obtiendrait en faisant une somme de quantités analogues pour tous les filets qui rencontrent la surface, et comme n, U, α ne varient pas de l'un à l'autre, cette somme sera le produit de $nU^2 \cos\alpha$ par la section totale $S\cos\alpha$ du courant détourné par le plan, ou $nU^2 S\cos^2\alpha$. C'est

ce qu'on exprime en disant que dans le cas dont il s'agit, la pression totale varie comme le carré du sinus de l'angle sous lequel la surface S est rencontrée par le courant.

Prenons en second lieu un cylindre circulaire de hauteur h et de rayon r; soient ABCD (*fig.* 60) sa section droite; OE, OE′ les traces de deux plans diamétraux infiniment voisins, dont le premier fait un angle x avec le plan AC perpendiculaire au courant; U la vitesse de ce courant relativement au cylindre. L'élément de surface cylindrique projeté sur EE′ est $h.\overline{EE'}$ ou $hrdx$; il intercepte des filets dont la section totale est $hrdx \cdot \sin x$.

Fig. 60.



Ces filets font d'ailleurs avec le rayon OE un angle complémentaire de x, ou $\frac{\pi}{2} - x$; ainsi la pression exercée sur l'élément dont il s'agit a pour valeur, en désignant par n un coefficient constant, $nhrdx . U^2 \sin^2 x$, et comme elle est dans la direction EO, on peut la décomposer en deux autres, savoir :

$nhrU^2 \sin^3 x\,dx$, suivant une parallèle à BO;

$nhrU^2 \sin^2 x \cos x\,dx$, suivant la direction AO.

La somme des premières composantes dans l'étendue AC rencontrée par le courant sera

$$nhrU^2 \int_0^\pi \sin^3 x\,dx = nhrU^2 \left(\int_0^\pi \sin x\,dx - \int_0^\pi \sin x \cos^2 x\,dx \right)$$
$$= nhrU^2 \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3} nhrU^2.$$

La somme des autres composantes s'exprime par

$$nhrU^2 \int_0^\pi \sin^2 x \cos x\,dx,$$

quantité identiquement nulle. Ainsi l'action totale du courant se réduirait à une force $\frac{4}{3} nhrU^2$, dirigée dans le sens de la vitesse U. Si le plan diamétral AC avait été mis à la place du cylindre, l'action totale aurait été dans ce cas $n.2hr.U^2$, c'est-à-dire moitié en sus de la précédente.

Supposons enfin que le cercle tracé dans la *fig.* 60 représente une sphère exposée à un courant, qui possède relativement à elle la vitesse U;

OB est le rayon parallèle à cette vitesse. Les notations seront les mêmes que dans le problème précédent. Les rayons OE, OE', en tournant autour de OB, engendreraient deux cônes circulaires, interceptant une zone EE' sur la sphère. La surface de cette zone est

$$2\pi r \cos x . r dx \quad \text{ou} \quad 2\pi r^2 \cos x\, dx;$$

les filets la coupent tous sous un angle x, et par conséquent la somme des actions qu'elle supporte sera

$$n . 2\pi r^2 \cos x dx . U^2 \sin^2 x.$$

Ces actions sont distribuées symétriquement autour de la zone, suivant les rayons tels que OE; il est visible que la somme de leurs projections sur un axe quelconque perpendiculaire à U est nulle, et il suffit pour avoir leur résultante de les projeter sur la direction de U, ce qui donne

$$2 n\pi r^2 U^2 \sin^3 x \cos x\, dx.$$

Il faut ensuite faire la somme des résultantes analogues pour toutes les zones, quand x varie de o à $\frac{\pi}{2}$, et on trouve alors pour valeur de la pression totale

$$2 n \pi r^2 U^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x\, dx \quad \text{ou} \quad \frac{n}{2} . \pi r^2 U^2,$$

c'est-à-dire moitié de ce que supporterait un grand cercle de la sphère directement exposé au courant.

Il faut reconnaître que ces calculs, et les autres qu'on pourrait faire en partant des mêmes hypothèses, reposent sur une pure fiction. D'abord on ne tient aucun compte de la non-pression ou diminution de pression vers l'aval; ensuite les divers filets ne se comportent pas comme s'ils étaient isolés, et si l'un d'eux est dévié, la pression qu'il exerce sur son voisin oblige également celui-ci de se détourner, et l'empêche d'agir directement sur la surface. Par conséquent, on ne sera nullement surpris de trouver les résultats de ces hypothèses en désaccord avec les faits. Ainsi nous avons trouvé qu'un cylindre supporte les deux tiers de la pression exercée sur son plan diamétral, et que pour la sphère le rapport analogue se réduit à $\frac{1}{2}$. Borda, dans diverses expériences sur l'action des courants d'air, a trouvé que ces rapports sont respectivement o,57 et o,41; le rapport expérimental, pour d'autres surfaces, a été quelquefois supérieur au rapport calculé, et l'écart dans un sens ou dans l'autre peut atteindre d'assez grandes valeurs.

La loi suivant laquelle varierait la pression du fluide pour une surface

plane exposée à un courant, sous diverses inclinaisons, n'est pas non plus vérifiée par l'expérience. En appelant i l'angle des filets fluides avec le plan, c'est-à-dire le complément de celui qu'ils font avec la normale, nous avons trouvé tout à l'heure que la pression totale était proportionnelle à $\sin^2 i$. D'après Hutton, l'exposant du sinus serait variable avec i, et au lieu de $\sin^2 i$, on devrait prendre, quand il s'agit de courants d'air, $\sin i^{1,84\cos i}$ (*).

Cependant, malgré les imperfections de cette théorie, nous avons cru devoir en donner une idée, parce que souvent, à défaut d'expériences sur des corps semblables à ceux que l'on considère, on n'a pas d'autre moyen d'évaluer la pression totale d'un courant fluide sur un obstacle.

(*) Voir l'ouvrage intitulé : *Tracts on mathematical and philosophical subjets, etc.; by Charles Hutton; London*, 1812. M. Terquem a donné une traduction française de la partie de l'ouvrage à laquelle nous renvoyons ici, sous le titre de *Nouvelles expériences d'artillerie*.

La fonction $\sin i^{1,84\cos i}$ est d'un calcul pénible, malgré l'emploi des tables logarithmiques. On la remplacerait avantageusement par la fonction plus simple

$$\sin^2 i + 0,2\frac{\sin^2 2i}{1+\cos^2 i} \quad \text{ou bien} \quad \sin^2 i\,\frac{2,8 - 1,8\sin^2 i}{2-\sin^2 i}$$

qui en reproduit les valeurs avec une exactitude remarquable, entre les limites $i = 0$ et $i = \frac{\pi}{2}$. C'est ce que montre le tableau suivant, dans lequel nous désignons $\sin i^{1,84\cos i}$ par A, et l'expression substituée par B.

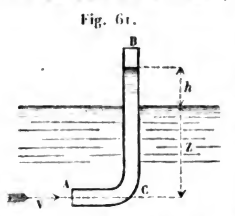
ANGLES i	$\sin^2 i$	A	B	ANGLES i	$\sin^2 i$	A	B
0°	0,0000	0,0000	0,0000	50°	0,5868	0,7296	0,7241
5	0,0076	0,0114	0,0106	55	0,6710	0,8102	0,8039
10	0,0302	0,0419	0,0420	60	0,7500	0,8760	0,8700
15	0,0670	0,0905	0,0929	65	0,8214	0,9263	0,9210
20	0,1170	0,1564	0,1609	70	0,8830	0,9616	0,9570
25	0,1786	0,2378	0,2430	75	0,9330	0,9839	0,9799
30	0,2500	0,3314	0,3357	80	0,9698	0,9951	0,9925
35	0,3290	0,4327	0,4347	85	0,9924	0,9994	0,9984
40	0,4132	0,5364	0,5354	90	1,0000	1,0000	1,0000
45	0,5000	0,6370	0,6333				

Comme on le voit, l'écart entre A et B reste toujours inférieur à 0,0063, tandis que $A - \sin^2 i$ atteindrait jusqu'à 0,1428.

§ II. — Moyens employés pour observer les vitesses des fluides. — Jaugeage des courants.

110. *Du tube de Pitot.* — Le tube de Pitot, ainsi appelé du nom de son inventeur (*), consiste en un simple tube AB (*fig.* 61) recourbé, ouvert par les deux bouts, dont la plus grande branche BC est placée verticalement, pendant que l'autre AC est directement exposée à l'action d'un courant liquide dont on veut mesurer la vitesse aux environs du point A. Le liquide entre par l'ouverture A et s'élève dans le tube à une hauteur h au-dessus du niveau extérieur. Nommons

Fig. 61.



- z la hauteur du centre de l'ouverture A au-dessous du même niveau ;
- p la pression moyenne du liquide sur le plan A, rapportée à l'unité de surface, abstraction faite de la pression atmosphérique ;
- Π le poids par mètre cube du liquide ;
- V la vitesse demandée.

Puisque le liquide est sensiblement en équilibre dans le tube, on aura

$$(1) \qquad p = \Pi(h + z);$$

d'un autre côté, par les indications théoriques et expérimentales données au paragraphe précédent, nous savons que la pression moyenne par unité de surface sur le plan A dépasse la pression hydrostatique d'une quantité proportionnelle au carré de la vitesse V, et nous poserons par conséquent

$$(2) \qquad p = \Pi\left(z + M''\frac{V^2}{2g}\right),$$

M″ étant un coefficient numérique dont les expériences de

(*) *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, année 1732.

Dubuat (n° 106) semblent fixer la valeur à 1,19. La soustraction membre à membre des équations (1) et (2) donne

$$(3) \qquad h = M'' \frac{V^2}{2g} = 1,19 \frac{V^2}{2g}.$$

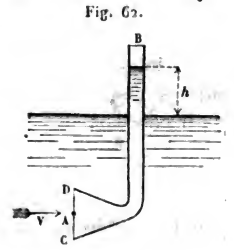
Dubuat a opéré directement sur un tube en fer-blanc de $0^m,04$ de diamètre extérieur, dont la branche horizontale avait environ $0^m,35$ de longueur. Le niveau de l'eau dans le tube était indiqué par un flotteur. En faisant mouvoir cet appareil dans une eau tranquille avec diverses vitesses, Dubuat a trouvé des valeurs de M″ un peu variables, comme l'indique le tableau ci-dessous :

Vitesse du tube par 1″...	$0^m,78$,	$1^m,08$,	$1^m,80$,
Valeur de M″....	1 ,22,	1 ,11,	1 ,08.

On peut admettre que ces inégalités de M″ ont peu d'importance en pratique, car la moyenne 1,15 ne s'écarte du maximum 1,22 et du minimum 1,08 que de $\frac{1}{15}$ au plus, ce qui n'entraînerait qu'une erreur proportionnelle de $\frac{1}{30}$ sur la vitesse. Mais on reconnaîtra toujours, contrairement à une opinion quelquefois émise, que le coefficient M″ n'est pas égal à 1, et qu'il y a nécessité de le déterminer par des essais préalables, avant de pouvoir se servir d'un instrument.

Pour rendre l'instrument plus sensible, Dubuat a proposé de donner à la branche horizontale la forme d'un entonnoir (*fig.* 62); la base CD de cet entonnoir est percée d'un seul trou A vers son centre. Cette disposition a pour effet de rendre plus forte la pression qui fait monter l'eau dans le tube; c'est-à-dire que, à vitesse égale, la hauteur h sera plus grande et plus facile à observer. Avec un instrument ainsi construit, Dubuat a trouvé un coefficient M″ égal à 1,50;

Fig. 62.



ainsi

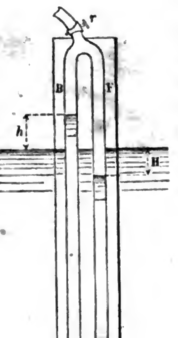
$$h = \frac{3}{2}\frac{V^2}{2g},$$

ou bien

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{2}{3}h.$$

111. *Tube de Pitot perfectionné par MM. Darcy et Baumgarten.* — L'appareil dont nous allons parler a été primitivement conçu par M. Darcy; il a été construit et modifié dans quelques détails par M. Baumgarten. Il se compose essentiellement de deux tubes analogues à celui que représente la *fig.* 61; les deux branches verticales, faites en verre, s'élèvent dans un plan parallèle au fil du courant; les deux branches horizontales sont en cuivre, et l'une d'elles est toujours dirigée dans le fil du courant, en sens opposé (comme dans la *fig.* 61), pendant que l'autre peut recevoir des ajutages de diverses formes. Ces ajutages sont orientés dans le courant de manière à ce qu'il se produise sur leur entrée une non-pression. Par exemple, dans un modèle que possède l'École des Ponts et Chaussées, l'ajutage est placé horizontalement sous la première branche, mais son ouverture G est en-dessous (*fig.* 63), au lieu que l'ouverture A de la première branche est en face du courant. Cela posé, soient

Fig. 63.



h la hauteur représentative de la pression vive en A, laquelle se manifeste par l'élévation du niveau dans le tube AB au-dessus du niveau extérieur;

H la hauteur représentative de la non-pression en G, manifestée au contraire par une dépression dans le tube GF;

M″ et M′ deux coefficients, dépendants de la construction de l'appareil, et que nous supposons indépendants de la vitesse V du liquide, ce qui n'est pas parfaitement certain (n° 110).

On aura

$$h = M'' \frac{V^2}{2g},$$

$$H = M' \frac{V^2}{2g};$$

par suite les fractions $\frac{h}{M''}$ et $\frac{H}{M'}$ étant égales, chacune d'elles égale aussi $\frac{h+H}{M''+M'}$, et l'on peut écrire

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{h+H}{M''+M'}.$$

Lorsque le coefficient $M''+M'$ aura été déterminé une fois pour toutes, la mesure d'une vitesse n'exigera plus que l'observation de la somme $h+H$, quantité qui est la distance des plans de niveau dans les deux tubes. Pour rendre cette observation facile, les deux tubes communiquent à leur partie supérieure, et au moyen d'une embouchure fermée à volonté par un robinet r, on peut faire un vide partiel, en aspirant, ce qui n'altère pas la différence de niveau $h+H$; les niveaux des deux colonnes sont ainsi amenés sur la graduation que porte une planchette liée aux tubes. Alors on ferme un robinet R qui empêche le liquide entré dans les tubes de sortir; on retire l'instrument, et on lit à loisir sur la graduation la distance $h+H$.

Les avantages de cette disposition sont : 1° de supprimer l'examen du niveau du liquide extérieur, chose à peu près impossible dans les rivières et dans les courants naturels, à cause de l'agitation et des variations incessantes de niveau qu'ils présentent; 2° d'augmenter la hauteur à observer, puisque la non-pression s'ajoute à la pression vive; 3° enfin, un moyen commode pour la lecture des hauteurs.

112. *Pendule hydrométrique, tachomètre de Brünings.* — Le pendule hydrométrique consiste en une boule d'ivoire ou de métal creux, soutenue par un fil dont l'extrémité est attachée au centre d'un quart de cercle gradué. Le fil est vertical lorsque la boule n'est sollicitée que par son poids P; mais si

une force horizontale Q vient à agir, le fil s'inclinera de manière à prendre la direction de la résultante des forces P et Q; son inclinaison sur la verticale étant alors α, on aura

$$Q = P \tang \alpha,$$

ce qui donnerait le moyen de calculer Q, si l'on connaissait P et α. Or on peut produire cette force Q par l'action d'un courant horizontal dans lequel la boule serait plongée; Q est alors proportionnel au carré de la vitesse V des filets de ce courant qui viennent rencontrer la boule. En désignant par c un coefficient constant, on posera donc

$$cV^2 = P \tang \alpha,$$

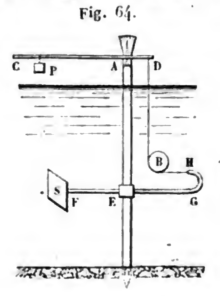
d'où

$$V = \sqrt{\frac{P}{c} \tang \alpha}.$$

On voit donc que pour un instrument donné la vitesse V sera proportionnelle à la racine carré de la tangente de l'angle α, que le fil fait avec la verticale, lorsque la boule est en équilibre dans le courant. L'angle α se lit immédiatement sur le quart de cercle.

Le tachomètre de Brünings est fondé sur un principe analogue. Une petite plaque S (*fig.* 64) est exposée directement à l'action d'un courant qui produit sur elle une force représentée par cV^2; cette force se transmet à l'extrémité D d'une romaine CD par une tige horizontale FG qui fait corps avec S, traverse à frottement doux, en E, la pièce verticale fixe AE, et tend la corde HD. La corde passe sous la poulie de renvoi B. La force cV^2 est équilibrée au moyen d'un poids P mobile sur la branche AC. Si l'on suppose le levier CD équilibré par lui-même, qu'on néglige les frottements, qu'on nomme x la distance de P à la verticale du point d'appui A, et a la distance constante de ce même point

Fig. 64.



à la partie verticale de la corde, on aura

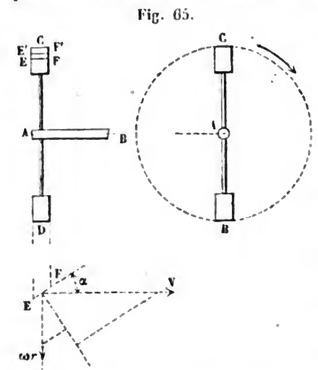
$$acV^2 = Px,$$

ce qui montre que V serait proportionnel à la racine carrée de x. Mais les frottements peuvent un peu modifier ce résultat.

En pratique, le rapport $\frac{V}{\sqrt{\tang \alpha}}$ pour le premier instrument, et le rapport $\frac{V}{\sqrt{x}}$ pour le second, seraient déterminés par des expériences directes; ou mieux encore on tarerait ces instruments en cherchant expérimentalement quelles valeurs de α ou de x répondent à des vitesses V connues.

113. *Moulinet de Woltmann; anémomètre de M. Combes.*— La pièce essentielle du moulinet de Woltmann est un arbre AB (*fig.* 65) tournant sur des appuis fixes, et portant deux ou quatre bras, au bout desquels sont des ailettes planes, telles que C et D. L'arbre AB engrène, à la volonté de l'observateur, avec un système de roues dentées qui communiquent avec un compteur et donnent le moyen de savoir le nombre de tours de cet arbre dans un temps déterminé. Pour mesurer la vitesse d'un courant liquide, un courant d'eau par exemple, voici comment on procède. L'instrument, dont les dimensions sont assez petites, est plongé dans le courant, au point où l'on veut connaître la vitesse, et disposé de manière que l'axe AB soit parallèle au fil de l'eau et dans le même sens. Il est maintenu dans cette position par un piquet fixe, le long duquel il peut glisser. Les ailettes C, D, ayant leurs plans obliques à l'axe, reçoivent du courant une force, dont la composante perpendiculaire sur AB oblige l'appareil à tourner, et au bout de peu de

Fig. 65.



temps le mouvement devient à peu près uniforme. Un système d'embrayage permet de mettre le compteur en marche à l'instant où l'on veut, ce que l'on fait quand tous les préparatifs sont terminés et que l'observateur, devenu libre, peut suivre des yeux l'aiguille d'une montre à secondes ou écouter les oscillations d'un pendule. Quand un certain nombre de secondes s'est écoulé, on arrête le compteur, on retire l'instrument de l'eau et on constate le nombre de tours qu'il a faits dans le temps qu'on a mesuré. De cette donnée on déduit immédiatement le nombre N de tours par minute, et nous allons montrer comment de N on déduira la vitesse V du courant.

Supposons le mouvement de rotation de AB parvenu à l'uniformité, et soit alors ω la vitesse angulaire. Décomposons une ailette C en éléments rectangulaires tels que EFE′F′ par des lignes contenues dans un plan parallèle à l'axe; l'ailette étant supposée peu large, nous considérerons tous les points de EFE′F′ comme étant à une même distance r de l'axe et possédant une même vitesse absolue ωr, perpendiculaire à r. Nommons en outre

r', r'' les valeurs limites de r, pour le bord intérieur et le bord extérieur de l'ailette;

α l'angle que le plan de chaque ailette fait avec la vitesse V du courant;

l la largeur $\overline{EF}$ de l'ailette;

n un coefficient constant.

En nous fondant sur les hypothèses du n° 109, nous chercherons le moment par rapport à AB, des actions exercées par le liquide sur un élément plan tel que EFE′F′. On sait que l'action totale est proportionnelle à la surface ldr de cet élément, et au carré de la vitesse relative avec laquelle il est frappé, projetée sur la normale au plan EFE′F′. Or la composante normale de la vitesse relative est la différence entre la projection $V\sin\alpha$ de V, et la projection $\omega r\cos\alpha$ de ωr; l'action dont il s'agit s'exprimera donc par $n(V\sin\alpha - \omega r\cos\alpha)^2 ldr$. Pour avoir son moment, il faut d'abord la multiplier par r et ensuite par $\cos\alpha$, attendu qu'elle est perpendiculaire à EFE′F′ et fait avec AB un angle complémentaire de α. Le moment de cette

action infiniment petite sera donc

$$n(\mathrm{V}\sin\alpha - \omega r\cos\alpha)^2\, l\cos\alpha . r dr,$$

et, par suite, le moment total pour une ailette, obtenu par l'intégration de l'expression précédente, relativement à r, entre r' et r'', aura pour valeur

$$nl\cos\alpha\left[\frac{1}{2}\mathrm{V}^2\sin^2\alpha(r''^2 - r'^2) - \frac{2}{3}\omega\mathrm{V}\sin\alpha\cos\alpha(r''^3 - r'^3) + \frac{1}{4}\omega^2\cos^2\alpha(r''^4 - r'^4)\right].$$

Pour chacune des ailettes l'expression du moment total sera identique, parce que l'axe étant parallèle à la vitesse V, l'ailette se présente de la même manière au courant dans toutes ses positions successives : on aurait donc la somme totale des moments, en doublant ou quadruplant n, suivant qu'il y aurait deux ou quatre ailettes. On voit définivement que cette somme prendrait la forme

$$a\mathrm{V}^2 - b\omega\mathrm{V} + c\omega^2,$$

a, b, c étant des nombres constants pour un même moulinet.

Cherchons à évaluer le moment des résistances. D'abord, quand l'appareil fonctionne à vide, il faudrait un certain moment moteur $\mathrm{P}p$, pour entretenir le mouvement uniforme, malgré les frottements, qui donnent un moment égal et de sens contraire. Dans l'eau ce moment s'accroît : 1° à cause de la résistance opposée au mouvement des bras du moulinet, laquelle étant en chaque point proportionnelle à ω^2 produit un moment total de la forme $e\omega^2$, e désignant encore une constante pour un même instrument ; 2° à cause du frottement supplémentaire que la pression de l'eau produit sur les appuis. Or, l'action de l'eau ayant été, pour chaque élément, décomposée en force normale et force parallèle à l'axe, on voit que l'ensemble des forces normales à l'axe, pour deux ailettes opposées, donne lieu à un couple moteur ne produisant pas de pression sur les appuis de l'arbre. Quant aux actions parallèles, celle qui s'exerce sur EFE'F' a pour valeur

$$n(\mathrm{V}\sin\alpha - \omega r\cos\alpha)^2\, l\sin\alpha . dr;$$

l'intégrale de cette expression pour une ailette est encore une fonction homogène du second degré en V et ω, et par conséquent il en sera de même du frottement correspondant. Ainsi donc en réunissant tous les moments des résistances nous aurions une quantité

$$a'V^2 - b'\omega V + c'\omega^2 + Pp,$$

qu'il faut égaler au moment moteur, puisque le mouvement est uniforme. Nous poserons en conséquence

$$aV^2 - b\omega V + c\omega^2 = a'V^2 - b'\omega V + c'\omega^2 + Pp.$$

Dans cette équation, on peut remplacer ω par le nombre N de tours qui lui est proportionnel, sauf à multiplier les coefficients qui affectent ω et ω^2 par des nombres convenables. Toute réduction faite, nous trouverions une équation du second degré telle que

$$V^2 - 2\beta NV + \gamma N^2 = \delta,$$

d'où résulterait

$$V = \beta N + \sqrt{\beta^2 N^2 - (\gamma N^2 - \delta)},$$

soit enfin

$$(4) \qquad V = N\left(\beta + \sqrt{\varepsilon + \frac{\delta}{N^2}}\right),$$

en désignant par β, δ, ε trois coefficients qui ne varieront pas pour un moulinet donné.

M. Baumgarten a fait construire des moulinets dans lesquels, au lieu des ailettes planes, il a employé des ailes hélicoïdales se prolongeant jusqu'à l'arbre AB. Cette disposition modifierait les calculs précédents : 1° en ce que la résistance opposée au mouvement des bras serait supprimée ; 2° en ce que les intégrations nécessaires pour trouver le moment total de l'action motrice, ou la pression longitudinale sur l'épaulement AB, devraient être faites en considérant α comme variable avec r, tandis que nous le supposions constant. Or cela ne changerait pas la forme des expressions auxquelles on arrive en ω et V ; l'équation (4) subsisterait donc encore, mais avec des valeurs différentes pour les coefficients β, δ, ε. L'avantage du moulinet modifié par M. Baumgarten consiste en ce que sa sensibi-

lité est plus grande, c'est-à-dire qu'il fait plus de tours dans un temps donné, sous l'action d'un même courant.

L'expression (4) étant d'un usage peu simple à cause du radical, on a cherché à la remplacer approximativement par une autre plus commode. Voici comment on y parvient. On admet en premier lieu que l'ailette est assez petite pour être assimilée à un simple élément plan; alors le moment de l'action motrice, pour un instrument donné, est simplement proportionnel à $(V \sin\alpha - \omega r \cos\alpha)^2$. D'un autre côté on suppose le moment résistant constant ou composé d'une partie constante et d'une partie proportionnelle au moment moteur, ce qui revient à négliger la résistance opposée au moment des bras.

Alors l'équation d'équilibre devient

$$V \sin\alpha - \omega r \cos\alpha = \text{const.};$$

d'où l'on tire, après avoir remplacé ω par sa valeur en fonction de N,

$$(5) \qquad V = \lambda + \mu N,$$

en désignant encore par λ et μ des coefficients constants pour un même moulinet.

On pourrait sans doute arriver à exprimer analytiquement les coefficients β, δ, ε ou λ et μ, en fonction des dimensions de l'appareil. Mais si l'on se rappelle combien d'incertitudes affectent la théorie, quand il s'agit de déterminer l'action d'un courant sur une surface, on reconnaîtra sans peine que c'est assez d'avoir trouvé théoriquement la forme de la relation qui lie V à N. Les valeurs numériques des coefficients se détermineront au moyen d'un certain nombre d'expériences, dans lesquelles on connaîtrait V et N. Ces expériences pourraient se faire, par exemple, en déplaçant l'instrument avec une vitesse connue dans une eau tranquille. On pourrait aussi l'exposer à l'action de courants dont la vitesse en certains points aurait été déterminée préalablement par les moyens simples indiqués au numéro suivant.

L'anémomètre de M. Combes est un moulinet analogue à celui de Woltmann et qui peut être employé pour mesurer la

vitesse des courants gazeux. Sa théorie ne diffère pas de celle qui vient d'être donnée.

114. *Mesure de la vitesse à la surface d'un courant.* — La vitesse à la surface d'une rivière ou d'un cours d'eau quelconque peut se mesurer à l'aide de divers moyens. Dubuat employait une petite roue à palettes, très-mobile sur son axe, qu'il disposait au-dessus du courant de manière que l'eau vînt choquer les palettes à l'instant où celles-ci passent au-dessous de l'arbre. Si l'on admet que la résistance à la rotation de la roue est sensiblement nulle, la vitesse de l'eau sera égale à celle des aubes, au centre de la surface frappée par le courant, vitesse qu'on déduira aisément du nombre de tours. Pour plus de rigueur, on pourrait d'avance équilibrer les frottements au moyen d'un poids suspendu à l'arbre par une corde qui se déroulerait pendant la rotation.

Un moyen plus usuel consiste dans l'emploi de flotteurs. On choisit une portion suffisamment régulière d'un courant; en un point, un premier observateur A abandonne au fil de l'eau un flotteur formé d'un corps léger dépassant peu la surface, par exemple un petit disque de liége lesté avec un clou; un second observateur B, placé à une distance connue d du premier, avertit celui-ci, par un signal convenu, de l'instant où le flotteur a fini de parcourir l'intervalle d qui les sépare. A ce même instant A lâche un second flotteur tout pareil; quand ce second flotteur a parcouru la distance d, sur un nouveau signal de B, il en lâche un troisième, et ainsi de suite, pendant quelques minutes, ou seulement pendant un temps moindre, si l'on a le moyen de l'observer avec assez de précision. En nommant t le temps total, en secondes, que n flotteurs auront employé à parcourir les d mètres d'intervalle, la vitesse moyenne du filet qui les a transportés sera évidemmment

$$V = \frac{nd}{t}.$$

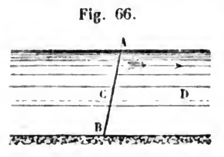
Il faut que la distance d ne soit pas trop grande, afin que la vitesse ne varie pas sensiblement sur le parcours d'un filet; d'un autre côté, si elle était trop petite, le manque de coïncidence

exacte entre l'instant où un flotteur achève sa course et celui où le flotteur suivant la commence, pourrait entraîner des erreurs notables. Le terme à adopter ne peut pas être fixé d'une manière absolue : on l'appréciera suivant les circonstances. Il y a encore une précaution importante à observer : c'est que le flotteur dépasse très-peu la surface de l'eau, sans quoi la résistance de l'air diminuerait sa vitesse dans une proportion sensible, et fausserait ainsi le résultat cherché.

115. *Flotteurs donnant directement la vitesse moyenne d'un courant sur une même verticale.* — Quand la profondeur d'un cours d'eau est assez régulière, on peut déterminer approximativement la vitesse moyenne sur une même verticale, par le procédé suivant.

On abandonne au fil de l'eau un flotteur AB (*fig.* 66) de forme prismatique, lesté à sa partie inférieure B, de manière à se maintenir dans le plan vertical où l'on veut mesurer la vitesse moyenne des filets. Au bout de peu temps, ce flotteur possède un mouvement sensiblement uniforme, et nous allons montrer que, s'il occupe toute la profondeur du cours d'eau, sa vitesse différera peu de la vitesse moyenne cherchée.

Fig. 66.



En effet, le mouvement du flotteur étant une translation rectiligne et uniforme, toutes les forces qui le sollicitent doivent se faire équilibre. Comme la pression hydrostatique et la pesanteur ne donnent en somme qu'un couple de forces verticales, il faut donc nécessairement que les pressions spécialement dues aux vitesses des filets (lesquelles pressions sont toutes inclinées perpendiculairement à AB) donnent une somme nulle, sans quoi la résultante totale ne pourrait pas s'annuler. Il faudra pour cela que les filets supérieurs, qui sont les plus rapides, exercent une pression vive dans le sens de la translation du flotteur, et, par conséquent, qu'ils aient une vitesse supérieure à la vitesse u de celui-ci, tandis que le contraire arrivera pour les filets inférieurs. Soit CD le filet qui a la vitesse u; au-dessus de CD, dans la portion AC, il y aura des

pressions vives motrices; au-dessous, sur CB, il y aura des pressions vives résistantes, et la somme des premières doit être égale à la somme des autres. Afin d'exprimer analytiquement ce fait, appelons

v la vitesse du filet quelconque, séparé de la surface libre par une distance verticale y;

a et b deux constantes;

h la profondeur totale;

x le rapport inconnu de $\overline{AC}$ à $\overline{AB}$, et par conséquent xh la profondeur du point C.

On sait d'abord que la loi des vitesses des filets sera exprimée par

$$v = a - by^n,$$

n étant un nombre égal à 2 ou à $\frac{3}{2}$ (nº 66); on aura donc la relation

$$u = a - bx^n h^n,$$

puisque la vitesse du filet liquide passant au point C est la même que celle du flotteur. Ensuite, un filet d'épaisseur dy, possédant la vitesse absolue v et la vitesse relative $v - u$, exerce une presssion vive proportionnelle à $(v-u)^2 dy$; on posera donc

$$\int_0^{xh} (v-u)^2 dy = \int_{xh}^{h} (v-u)^2 dy.$$

Or $v - u = b(x^n h^n - y^n)$; par suite on a

$$\int_0^{xh} (x^n h^n - y^n)^2 dy = \int_{xh}^{h} (x^n h^n - y^n)^2 dy.$$

L'intégration effectuée, le facteur h^{2n+1} disparaît, et l'on trouve

$$\frac{4n^2}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+1} = x^{2n} - \frac{2x^n}{n+1} + \frac{1}{2n+1};$$

équation qui devient, par la supposition de $n = 2$,

$$\frac{16}{15} x^5 = x^4 - \frac{2}{3} x^2 + \frac{1}{5},$$

et, par $n = \frac{3}{2}$,

$$\frac{9}{10} x^4 = x^3 - \frac{4}{5} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}.$$

La première de ces équations donne $x = 0,610$; la seconde serait satisfaite à peu près par la valeur $x = 0,563$. Or on sait (n° 66) que dans l'hypothèse de $n = 2$, la vitesse moyenne U du courant se trouve à une profondeur $0,577h$, et que, pour $n = \frac{3}{2}$, cette profondeur devient $0,543h$. La vitesse u du flotteur, qui a lieu à une profondeur très-peu supérieure, sera donc très-sensiblement égale à U. On voit que cette dernière vitesse doit être tant soit peu plus grande que l'autre.

Le résultat de l'analyse précédente conduit naturellement à un moyen de rendre plus exacte l'indication du flotteur : c'est de faire en sorte qu'au lieu d'occuper, en projection verticale, toute la profondeur du courant, il en occupe seulement une fraction qu'il est aisé de déterminer. Supposons en effet que h désigne, dans le calcul ci-dessus, la projection verticale du flotteur : la recherche du rapport x ne se trouvera en rien modifiée, et l'on arriverait de même à trouver la position du point C pour lequel on a $v = u$. Maintenant si l'on appelle H la profondeur totale du courant, on sait que le filet possédant la vitesse moyenne de l'eau se trouve à la profondeur $0,577$ H ou $0,543$ H, suivant que n a la valeur 2 ou $\frac{3}{2}$. Pour faire en sorte que ce filet passe par le point C et que par conséquent le flotteur soit animé de la vitesse moyenne de l'eau, on devra donc poser

$$0,610h = 0,577\,\mathrm{H} \quad \text{dans l'hypothèse de } n = 2,$$

$$0,563h = 0,543\,\mathrm{H} \quad \text{dans l'hypothèse de } n = \frac{3}{2},$$

d'où l'on tire respectivement

$$h = 0,946\,\mathrm{H} \quad \text{et} \quad h = 0,964\,\mathrm{H}.$$

On pourrait réaliser pratiquement ce rapport de h à H, en adoptant H pour la dimension longitudinale $\overline{\mathrm{AB}}$ du flotteur et

faisant en sorte, au moyen du lest, que ce flotteur entraîné par le courant prît sur la verticale une inclinaison de 16 à 18 degrés sexagésimaux. C'est à quoi l'on arriverait par un tâtonnement expérimental.

116. *Jeaugeage des cours d'eau.* — Quand il s'agit d'un cours d'eau de faible importance, on s'arrange pour faire passer tout son débit sur un déversoir ou sous une vanne ; à défaut d'ouvrages de cette nature déjà existants, on établit des barrages provisoires en planches. Alors on calcule la dépense par les formules du chapitre II.

Un autre procédé très-simple et très-expéditif, qu'on emploiera quand on n'aura pas besoin de beaucoup de précision, consiste à mesurer au moyen de flotteurs (n° **114**) la vitesse V maximum à la surface du courant. On en déduit la vitesse moyenne $U = 0,80\,V$ (n° **65**), et on la multiplie par la section transversale du courant. La mesure suffisamment exacte de ce dernier élément du calcul exige que le lit ne soit pas très raboteux, ou du moins que les inégalités soient peu sensibles relativement aux profondeurs.

Si le débit à mesurer est celui d'une assez grande rivière, on divise la section totale en un certain nombre de petites surfaces ω, pour chacune desquelles la vitesse v, considérée comme constante, se mesure en employant un des instruments ci-dessus décrits. Le débit est égal à la somme des produits ωv. Assez fréquemment, on ne mesure, sur une même verticale, que la vitesse à la surface et la vitesse de fond ; on en prend la moyenne qui donne approximativement, pour cette verticale, la vitesse moyenne des filets. La section étant ensuite divisée en tranches verticales, on multiplie chacune d'elles par la vitesse moyenne correspondante, et on fait la somme des produits. Toutefois ce procédé exige beaucoup de temps, ce qui le rend d'une application difficile.

Enfin, on a indiqué au chapitre IV divers procédés pour chercher par le calcul la dépense d'un cours d'eau ; mais vu l'incertitude qui affecte l'expression du frottement sur les parois du lit, les moyens d'observation directe doivent être généralement préférés.

CHAPITRE SEPTIÈME.

DES MOTEURS HYDRAULIQUES ET DE QUELQUES MACHINES A ÉLEVER L'EAU.

§ I. — Généralités sur les moteurs hydrauliques.

117. *Rappel de quelques définitions; théorème de la transmission du travail dans les machines.* — On appelle *machine* un corps ou ensemble de corps destinés à recevoir en quelques-uns de leurs points certaines forces, et à exercer, par d'autres points, des forces qui diffèrent généralement des premières par leur intensité, leur direction et la vitesse de leurs points d'application.

L'*effet dynamique* d'une machine est le travail total, en général négatif ou résistant, qu'elle reçoit des corps extérieurs qu'on a en vue de soumettre à son action. Il arrive quelquefois que l'effet dynamique est un travail positif; par exemple, quand on descend lentement un fardeau par une corde enroulée sur une poulie, le poids du fardeau fait un travail moteur sur le système de la corde et de la poulie.

Supposons, pour fixer les idées, que l'effet dynamique soit un travail résistant. Indépendamment de celui-là, la machine en subit encore d'autres, qui sont employés à vaincre les frottements, la résistance de l'air, etc. Les résistances qui donnent lieu à ces autres travaux négatifs ont reçu le nom de *résistances secondaires,* tandis que l'effet dynamique est dû à ce qu'on appelle les *résistances principales.*

Le théorème général de Mécanique en vertu duquel une relation est établie entre l'accroissement de puissance vive d'un système matériel et le travail des forces, est applicable à une machine, comme à tout ensemble de corps. Pour en écrire l'expression, supposons toujours l'effet dynamique

négatif, et nommons :

T_m la somme des travaux des forces motrices qui ont agi sur la machine pendant un certain intervalle de temps ;

T_e l'effet dynamique pendant le même temps ;

T_f la valeur correspondante du travail des résistances secondaires ;

v et v_0 les vitesses d'un point matériel, de masse m, faisant partie de la machine, au commencement et à la fin du temps considéré ;

H et H_0 les hauteurs correspondantes du centre de gravité de l'appareil mesurées en dessous d'un plan horizontal ;

Σ une somme étendue à toutes les masses m.

Le théorème cité donne immédiatement

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = T_m - T_e - T_f + (H - H_0)\Sigma mg.$$

Dans une machine marchant régulièrement, chacune des vitesses v croît depuis zéro, valeur correspondante à l'état de repos, jusqu'à un certain maximum qu'elle ne dépasse pas : le premier membre de l'équation a donc nécessairement une limite supérieure, en dessous de laquelle il se trouvera, ou qu'il atteindra tout au plus, quel que soit l'intervalle de temps auquel se rapportent les valeurs initiale et finale v_0 et v. Il en est tout à fait de même du terme $(H - H_0)\Sigma mg$, quand la machine marche sur place, parce que son centre de gravité repasse périodiquement par les mêmes positions. Au contraire, les termes T_m, T_e, T_f croissent indéfiniment avec le temps, si la marche de la machine se prolonge, car de nouvelles quantités de travail s'ajoutent sans cesse à celles qui ont été précédemment accomplies. Ces trois termes finiront donc par l'emporter beaucoup sur les autres, en sorte que l'équation devra, pour un intervalle de temps illimité, se réduire à

$$T_m = T_e + T_f.$$

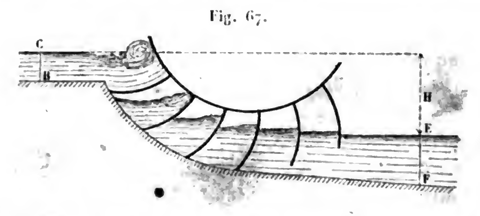
C'est ce qui aurait lieu rigoureusement, sans supposer un intervalle de temps infini, si les instants extrêmes de cet intervalle répondaient à un repos de la machine, et si l'on avait en

même temps $H = H_0$. Ainsi donc on peut dire qu'en moyenne le travail moteur est égal au travail résistant; mais, comme ce dernier comprend, outre l'effet dynamique pour lequel la machine est établie, le travail des résistances secondaires, on voit qu'on n'utilise pas complétement l'action de la puissance motrice, puisqu'une partie est consommée inutilement pour équilibrer le travail T_f.

Il est clair que le rapport $\frac{T_f}{T_m}$ mesure la perte proportionnelle qu'on fait; le rapport $\frac{T_e}{T_f}$ ou $1 - \frac{T_f}{T_m}$ donne, au contraire, une idée nette de la portion du travail qu'on utilise. Ce dernier rapport est ce qu'on nomme le *rendement* : il est évidemment toujours plus petit que 1, car dans les meilleures machines T_f conserve une certaine valeur. Tout l'art du constructeur consiste à se rapprocher autant que possible de l'unité.

118. *Considérations analogues appliquées à une chute d'eau.* — Une chute d'eau consiste en une certaine dépense d'eau, censée permanente, qui, entre deux sections CB, EF (*fig.* 67) d'un canal où elle coule, présente une pente su-

Fig. 67.



perficielle H, de grandeur notable, malgré le rapprochement de ces sections. Le système matériel liquide compris à chaque instant dans l'intervalle CBEF peut être considéré comme une machine se renouvelant sans cesse, au moyen des molécules qui entrent par CB et remplacent exactement celles qui sortent par EF. Le travail moteur sera celui de la pesanteur, réuni à celui des pressions sur le contour extérieur du système; l'effet dynamique sera le travail résistant exercé sur la chute par un appareil quelconque, une roue hydraulique par exemple,

soumis à son action. A son tour la roue hydraulique, considérée comme machine, recevra de la chute un travail moteur sensiblement égal à l'effet dynamique dont on vient de parler (*), et n'en transformera qu'une partie en un travail utile, qui sera son effet dynamique propre. Mais dans tout ce qui va suivre nous nous bornerons à étudier l'effet dynamique de la chute et non celui de la roue.

Bien que le mouvement du liquide ne puisse être rigoureusement permanent, parce que la roue ne se présente pas tout à fait constamment de la même manière, cependant on peut le considérer comme tel, sans grande erreur; car après un intervalle de temps θ, ordinairement très-court, employé par une aube ou palette pour prendre la place de la suivante, toutes choses redeviennent les mêmes. En supposant le mouvement de la roue régulier et les palettes uniformément distribuées, il y a une périodicité très-fréquente dans l'état du système, ce qui est presque de la permanence. Nous appliquerons donc le théorème de Bernoulli à une molécule quelconque, de masse m, qui partant de la section CB avec la vitesse U_0, arrive en EF avec la vitesse U. La charge totale n'est autre chose que H, si l'on admet le parallélisme des filets dans les sections extrêmes, car alors la pression varie suivant la loi hydrostatique dans chacune des deux surfaces CB, EF, en sorte que les points C et E peuvent être pris comme niveaux piézométriques pour les positions initiale et finale de la masse m. Désignons par $-t_e$ et $-t_f$ les travaux rapportés à l'unité de masse et considérés comme résistants, que m a subis dans son parcours entre CB et EF, par suite de l'action de la roue et de la viscosité. En raisonnant comme au n° 15, on poserait l'équation

$$H - \frac{1}{g}(t_e + t_f) - \frac{U^2 - U_0^2}{2g} = 0;$$

(*) Nous disons *sensiblement*, car l'égalité des actions mutuelles entre l'eau et la roue n'entraîne pas celle des travaux correspondants. Cette égalité n'est rigoureuse qu'en supposant nul le frottement du liquide sur les parois solides de la roue, frottement qui est en effet assez faible.

on en tire

$$mt_e = mg\left(H + \frac{U_0^2}{2g} - \frac{U^2}{2g}\right) - mt_f.$$

Par conséquent on voit que chaque poids mg, qui passera de CB à EF, donnera lieu à un effet dynamique mt_e, dont le second membre fournit une expression. L'ensemble des molécules m comprises dans le poids total P que le courant débite dans une seconde, produira un effet dynamique égal à une somme Σ d'expressions analogues, étendue à toutes ces masses; en considérant U_0 et U comme des vitesses constantes dans les sections respectives CB, EF, cette sommation donnera

(1) $$\Sigma mt_e = P\left(H + \frac{U_0^2}{2g} - \frac{U^2}{2g}\right) - \Sigma mt_f.$$

Or, dans chaque seconde, un nouveau poids P est fourni par le courant; il y a donc naissance d'un nouvel effet dynamique Σmt_e, qui représente ainsi l'effet dynamique moyen par seconde.

La quantité $P\left(H + \frac{U_0^2}{2g} - \frac{U^2}{2g}\right)$ se réduit à PH, dans le cas où U_0 et U sont sensiblement nulles, ce qui arrive en mesurant la différence de niveau entre des bassins de départ et d'arrivée, où l'eau serait à peu près stagnante : on nomme alors le produit PH *puissance absolue de la chute*. Le rapport $\frac{\Sigma mt_e}{PH}$ est le rendement; Σmt_f est le travail perdu. En divisant la dernière équation par P ou Σmg, et supposant $U = 0$, $U_0 = 0$, elle deviendrait

(2) $$\frac{\Sigma mt_e}{g\Sigma m} = H - \frac{\Sigma mt_f}{g\Sigma m}:$$

on pourrait alors appeler H la *chute absolue*; $\frac{\Sigma mt_e}{g\Sigma m}$ la *chute utilisée*, c'est-à-dire la hauteur qui, multipliée par le poids dépensé P, donnerait l'effet dynamique par seconde; $\frac{\Sigma mt_f}{g\Sigma m}$ la *chute perdue* se retranchant de la chute absolue, quand il s'agit de calculer la chute utilisée. On voit que $\frac{\Sigma mt_f}{g\Sigma m}$ est la perte de

charge moyenne éprouvée par les molécules dans leur trajet entre CB et EF ; car cette expression représente identiquement le travail moyen de la viscosité sur une molécule, rapporté à l'unité de masse et divisé par g.

119. *Remarques générales sur les moyens d'assurer un bon rendement à une chute d'eau faisant marcher un moteur hydraulique.* — Pour avoir un bon rendement, il faut chercher à diminuer autant que possible le terme $\Sigma m t_f$ de l'équation (1), ou la perte de charge moyenne $\frac{\Sigma m t_f}{g \Sigma m}$. Parmi les causes qui produisent cette perte, nous allons en signaler quelques-unes et voir succinctement comment on pourrait les atténuer.

D'abord, si l'eau entre dans la roue et peut en conséquence agir sur elle, c'est qu'elle possède une certaine vitesse relative w; or dans la plupart des cas cette vitesse relative donne lieu à une agitation tumultueuse du liquide et à des mouvements vibratoires, d'où résulte une perte de charge qu'on peut supposer, par analogie avec un cas étudié plus haut (n° 31) et avec ce qui se passe dans le choc des corps solides, égale à la hauteur $\frac{w^2}{2g}$; ainsi $\frac{w^2}{2g}$ serait une portion de la chute perdue (*). Il y a donc en général intérêt à faire entrer l'eau avec peu de vitesse relative. Cependant cela n'est pas nécessaire quand w a sa direction tangente aux parois qu'elle vient ren-

(*) Imaginons que l'eau une fois entrée dans la roue passe brusquement au repos relatif : l'anéantissement de la vitesse w ne pouvant alors être attribuée qu'au travail résistant des actions moléculaires, ce travail pour une molécule fluide ayant la masse m serait $\frac{1}{2} m w^2$, quantité qui, rapportée à l'unité de masse et divisée par g, donnerait la perte de charge $\frac{w^2}{2g}$, identique pour toutes les molécules. Mais l'hypothèse consistant à supposer la production instantanée du repos relatif n'est pas parfaitement conforme à la réalité : la pesanteur, par exemple, peut se joindre parfois aux actions moléculaires pour amener ce résultat au bout d'un temps sensible. En conséquence l'expression $\frac{w^2}{2g}$ doit être considérée, moins comme la valeur exacte de la quantité qu'on veut évaluer ici, que comme une limite supérieure dont on approche plus ou moins suivant les cas particuliers que l'on considère.

contrer, et que la disposition particulière des appareils permet à l'eau de continuer son mouvement relatif dans la roue sans qu il y ait choc des filets sur les parois solides ou sur le liquide déjà introduit, puisque alors on n'a plus à craindre l'agitation tumultueuse dont nous parlions tout à l'heure.

Quand l'eau, après sa sortie de la roue, doit être déposée dans un bief de niveau invariable, où elle perd sa vitesse absolue de sortie v', on comprend facilement qu'il faut réduire cette vitesse v' autant que possible. En effet, l'eau qui sort de la roue, emporte avec elle, dans chaque seconde, une puissance vive $\frac{Pv'^2}{2g}$ qui aurait pu être annulée par un travail résistant du moteur hydraulique, et augmenter d'autant l'effet dynamique T_e; tandis que cette puissance vive ne servira qu'à produire de l'agitation et des remous dans le bief inférieur et entrera dans le terme Σmt_f. Il y a cependant des cas où l'on est forcé de donner à v' une valeur plus ou moins considérable : nous verrons ultérieurement, par quelques exemples, comment il est possible quelquefois d'atténuer cette circonstance défavorable.

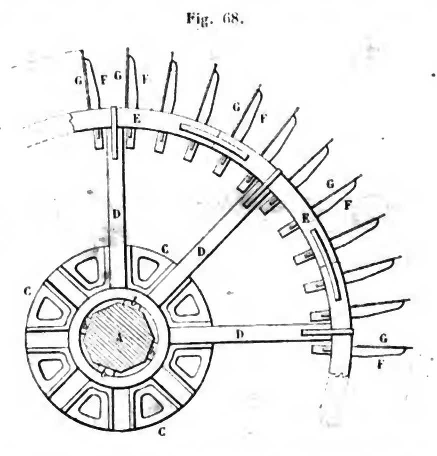
Généralement les considérations ci-dessus présentées se résument en disant que l'eau doit entrer sans choc et sortir sans vitesse. On peut encore ajouter qu'il est bon de ne pas la faire couler rapidement dans des canaux trop étroits ou présentant des changements brusques de section, puisque cela entraînerait des pertes de charge à comprendre dans l'expression $\frac{\Sigma mt_f}{g\Sigma m}$.

Nous allons étudier maintenant les moteurs hydrauliques les plus répandus, en nous occupant toujours principalement des moyens d'utiliser la chute le mieux possible dans chaque cas, et de calculer l'effet dynamique réalisable avec les dispositions adoptées. Les roues hydrauliques se divisent en deux grandes classes, celles qui ont leur axe horizontal, et celles qui ont leur axe vertical ; les variétés renfermées dans ces deux classes feront l'objet des deux paragraphes suivants.

§ II. — Roues hydrauliques à axe horizontal.

120. *Roue en dessous à palettes planes, emboîtée dans un coursier.* — Les roues dont il s'agit sont ordinairement construites en bois. Un arbre A polygonal (*fig.* 68) est entouré

Fig. 68.

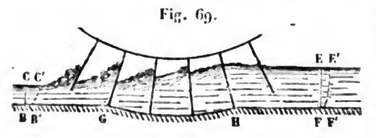


d'une espèce de collier C en fonte, appelé *tourteau*, qui est calé au moyen de tasseaux de bois *b*. Des bras D entrent dans des rainures ménagées sur le tourteau, et lui sont reliés par des boulons; ces bras servent à supporter une couronne EE, dont les segments sont assujettis entre eux et aux bras par des ferrures. Sur la couronne s'implantent les coyaux F, F,..., petites pièces de bois également espacées, destinées à soutenir les aubes ou palettes G, G,..., lesquelles sont des madriers de $0^m,02$ à $0^m,03$ d'épaisseur, situés dans des plans passant par l'axe de la roue, et occupant toute la largeur de celle-ci. Un seul système de tourteau, bras, couronne et coyaux ne suffirait pas pour donner un appui convenable aux aubes; dans les roues qui ont peu de largeur parallèlement à l'axe, on se contente de deux systèmes pareils; si les roues sont larges, on peut en mettre trois ou plus.

Le nombre des bras croît avec le diamètre de la roue; dans les roues les plus ordinaires, de 3 à 5 mètres de diamètre, chaque tourteau porte six bras. Les aubes peuvent être espacées de $0^m,35$ à $0^m,40$, et avoir une profondeur un peu supérieure dans le sens du rayon, comme $0^m,60$ ou $0^m,70$ par exemple.

Après ces indications sommaires sur la roue elle-même, voyons comment on peut se rendre compte du travail qu'elle reçoit de la part de la chute d'eau. L'eau arrive sous forme d'un courant sensiblement horizontal, par un coursier BGHF (*fig.* 69) de même largeur que la roue, présentant sur une portion GH une surface cylindrique qui laisse très-peu de jeu aux palettes. Les molécules liquides ont en traversant la section CB une vitesse v; mais un peu après elles sont emprisonnées dans les intervalles limités par deux aubes consécutives et par le coursier. Elles sont entrées dans ces intervalles avec une vitesse relative moyennement égale à la différence entre la vitesse horizontale v, et la vitesse v' du milieu de la portion plongée des palettes, laquelle est aussi à peu près horizontale. Il résulte de la vitesse relative un choc et une agitation qui se calme peu à peu, pendant que les palettes parcourent la portion circulaire du coursier; de sorte que si cette portion circulaire est assez longue et s'il n'y a pas trop de jeu entre les palettes et le coursier, l'eau qui sortira de la roue possédera sensiblement la vitesse v'. L'action exercée par la roue sur l'eau est la cause de ce passage de la vitesse v à la vitesse v'; ce qui permet, comme on va le voir, de calculer l'intensité totale de cette action.

Fig. 69.



Pour cela, on appliquera au système liquide compris entre les sections transversales CB, EF, où les filets sont supposés parallèles, le théorème des quantités de mouvement projetées sur un axe horizontal. Appelons :

b la largeur constante du coursier et de la roue;

h, h' les profondeurs $\overline{CB}$ et $\overline{EF}$ des sections extrêmes, qui sont rectangulaires;

F la force totale exercée par la roue sur l'eau ou inversement, dans le sens horizontal;

P la dépense du courant, en kilogrammes, par seconde;

Π le poids du mètre cube d'eau;

θ un temps très-court pendant lequel CBEF est venu en C'B'E'F'..

L'évaluation du gain de quantité de mouvement du système CBEF pendant le temps θ, ainsi que le calcul des impulsions correspondantes produites par la pesanteur et par les pressions sur la surface extérieure du système liquide, ressemblent complétement à ce qu'on a vu au n° 83, à l'occasion du ressaut dans les cours d'eau. Avec les notations actuelles, on trouverait

1°. Pour le gain moyen de quantité de mouvement projetée $\frac{P\theta}{g}(v'-v)$;

2°. Pour les impulsions réunies de la pesanteur et des pressions, aussi en projection horizontale, $\frac{1}{2}\Pi b\theta(h^2-h'^2)$; à ces impulsions, il suffit de joindre celle que produit F, ou $-F\theta$, pour avoir la somme des impulsions projetées.

On aura donc

$$\frac{P\theta}{g}(v'-v)=\frac{1}{2}\Pi b\theta(h^2-h'^2)-F\theta,$$

d'où l'on tire

$$F=\frac{P}{g}(v-v')-\frac{1}{2}\Pi b(h'^2-h^2).$$

Les forces dont F est la résultante en projection horizontale sont exercées en sens contraire par l'eau sur la roue, en des points dont le mouvement vertical est à peu près nul, et dont la vitesse est approximativement v' dans le sens horizontal. La roue recevra donc de la part de ces forces, dans chaque unité de temps, un travail Fv', qui représente l'effet dyna-

mique T_e, sauf une légère erreur (nº **118**). Ainsi donc

$$T_e = F v' = \frac{P}{g} v'(v - v') - \frac{1}{2} \Pi b v'(h'^2 - h^2).$$

On a d'ailleurs

$$P = \Pi b h v = \Pi b h' v' ;$$

on pourra donc écrire

$$T_e = \frac{P}{g} v'(v - v') - \frac{1}{2} P\left(h' - \frac{h^2}{h'}\right) = \frac{P}{g} v'(v - v') - \frac{1}{2} P h \left(\frac{h'}{h} - \frac{h}{h'}\right),$$

soit enfin, en remarquant que $\frac{h}{h'} = \frac{v'}{v}$,

$$(1) \qquad T_e = \frac{P}{g} v'(v - v') - \frac{1}{2} P h \left(\frac{v}{v'} - \frac{v'}{v}\right).$$

Pour que cette formule soit passablement exacte, il faut que les hauteurs h et h' soient assez petites, sans quoi les aubes auraient une inclinaison notable sur la verticale à l'instant où où elles sortent de l'eau ; la vitesse des points où sont appliquées les forces ayant F pour résultante ne pourrait plus être regardée comme horizontale, comme on l'a supposé ci-dessus, et il se produirait une résistance particulière à l'émersion des aubes, à cause du liquide inutilement soulevé par elles. Il faut aussi que l'eau soit emprisonnée assez longtemps dans la roue pour passer à la vitesse v'.

On peut dans la formule (1) considérer v et h comme des données fixes et chercher la valeur la plus convenable de la vitesse v' des palettes, pour rendre T_e le plus grand possible. Si l'on pose à cet effet $\frac{v'}{v} = x$, $T_e = AP\frac{v^2}{2g}$, la formule (1) donne

$$A = 2x(1 - x) - \frac{gh}{v^2}\left(\frac{1}{x} - x\right),$$

et il faut choisir x de manière à ce que A soit maximum. Ce maximum s'obtiendra en prenant la valeur qui annule la dérivée $\frac{dA}{dx}$, ce qui conduit à l'équation

$$1 - 2x + \frac{gh}{2v^2}\left(\frac{1}{x^2} + 1\right) = 0.$$

La valeur de x qu'on en tire dépend de $\frac{gh}{v^2}$; on trouve approximativement

Pour $\frac{gh}{v^2} = 0,00,$	$x = 0,500,$	$A = 0,500,$
$0,05,$	$0,553,$	$0,431,$
$0,10,$	$0,595,$	$0,373.$

Assez habituellement on néglige le terme $\frac{gh}{v^2}\left(\frac{1}{x} - x\right)$, et alors on a $x = 0,50$, $A = 0,50$; en en tenant compte, le maximum de A est assez fortement altéré, même pour de faibles valeurs de $\frac{gh}{v^2}$. D'ailleurs l'expérience n'indique pas qu'il y ait utilité à prendre x supérieur à 0,50, comme nous venons de le trouver; elle indiquerait plutôt un rapport de v' à v voisin de 0,4, ce qui tient probablement à ce qu'une marche trop rapide de la roue empêche le liquide de passer complétement de la vitesse v à la vitesse v', pendant son séjour entre les palettes : une portion de l'eau passe sans produire tout son effet dynamique, et la formule (1) cesse d'être conforme à la réalité.

Ainsi, Smeaton, ingénieur anglais, a fait des expériences, en 1759, sur une petite roue à aubes planes de $0^m,609$ de diamètre; cette roue était emboîtée dans un coursier à fond plat, ce qui est un défaut, parce que les intervalles compris entre les aubes et le coursier ne sont jamais complétement fermés. Le poids P variait de $0^k,86$ à $2^k,84$. Dans chaque expérience, le travail transmis à la roue était déterminé par l'élévation d'un poids attaché à une corde qui s'enroulait sur l'arbre. La valeur la plus convenable de $x = \frac{v'}{v}$ a été ainsi trouvée variable de 0,34 à 0,52, soit en moyenne égale à 0,43. Le nombre A, compris entre 0,29 et 0,35, avait pour valeur moyenne $\frac{1}{3}$ environ.

Nous nous en tiendrons donc définitivement au rapport $\frac{v'}{v} = 0,4$ fourni par l'expérience. L'expression de A devient

alors

$$A = 0,48 - 2,1\,\frac{gh}{v^2},$$

qui pour $\frac{gh}{v^2} = 0,05$ et $\frac{gh}{v^2} = 0,10$ donne les nombres

$$A = 0,375 \quad \text{et} \quad A = 0,27,$$

assez rapprochés de ceux trouvés par Smeaton.

Voici encore quelques remarques auxquelles il serait bon d'avoir égard dans la pratique.

1°. Il convient, autant que possible, que la hauteur h soit de $0^m,15$ à $0^m,20$. Une trop faible épaisseur de la lame d'eau qui arrive sur la roue donne relativement de l'importance au jeu inévitable entre la roue et le coursier, jeu qui débite en pure perte une partie de l'eau motrice. Une trop grande épaisseur aurait aussi des inconvénients : car de la relation $\frac{h'}{h} = \frac{v}{v'}$ il suit que pour $\frac{v}{v'} = 0,4$ et $h = 0^m,20$, on aura déjà

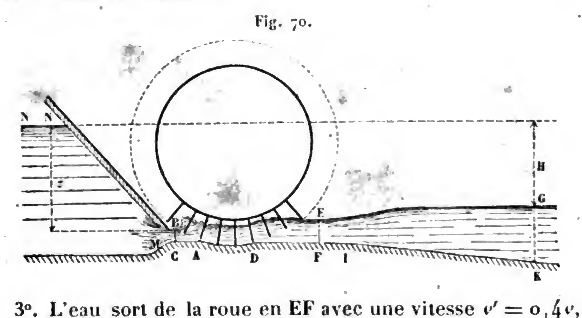
$$h' = \frac{0,20}{0,4} = 0^m,50;$$

les aubes seront immergées de $0^m,50$, en adoptant l'épaisseur de $0^m,20$, et si elles l'étaient davantage, elles éprouveraient une résistance assez forte pour sortir de l'eau, comme on l'a déjà dit. Il faut donc que h ne soit ni trop petit, ni trop grand : les limites de $0^m,15$ à $0^m,20$ sont conseillées par M. Belanger.

2°. On évitera autant que possible les pertes de charge, pendant le trajet de l'eau depuis le bassin d'amont jusqu'à son arrivée à la section CB près de la roue, pertes qui se traduisent en une diminution de rendement (n° 118). Pour lui donner la forme d'une lame mince, de $0^m,15$ à $0^m,20$ d'épaisseur, on la fait couler sous une vanne, par un orifice rectangulaire : on aura soin de bien raccorder les bords de cet orifice avec l'intérieur du bassin de retenue, afin d'éviter une contraction suivie de l'épanouissement brusque des filets, comme dans les ajutages cylindriques. On inclinera la vanne, comme dans la *fig.* 70, afin qu'il y ait peu de distance entre l'orifice et la roue, ce qui

diminue la perte de charge produite par le frottement de l'eau sur le canal MC d'amenée.

Fig. 70.



3°. L'eau sort de la roue en EF avec une vitesse $v' = 0,4v$, sous forme d'un faisceau horizontal de filets parallèles. Si pour se rendre dans le bief d'aval, dans une section GK, où sa vitesse sera sensiblement nulle, elle n'avait à subir aucune perte de charge, il y aurait entre EF et GK une charge négative dont la valeur absolue serait $\frac{v'^2}{2g}$ ou $0,16\frac{v^2}{2g}$: c'est-à-dire que le point G serait à une hauteur $0,16\frac{v^2}{2g}$ au-dessus de E, puisque les niveaux piézométriques en EF et GH peuvent être confondus avec ceux des points E et G. Il n'est pas possible de faire en sorte que toute perte de charge soit supprimée entre EF et GK; mais on atténue beaucoup ces pertes, au moyen d'une disposition que M. Belanger a conseillée le premier. Le fond du coursier, après la partie circulaire AD, présente une faible pente, sur une longueur $\overline{DI} = 1$ mètre à 2 mètres; puis il se raccorde avec le bief d'aval par une ligne IK inclinée de $0^m,07$ à $0^m,10$ par mètre; les bajoyers qui limitent latéralement le coursier sont prolongés sur la même longueur, soit en conservant le parallélisme de leur plan, soit avec un faible évasement, sans dépasser un angle de 3 ou 4 degrés (n° 87). Le point D se place à une hauteur $h' + \frac{2}{3}.0,16\frac{v^2}{2g}$ (*), soit $2,5h + 0,11\frac{v^2}{2g}$

(*) Ce coefficient $\frac{2}{3}$ a été fixé par simple aperçu : en le remplaçant par l'unité,

au-dessous du niveau de l'eau dans le bief d'aval. Voici alors ce qui se passe : l'eau franchit la différence de niveau de E à G, ou la hauteur $0,11 \frac{v^2}{2g}$, en vertu de sa vitesse $0,4v$, soit par une contre-pente superficielle, soit par un ressaut brusque avec contre-pente, de sorte que la charge perdue se réduit à $0,05 \frac{v^2}{2g}$.

Dans beaucoup de roues on a négligé cette précaution et l'on a placé le niveau du bief inférieur à la hauteur du point E et quelquefois même au-dessous. Nous allons montrer qu'on obtient de cette manière un rendement moindre. Pour cela, cherchons quelle doit être, avec la disposition ci-dessus décrite, la situation du coursier relativement au bief d'amont, et l'expression du rendement. En vue de simplifier cette recherche, nous admettrons que les lignes MA, DF, faiblement inclinées, font partie d'une même horizontale. Dans l'hypothèse d'une perte de charge nulle jusqu'à BC, la vitesse v serait due à la hauteur z du niveau N dans le bief d'amont, au-dessus du filet supérieur de la veine (n° 28); mais, à cause des pertes de charge, on affecte z d'un coefficient de réduction, que nous supposons (faute de données bien précises) égal à 0,95, c'est-à-dire que nous écrirons

$$\frac{v^2}{2g} = 0,95\,z,$$

d'où

$$z = \frac{1}{0,95}\,\frac{v^2}{2g}.$$

La distance du fond MA au niveau N sera donc $h + \frac{1}{0,95}\frac{v^2}{2g}$;

---

l'eau ne pourrait plus se relever jusqu'au point G, puisque cela exigerait une perte de charge nulle dans l'intervalle entre EF et GK; par conséquent l'eau du bief d'aval viendrait probablement noyer les aubes et gêner leur mouvement. C'est afin d'éviter un tel inconvénient que le nombre en question est pris au-dessous de 1; la valeur adoptée laisse disponible une hauteur $\frac{1}{3}\frac{v^2}{2g}$, soit $0,05\frac{v^2}{2g}$, pour contre-balancer la charge perdue par les molécules liquides après leur sortie de la roue, et assurer le dégorgement de celle-ci.

elle s'exprime aussi, d'une autre manière, par

$$H + 2,5\,h + \frac{2}{3}\cdot 0,16\,\frac{v^2}{2g},$$

en appelant H la chute absolue ou la hauteur entre G et N. Donc

$$h + \frac{1}{0,95}\ \frac{v^2}{2g} = H + 2,5\,h + \frac{2}{3}\cdot 0,16\,\frac{v^2}{2g},$$

et par suite

$$\frac{v^2}{2g} = 1,057\left(H + \frac{3}{2}h\right),$$

relation qui fait connaître v, pour une chute donnée, quand on se sera fixé la valeur de h. De là on déduira z et $h+z$, ce qui suffit pour définir la position du coursier. L'effet dynamique T_e, d'après ce qu'on a vu tout à l'heure, sera $AP\frac{v^2}{2g}$, ou, en faisant $\frac{v'}{v} = 0;4$,

(2) $$T_e = \left(0,48 - 2,1\,\frac{gh}{v^2}\right) P\,\frac{v^2}{2g};$$

substituant à la place de $\frac{v^2}{2g}$ sa valeur, cette relation devient

$$T_e = P\left[0,48 . 1,057\left(H + \frac{3}{2}h\right) - 2,1 . \frac{1}{2}h\right] = P(0,507H - 0,289h).$$

Le rendement $\frac{T_e}{PH}$ aura donc pour expression, en nombres ronds,

(3) $$\frac{T_e}{PH} = 0,50 - 0,3\,\frac{h}{H};$$

pour $h = 0^m,20$ et H compris entre 1 mètre et 2 mètres, il varierait de 0,44 à 0,47.

Maintenant supposons que, sans changer la chute H, on veuille placer le niveau du bief d'aval au-dessous de E ou tout au plus à la même hauteur; il est clair qu'il faudra relever le fond du coursier. Alors v diminuera, et h devra augmenter, pour que le débit P reste le même; par ces deux raisons T_e diminuera, comme le montre la formule (2) ci-dessus. Par

exemple, en supposant que le bief d'aval soit à la hauteur de E, l'équation qui détermine $\frac{v^2}{2g}$ deviendra

$$h + \frac{1}{0,95}\frac{v^2}{2g} = \mathrm{H} + 2,5h,$$

d'où l'on tire successivement, eu égard à l'équation (2),

$$\frac{v^2}{2g} = 0,95\left(\mathrm{H} + \frac{3}{2}h\right),$$

$$\mathrm{T}_e = \mathrm{P}\left[0,48\ 0,95\left(\mathrm{H} + \frac{3}{2}h\right) - 1,05h\right] = \mathrm{P}(0,456\mathrm{H} - 0,375h),$$

et, en arrondissant les nombres,

$$\frac{\mathrm{T}_e}{\mathrm{PH}} = 0,45 - 0,375\frac{h}{\mathrm{H}}.$$

Les données $h = 0^m,20$ et $\mathrm{H} = 1$ mètre conduiraient à un rendement de 0,38, au lieu de 0,44; avec $\mathrm{H} = 2$ mètres, on obtiendrait un rendement de 0,41, tandis que nous avions trouvé 0,47. Il y aurait une infériorité bien plus marquée, si l'on supposait le niveau du bief d'aval à la hauteur du fond du coursier, ainsi qu'on le pratiquait anciennement.

La disposition du canal de fuite que nous avons indiquée d'après M. Belanger, peut être avantageusement reproduite dans tous les systèmes de roues hydrauliques qui abandonnent l'eau avec une vitesse notable, sous forme d'un courant horizontal à filets parallèles. Le relèvement de la surface de ce courant ayant lieu au delà de la roue, celle-ci subira la même action de la part de l'eau, si tout est pareillement disposé depuis le bief d'amont jusqu'à la sortie de la roue. Avec le canal de fuite en question, le niveau s'élève, au lieu de rester au même point ou de s'abaisser; on obtient donc une même action sur la roue avec une chute moindre, et par conséquent on peut avoir davantage, à égalité de chute.

Cependant on voit par la formule (3) que le rendement de ces roues n'atteint jamais à 0,50, malgré toutes les précautions possibles; ce système est donc désavantageux comparativement à ceux que nous allons étudier.

121. *Roues à la Poncelet.* — La principale cause de perte de travail dans la roue en dessous à palettes planes est le passage brusque de la vitesse v à la vitesse v', deux fois et demie moindre, ce qui produit nécessairement dans le liquide une agitation tumultueuse. De cette agitation naissent de grandes déformations intérieures et un travail négatif produit par la viscosité, lequel se retranche de l'effet dynamique. L'eau possède aussi une grande vitesse de sortie, qu'on n'utilise tout au plus que partiellement. M. le général Poncelet s'est proposé d'éviter ces inconvénients, tout en conservant à la roue son caractère spécial, qui est de marcher rapidement; c'est-à-dire qu'il a cherché à remplir, pour la roue en dessous, les deux conditions générales d'un bon moteur hydraulique (nº 119), savoir : l'entrée de l'eau sans choc, et sa sortie sans vitesse. A cet effet, il a imaginé les dispositions suivantes.

Le fond du bief supérieur, sensiblement horizontal, est raccordé avec le coursier, dont le profil se compose d'une droite inclinée à $0^m,10$ par mètre, suivie d'une courbe.

La droite forme une pente du côté de la roue, et son prolongement serait tangent à la circonférence extérieure de celle-ci; elle se termine au point où l'eau commence à entrer dans la roue. La partie courbe est elle-même composée d'une courbe spéciale, sur le tracé de laquelle nous reviendrons tout à l'heure, et qui s'arrête au point où elle vient rencontrer la circonférence extérieure. A la suite, les aubes sont emboîtées dans une portion de coursier cylindrique, d'un développement un peu supérieur à l'intervalle entre les deux aubes consécutives, terminée par un approfondissement brusque; cet approfondissement a son sommet au niveau moyen des eaux d'aval; son but est de faciliter le dégorgement de la roue.

L'eau arrive dans le coursier en passant sous une vanne inclinée de 30 à 45 degrés environ sur la verticale; les côtés de l'orifice sont arrondis, afin d'éviter la perte de charge analogue à celle des ajutages cylindriques.

Les aubes sont assemblées entre deux couronnes annulaires qui empêchent l'eau de se déverser latéralement; l'écartement intérieur de ces couronnes dépasse de quelques centimètres la largeur de l'orifice laissé libre par la vanne. Les

aubes sont courbes; elles coupent la circonférence extérieure de la couronne sous un angle voisin de 30 degrés, et la circonférence intérieure sous un angle à peu près droit; leur courbure est d'ailleurs indifférente. Il y en a ordinairement 36 pour les roues de 3 à 4 mètres de diamètre, et 48 pour celles de 6 à 7 mètres.

La théorie exacte de cette roue est à peu près impossible dans l'état actuel de la science. On la simplifie d'abord en considérant la masse d'eau qui pénètre entre deux aubes consécutives, comme un simple point matériel qui, pendant son mouvement relatif dans la roue, n'éprouverait aucun frottement. On suppose de plus que la vitesse absolue de ce point est dirigée suivant l'horizontale qui touche la roue en son point le plus bas, et que les aubes se raccordent tangentiellement avec la circonférence extérieure. Soient maintenant v la vitesse absolue de l'eau à son entrée, et u la vitesse de la roue sur cette circonférence; l'eau possède relativement à la roue, à l'instant de son entrée dans les aubes, une vitesse horizontale $v-u$, en vertu de laquelle elle va se mouvoir à l'intérieur du vase formé par deux aubes consécutives. Si l'on assimile, pendant ce mouvement relatif de très-courte durée, le mouvement des aubes à une translation uniforme suivant l'horizontale, les forces apparentes s'annuleront, en sorte que la petite masse liquide dont nous avons parlé montera le long des aubes à une hauteur $\frac{(v-u)^2}{2g}$, en vertu de sa vitesse relative initale, peu à peu détruite par l'action de la pesanteur. Ensuite cette masse redescendra et reprendra la même vitesse relative $v-u$, quand elle sera sur le point de quitter l'aube; mais cette vitesse relative sera en sens contraire de la précédente, et par conséquent aussi en sens contraire de la vitesse u des aubes. La vitesse absolue de l'eau à sa sortie égalera donc la différence entre u et $v-u$, soit $2u-v$; on voit qu'elle sera nulle pourvu que l'on prenne $u=\frac{1}{2}v$, c'est-à-dire pourvu que la vitesse à la circonférence extérieure de la roue soit moitié de celle de l'eau dans le canal d'amenée.

On aurait donc ainsi réalisé les deux conditions princi-

pales qui font une bonne roue. Mais, comme l'a remarqué M. Poncelet, les choses ne se passent pas tout à fait ainsi dans la pratique.

L'eau ne peut pas entrer dans la roue tangentiellement à sa circonférence, comme on l'a supposé ci-dessus. En effet, nommons ds la longueur d'un élément de cette circonférence plongé dans le courant, b la largeur de la roue, β l'angle de ds avec la vitesse relative w de l'eau par rapport à la roue; il entrera pendant l'unité de temps, par la surface bds, un volume prismatique de liquide ayant pour section droite $bds \cdot \sin\beta$ et pour longueur w, soit un volume $bds \cdot w\sin\beta$, quantité nulle en même temps que β. Ainsi w doit couper la circonférence sous un certain angle qui ne peut être nul; il faut d'ailleurs le faire aussi petit que possible, afin que, au point de sortie, la vitesse relative du liquide et la vitesse des aubes puissent être sensiblement opposées et donner une résultante nulle; d'un autre côté, il ne faut pas qu'il soit trop petit, pour ne pas rendre difficile ou même impossible l'introduction de l'eau. C'est afin de concilier ces deux conditions contraires, qu'on a fixé la limite de 30 degrés pour l'angle β, qui sera également celui des aubes avec la circonférence extérieure, puisque les filets doivent entrer tangentiellement aux aubes. Mais alors la vitesse absolue de l'eau n'est plus nulle à la sortie, car ses deux composantes u et $v - u$ ne sont plus suivant la même ligne droite, mais font entre elles un angle de $180^\circ - 30^\circ$ ou 150°. En supposant toujours $v - u = u$, la résultante v' aurait pour valeur $2u\cos 75^\circ$ ou $v\cos 75^\circ$, ou enfin $0,259v$; cette résultante est d'ailleurs dirigée suivant la bissectrice de l'angle compris entre u et $v - u$, c'est-à-dire qu'elle est presque verticale, et par conséquent il est impossible de l'utiliser par une contre-pente; elle s'annule en produisant une agitation inutile dans le bief inférieur, d'où résulte un travail négatif égal à $P\frac{v'^2}{2g}$, P étant le débit de la chute. C'est donc aussi une perte de chute exprimée par $\frac{v'^2}{2g}$, soit $0,067\frac{v^2}{2g}$.

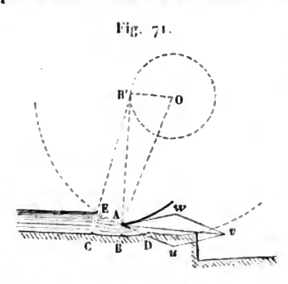
Comme cause de perte on peut encore citer le frottement de l'eau sur le coursier et contre les aubes. Une autre objec-

tion très-grave à la théorie ci-dessus, c'est que les molécules liquides ne se meuvent pas comme si elles étaient isolées; quand l'une d'elles, parvenue à la hauteur $\frac{(v-u)^2}{2g}$, entre les aubes, tend à redescendre, une autre vient d'entrer; et il est difficile d'admettre qu'il ne résulte pas là des perturbations notables dans le mouvement de ces molécules.

Par toutes ces raisons, l'expérience indique seulement un rendement moyen de 0,60 pour ces roues. C'est déjà un progrès très-considérable sur les anciennes roues en dessous à palettes planes, dont le rendement n'était guère que de 0,25 à 0,30 et ne pouvait jamais atteindre la limite de 0,50. Quant au rapport le plus favorable des vitesses u et v, l'expérience le donne égal à 0,55 au lieu de $\frac{1}{2}$.

On a dit tout à l'heure que la partie droite du coursier était suivie d'une courbe; voici la condition qui en détermine le tracé. La vitesse relative $v-u$ de l'eau à son entrée, égale à celle qui existe à la sortie, est aussi la même que la vitesse d'entraînement u; donc la vitesse absolue, résultante de ces deux vitesses, se trouve dirigée suivant leur bissectrice, et puisque l'angle de la tangente à la circonférence extérieure avec la vitesse relative est de 30 degrés, celui de la même tangente avec la vitesse absolue sera de 15 degrés. Il faut donc que tous les filets viennent rencontrer la circonférence sous un angle de 15 degrés. Pour en déduire la forme du fond, nous admettrons que toute normale au fond est simultanément normale à tous les filets qu'elle coupe. Soit alors A (*fig.* 71) le point d'entrée d'un filet dont la vitesse absolue Av fait un angle de 15 degrés avec la tangente Au; la perpendiculaire BAB' à Av est une normale au fond du coursier. En même temps, si l'on mène le rayon AO, l'angle OAB' sera égal à uAv, comme ayant leurs côtés perpendiculaires; donc OAB' = 15°. La

Fig. 71.



perpendiculaire $\overline{OB'}$ abaissée du centre O sur le prolongement de BA a donc une valeur constante et égale à $\overline{AO}\sin 15^\circ$. Par suite, toutes les normales au fond du coursier sont tangentes à un même cercle de rayon $\overline{OB'}$; la courbe CBD est donc une développante de cercle. On la termine d'abord à sa rencontre avec la circonférence OA, au point D, et de l'autre côté en un point C, tel que la normale CE, prise jusqu'à la circonférence OA, ait une longueur égale à l'épaisseur de la lame fluide. Cette épaisseur est d'ailleurs variable avec la chute; elle doit être, d'après l'expérience, de $0^m,20$ à $0^m,30$ pour les chutes au-dessous de $1^m,50$, et peut descendre à $0^m,10$ environ pour les chutes au-dessus de 2 mètres.

L'eau s'élève dans les aubes à une hauteur $\frac{(v-u)^2}{2g} = \frac{1}{4}\frac{v^2}{2g}$, laquelle diffère peu de $\frac{1}{4}$ H, en appelant H la hauteur de chute. Il faudrait donc que la distance des deux circonférences qui limitent les aubes fût au moins $\frac{1}{4}$ H; afin d'éviter plus certainement que l'eau ne possède encore de la vitesse relative en arrivant à l'extrémité des aubes, ce qui donnerait lieu à un jaillissement de l'eau à l'intérieur de la roue, M. Poncelet a conseillé de porter cette distance à $\frac{1}{3}$ H.

122. *Roues à aubes, dans un courant à grande section.* — Ces roues sont placées dans un courant dont la section a une largeur beaucoup plus grande que celle de la roue; assez souvent elles sont portées par des bateaux, et on les appelle *roues pendantes*. Dans l'impossibilité de calculer théoriquement l'effet dynamique du courant sur ces roues, nous nous contenterons de l'aperçu suivant.

La force horizontale F que la roue exerce sur le liquide étant constante, son impulsion dans l'unité de temps a numériquement la même valeur que son intensité. Si donc, en vertu de cette impulsion, une masse m d'eau passe, dans une seconde, de la vitesse v du courant à la vitesse u de la roue, on aura

$$F = m(v - u),$$

et par suite le travail exercé sur la roue dans le même temps, sensiblement égal à l'effet dynamique du courant, sera

$$\mathrm{F}u = mu(v-u).$$

Or M. le général Poncelet suppose que la masse m doit être proportionnelle à v, et de plus il est assez naturel d'admettre qu'elle est proportionnelle à l'aire S de la portion immergée des aubes. Il pose donc, en appelant B un coefficient et Π le poids du mètre cube d'eau,

$$m = \mathrm{BS}\,v\frac{\Pi}{g},$$

d'où résulte

$$\mathrm{F}u = \mathrm{B}\,\Pi\,\mathrm{S}\frac{vu(v-u)}{g}.$$

Cette formule est assez bien vérifiée par l'expérience, en prenant $\mathrm{B} = 0,8$.

Quand on donne v, le maximum de $\mathrm{F}u$ répond à $u = v - u$, puisque la somme de ces deux facteurs est constante : on en tire $u = \frac{1}{2}v$, comme on l'avait trouvé pour les deux roues précédemment étudiées. L'expérience indique le rapport $\frac{u}{v} = 0,4$ comme étant le plus convenable; ce rapport n'altère que très-faiblement le maximum théorique, dont la valeur est

$$0,4\,\Pi\,\mathrm{S}\,v\frac{v^2}{2g}.$$

Les aubes doivent avoir pour hauteur de $\frac{1}{5}$ à $\frac{1}{4}$ du rayon. Des rebords mis sur leur contour, du côté qui reçoit le choc de l'eau, augmenteraient l'action mutuelle. Le diamètre est ordinairement de 4 à 5 mètres et les aubes au nombre de 12.

123. *Des roues emboîtées dans un coursier circulaire, dites roues de côté.* — Ces roues ressemblent beaucoup, quant à leur construction, aux roues en dessous étudiées au n° 120; mais une différence essentielle, qui peut en produire une considérable dans le rendement, consiste dans le mode d'introduction

de l'eau; celle-ci ne pénètre plus dans la roue par sa partie inférieure, mais seulement à une faible hauteur en dessous de l'axe, c'est-à-dire par côté, comme l'indique le nom. Les questions que nous allons examiner successivement seront : 1° la vitesse la plus convenable de la roue; 2° le mode d'introduction de l'eau; 3° la situation du coursier relativement aux biefs d'amont et d'aval; 4° le calcul de l'effet dynamique. Enfin nous ferons connaître au sujet de cette roue diverses données pratiques.

(*a*) *Détermination de la vitesse de la roue.* — Soient

- Q le volume que la chute dépense dans une seconde;
- b la largeur de la roue qui sera aussi celle du coursier;
- h la hauteur de la partie plongée des aubes, à l'aplomb de l'arbre;
- c l'épaisseur des aubes;
- C leur espacement d'axe en axe, mesuré sur la circonférence extérieure;
- R le rayon de cette circonférence;
- u la vitesse de l'un quelconque de ses points.

L'eau comprise entre deux aubes consécutives à l'aplomb de l'arbre aura pour hauteur h, pour largeur moyenne $C\left(1-\frac{h}{2R}\right)-c$, et b pour épaisseur parallèlement à l'axe de la roue; son volume est donc $hbC\left(1-\frac{h}{2R}-\frac{c}{C}\right)$, et, attendu qu'il se débite pendant 1 seconde un nombre $\frac{u}{C}$ de ces volumes, on aura

$$Q=hbu\left(1-\frac{h}{2R}-\frac{c}{C}\right).$$

En pratique $\frac{h}{2R}$ et $\frac{c}{C}$ sont toujours d'assez petites fractions, dont la somme excède rarement 0,10; on aurait donc, sauf une légère erreur,

$$Q=0,9\,hbu.$$

Q étant donné, on peut satisfaire à cette relation en choisissant

arbitrairement u et h, et déterminant b en conséquence. Dans ce cas on prendrait h de $0^m,15$ à $0^m,25$, $u = 1^m,30$, et enfin $b = \frac{10 Q}{9 hu}$: la dépense $\frac{Q}{b}$ par mètre de largeur, exprimée par $0,9 hu$, varierait alors de 175 à 290 litres environ. Voici comment on justifie les valeurs que nous venons d'indiquer pour h et u.

Le calcul des pertes de charge subies par l'eau, dans son trajet du bief d'amont au bief d'aval, montre, comme on le verra plus loin, que toutes ces pertes augmentent avec la vitesse de la roue. On serait donc naturellement porté à prendre cette vitesse très-petite, pour augmenter le rendement. Mais plusieurs considérations montrent qu'il est bon de ne pas trop ralentir la roue. En effet, on voit que si u était très-petit, le produit $hb = \frac{10}{9} \frac{Q}{u}$ serait considérable, et il faudrait que l'une des deux dimensions b ou h fût assez grande. Or une grande largeur b donnerait lieu à une roue lourde, dispendieuse à établir, perdant beaucoup de travail par le frottement des tourillons; une grande valeur de h produirait des inconvénients déjà signalés à l'occasion de la roue en dessous (n° 120). Enfin, il est bon que la roue fasse jusqu'à un certain point office de volant pour les machines qu'elle met en mouvement, ce qui est encore une raison pour lui laisser une certaine vitesse. La valeur $u = 1^m,30$ a été indiquée par l'expérience. Quant à la hauteur h, il est bon, à cause du jeu inévitable entre la roue et le coursier, qu'elle ne descende pas beaucoup au-dessous de $0^m,15$, pour ne pas perdre une trop grande proportion d'eau.

Mais il arrive quelquefois qu'en prenant $u = 1^m,30$ et h dans les limites ci-dessus énoncées, on est conduit à une grande valeur de b, ou à une valeur qui dépasse une limite imposée, soit par les localités, soit par l'économie de la construction. On est alors forcé d'augmenter h ou u. Il ne convient guère que h surpasse $0^m,45$ ou $0^m,50$, et quand cette limite est atteinte, il ne reste plus qu'à augmenter u.

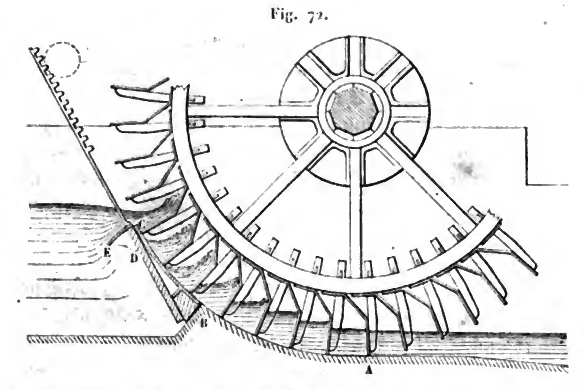
Exemple : soit $Q = 0^{mc},50$. En prenant $u = 1^m,30$, $h = 0^m,20$, on aurait $b = \frac{10}{9} \frac{Q}{hu} = 2^m,14$, valeur généralement très-admis-

sible. Mais si, par suite de circonstances particulières, on ne pouvait dépasser une largeur de $0^m,71$, environ le tiers de $2^m,14$, on augmenterait d'abord h; en le portant à $0^m,50$, on en tirerait $u = \frac{10}{9}\frac{Q}{bh} = 1^m,56$. Ou bien encore, comme la vitesse $1^m,56$ n'est pas encore très-grande, on se contenterait de prendre $h = 0^m,40$, ce qui conduirait à $u = 1^m,96$.

(*b*) *Mode d'introduction de l'eau.* — Ainsi qu'on l'a déjà dit (nº 119), afin de diminuer autant que possible la perte de travail produite par l'introduction de l'eau dans une roue, il faut s'arranger pour avoir une faible vitesse relative de l'eau à son point d'entrée, ou, quand cela ne peut être réalisé, il faut que la vitesse relative soit tangente au premier élément des aubes, et que l'eau se meuve à l'intérieur de la roue sans choc, en glissant simplement le long des parois solides.

Si la roue est lente, c'est-à-dire si la vitesse à la circonférence est aux environs de $1^m,30$ par seconde, on amènera l'eau de la manière qu'indique la *fig.* 72 ci-après.

Fig. 72.



Le coursier en maçonnerie AB se prolonge par une pièce en fonte BC, dite *col de cygne;* ABC est un arc de cercle coïncidant avec la circonférence extérieure de la roue, sauf un jeu aussi faible que possible. Une vanne D, munie à sa partie supérieure d'un petit appendice métallique arrondi E, peut glis-

ser en s'appuyant sur le col de cygne; un système de deux crémaillères unies par des roues dentées permet d'élever cette vanne au point convenable. L'appendice métallique E forme le seuil d'un déversoir par-dessus lequel l'eau s'écoule pour arriver à la roue; ce seuil doit être environ à $0^m,20$ ou $0^m,27$ au-dessous du niveau dans le bief d'amont.

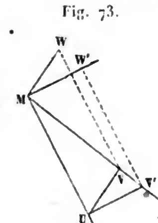
Le déversoir étant ainsi extrêmement rapproché de la roue, la vitesse absolue de l'eau à son point d'entrée, due seulement à la faible dénivellation qui se produit dans le bief d'amont, sera par conséquent petite; et comme la roue va elle-même lentement, la vitesse relative sera modérée, et l'agitation qu'elle entraînera peu sensible. On voit que pour atteindre ce but il faut réduire suffisamment la charge sur le seuil du déversoir, car dans le cas contraire la vitesse d'écoulement aurait une valeur plus ou moins forte; il ne faut pas d'ailleurs pousser la réduction trop loin, afin que la perte d'eau entre la roue et le coursier ne soit pas importante. Les limites de $0^m,20$ à $0^m,27$ remplissent assez bien cette double condition; elles répondent à peu près aux limites de $0^m,15$ et $0^m,25$ indiquées ci-dessus pour l'épaisseur h du courant à l'aplomb de l'arbre, car un déversoir sans contraction latérale pourra débiter environ 180 litres par mètre de largeur, avec $0^m,20$ de charge sur le seuil, et 280 litres avec la charge de $0^m,27$.

L'appendice métallique arrondi E a pour but de diminuer la contraction de la lame déversante, et de dépenser ainsi plus d'eau à égalité de charge : la charge et la vitesse d'écoulement sont donc moindres, pour une dépense donnée, ce qui diminue l'agitation du liquide à son entrée. La pièce E peut également servir à diriger la veine de manière qu'elle ne coupe pas la circonférence extérieure de la roue sous un angle trop fort; cela est avantageux, car, toutes choses égales d'ailleurs, la vitesse relative de l'eau croît avec l'angle dont il s'agit, comme le montrent les considérations suivantes, bien qu'elles s'appliquent plus spécialement à un cas différent.

Examinons maintenant le cas des roues rapides. La vitesse u de la roue à sa circonférence a été fixée ainsi qu'on l'a vu tout à l'heure; mais nous disposons encore, pour atténuer la perte due à l'introduction de l'eau, de la vitesse

absolue v que celle-ci possède, en intensité et en direction. Soient, au point M d'entrée (*fig.* 73), $\overline{MU}$ la vitesse u de la roue, $\overline{MV}$ la vitesse absolue v de l'eau, γ l'angle de ces deux droites. La ligne $\overline{MW}$, égale et parallèle à $\overline{UV}$, sera la vitesse w de l'eau relativement à la roue. Nous devons chercher d'abord à rendre w aussi petit que possible. Or on aurait $w=0$, si γ était nul et v égal à u; mais il n'est pas possible que l'eau entre sans vitesse relative et sous un angle nul. Un filet pour lequel γ aurait la valeur 0, serait tangent à la circonférence extérieure de la roue; il est clair que les autres filets juxtaposés parallèlement à celui-là ne pourraient pas remplir la même condition, sans que l'épaisseur totale de tous ces filets réunis ne fût elle-même nulle, ce qui est inadmissible dans le cas d'une dépense finie. On a vu que dans la roue à la Poncelet l'angle γ avait été pris égal à 15 degrés; dans la roue de côté on le suppose assez ordinairement égal à 30 degrés, pour faciliter un peu plus l'introduction de l'eau. Alors, puisque U est un point déterminé ainsi que la direction MV, la plus petite valeur possible de $\overline{UV}=w$ serait la perpendiculaire abaissée de U sur MV, ou bien $u\sin\gamma$, ou enfin $\frac{1}{2}u$ si l'on prend $\gamma=30°$; v aurait pour valeur correspondante $u\cos\gamma$, ou $0{,}866\,v$ avec $\gamma=30°$.

Fig. 73.



Toutefois ce ne sont pas ces valeurs que l'on adopte pour v et w. Il est bon, en effet, que le premier élément des aubes soit dans la direction de w, afin de diminuer l'agitation de l'eau à l'intérieur de la roue. Or si ce premier élément était perpendiculaire à MV, il ferait un angle de 120 degrés avec MU, c'est-à-dire avec la circonférence de la roue, et par conséquent un angle de 30 degrés avec le rayon qui passe en M. Quand ce rayon, par l'effet de la rotation, arriverait sur la verticale, à l'aplomb de l'arbre, le premier élément de l'aube serait déjà incliné de 30 degrés sur la verticale, et il le serait encore plus au point d'émersion, ce qui gênerait le mouvement de la roue. C'est pourquoi on préfère que la vitesse relative MW passe

par l'axe de rotation et soit perpendiculaire à MU; le parallélogramme des vitesses est alors représenté par le rectangle MUV'W', dans lequel $\overline{MU} = u$, $\overline{MW'} = w$, $\overline{MV'} = v$. L'angle γ conservant toujours sa valeur de 30 degrés, il en résulte les relations

$$v = \frac{u}{\cos 30^\circ} = 1,155u,$$

$$w = u \tang 30^\circ = 0,577u.$$

L'intensité de v et son angle avec u étant désormais déterminés, il reste à savoir comment en pratique on réalisera ces deux conditions. Pour y arriver, on calculera d'abord la hauteur $\frac{v^2}{2g}$; on l'augmentera un peu, du dixième de sa valeur par exemple, pour tenir compte approximativement des pertes de charge subies par le liquide depuis le bief supérieur jusqu'à son point d'entrée, et $1,1\frac{v^2}{2g}$ sera la hauteur de ce point d'entrée au-dessous du niveau dans le bief d'amont. La direction de la vitesse v s'obtiendrait en menant par le point d'entrée qu'on vient de déterminer (puisqu'il se trouve sur la circonférence extérieure de la roue et sur une horizontale connue) une ligne inclinée de 30 degrés sur ladite circonférence. On obligerait ensuite les filets à prendre cette direction au moyen d'un coursier de $0^m,50$ à $0^m,60$ de longueur, dont le dernier élément serait tangent à v, et dans lequel l'eau arriverait, soit en passant sous une vanne, soit par un déversement sans obstacle, le fond de ce coursier étant alors le seuil même du déversoir.

(*c*) *Situation du coursier relativement aux biefs d'amont et d'aval.* — Nous n'avons ici qu'à répéter à peu près exactement ce qui a déjà été dit à l'occasion de la roue en dessous à aubes planes. Quand l'eau possède, en quittant la roue, une vitesse notable, il est avantageux de placer le niveau de l'eau entre les aubes, à l'aplomb de l'arbre, au-dessous du niveau du bief inférieur, d'une quantité égale à $\frac{2}{3}\frac{u^2}{2g}$, u étant la vitesse de la roue à sa circonférence. La vitesse u ayant une

valeur précédemment fixée, ainsi que la hauteur h de l'eau entre les aubes, la situation du fond du coursier est donc aussi définie, du moins en dessous de l'arbre. Du côté de l'amont, ce fond a un profil circulaire de rayon sensiblement égal à celui de la roue; on le raccordera avec le bief d'aval, en suivant les règles indiquées par M. Belanger, dont nous avons parlé au n° 120.

Quand la roue est lente, u étant $1^m,30$ environ, $\frac{2}{3}\frac{u^2}{2g}$ est une hauteur un peu au-dessous de $0^m,06$. Pour peu que la chute soit grande, la perte ou le gain de $0^m,06$ n'a pas beaucoup d'importance, et l'on pourrait alors, par économie, supprimer le canal de fuite après la roue, ou tout au moins se dispenser de faire un canal maçonné ayant une section régulière. Le niveau de l'eau entre les aubes devrait alors coïncider avec celui du bief d'aval. Mais dans le cas des grandes valeurs de u, surtout si en même temps on n'a qu'une chute un peu faible, la hauteur $\frac{2}{3}\frac{u^2}{2g}$ pourra constituer un profit notable qu'on ne devra pas négliger.

(*d*) *Calcul de l'effet dynamique d'une chute d'eau qui met en mouvement une roue de côté.* — En appelant P le poids de l'eau dépensée par seconde, H la hauteur de chute mesurée entre les deux biefs supposés stagnants, on sait (n° 118) que l'effet dynamique T_e de la chute pendant chaque seconde a pour valeur le produit de P par la hauteur H, diminuée de la perte de charge moyenne qu'ont subie les molécules liquides par l'effet des frottements, dans leur passage d'un bief à l'autre. Or cette perte de charge se compose de plusieurs parties que nous allons analyser. Nous conserverons les notations déjà employées ci-dessus (n° 123, *a*, *b*, *c*).

1°. *Perte de charge entre le bief d'amont et le point d'entrée de l'eau dans la roue.* — On la rend faible en évitant, au moyen de contours arrondis, les contractions suivies d'épanouissement brusque, et en plaçant le point d'entrée aussi près que possible du bief d'amont. Néanmoins il y a toujours une certaine perte : nous l'évaluons, par simple aperçu, à un chiffre

compris entre $0,05\,\frac{v^2}{2g}$ et $0,1\,\frac{v^2}{2g}$. S'il y avait un canal entre la roue et le bief d'amont, il faudrait tenir compte du frottement dans ce canal, par un calcul analôgue à celui qui sera donné tout à l'heure pour le coursier circulaire.

2°. *Perte de charge due à l'introduction de l'eau.* — D'après ce qui a été dit au n° 119, cette perte peut être évaluée à $\frac{w^2}{2g}$, soit à $\frac{1}{2g}(v^2 + u^2 - 2uv\cos\gamma)$. Dans le cas des roues lentes, elle a peu d'importance, comme toutes les autres pertes que nous passons en revue; dans une roue rapide, si l'on a pris $\gamma = 30°$, $v = \frac{u}{\cos\gamma}$, on aura

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{u^2}{2g}\tan^2\gamma = \frac{1}{3}\,\frac{u^2}{2g}.$$

Quand on a la précaution d'introduire l'eau avec une vitesse relative tangente aux aubes, et qu'on lui offre une surface le long de laquelle elle peut monter en vertu de cette vitesse relative, il est probable que la pesanteur intervient aussi pour contribuer à anéantir cette vitesse, et c'est autant de moins à consommer en agitation tumultueuse. Cette considération justifie l'emploi des aubes polygonales, telles qu'on les a représentées dans la *fig.* 72, aubes dont la disposition a été imaginée par M. Belanger en 1819. Elles se composent de trois plans faisant entre eux des angles de 45 degrés, dont le plus éloigné du centre est dirigé suivant un rayon, le plus rapproché touche la circonférence de la couronne, et le troisième forme un pan coupé avec les deux autres. Les plans qui sont tangents à la couronne laissent entre eux des intervalles vides pour faciliter le dégagement de l'air. Il faut d'ailleurs que le point d'entrée de l'eau soit au-dessous du centre de la roue, afin que l'eau introduite trouve devant elle un plan incliné ascendant.

Nous manquons de données pour apprécier l'effet produit par l'emploi de cette espèce d'aubes.

3°. *Perte de charge produite par le frottement de l'eau sur le coursier circulaire.* — On sait que le frottement d'un courant

découvert sur son lit, par mètre carré, a pour expression $0,4\,U^2$ (n° 69), U étant la vitesse moyenne. On a vu, en outre, que si l'on nomme V et W la vitesse à la surface et au fond, ces quantités sont liées par les relations approximatives (n° 65) :

$$U = \frac{1}{2}(V + W), \quad U = 0,80\,V;$$

d'où résulte

$$U = \frac{4}{3}W.$$

Le frottement par mètre carré de lit serait donc $0,4 \cdot \frac{16}{9} W^2$, soit $0,71\,W^2$.

Maintenant si L est la longueur du coursier circulaire, $L(b + 2h)$ sera la surface mouillée, et le frottement total s'exprimera par $0,71\,L(b + 2h)\,u^2$, attendu que la vitesse de fond n'est autre ici que la vitesse à la circonférence de la roue. Les points d'application de toutes les forces qui composent ce frottement se mouvant tous avec la vitesse u, leur travail négatif dans l'unité de temps sera $0,71\,L(b + 2h)\,u^3$; on obtiendra la perte de chute correspondante en divisant par P ou par $1000\,bhu$, ce qui donne $0,00071\,\frac{L(b + 2h)}{bh}u^2$, soit encore $0,014\,\frac{L(b + 2h)}{bh}\,\frac{u^2}{2g}$.

4°. *Perte de charge depuis l'aplomb de l'arbre jusqu'au bief inférieur.* — Si le niveau de l'eau entre les aubes, au-dessous de l'arbre, dépasse d'une hauteur η le niveau du bief inférieur, la vitesse de l'eau va s'accroître en vertu de cette chute. Cette vitesse, sensiblement égale à u au sortir de la roue, deviendra $\sqrt{u^2 + 2g\eta}$, pour le point où l'eau commence à entrer dans le bief inférieur. A cette vitesse correspond une perte de charge $\eta + \frac{u^2}{2g}$, comme on l'a vu au n° 119.

Quand on adopte la disposition du canal de fuite recommandée par M. Belanger (n° 120), η devient négatif et égal à $\frac{2}{3}\frac{u^2}{2g}$; la perte se réduit donc à $\frac{1}{3}\frac{u^2}{2g}$.

(*e*) *Données pratiques diverses.* — Pour le nombre de bras, on peut poser la même règle que celle qui se rapporte aux roues en dessous (nº 120).

Le nombre d'aubes est multiple du nombre des bras; leur espacement peut être d'une fois et un tiers à une fois et demie la charge sur le sommet du déversoir, quand il s'agit des roues lentes. Dans les roues rapides, il faudrait toujours prendre cet espacement un peu supérieur à la portion de la circonférence interceptée par la lame d'eau qui arrive sur la roue. Il est nuisible de trop espacer les aubes, en ce que certains filets pourraient tomber d'une assez grande hauteur avant de les rencontrer; il est aussi nuisible de les trop serrer, parce que l'eau entrerait péniblement dans la roue et qu'elle serait en partie projetée au dehors.

La hauteur des aubes dans le sens du rayon ne dépasse guère $0^m,70$. Dans l'état normal, la capacité des vases formés par deux aubes consécutives devrait être à peu près double du volume d'eau qu'ils contiennent : on pourrait donc prendre la hauteur dont il s'agit égale à $2h$, toutes les fois que h ne dépassera pas $0^m,35$.

Le diamètre de la roue doit être de $3^m,50$ au moins; rarement il dépasse 6 ou 7 mètres. L'axe de l'arbre est placé un peu plus haut que le niveau du bief d'amont.

Les roues de côté conviennent parfaitement aux chutes de 1 mètre à 2 mètres ou $2^m,50$. En dehors de ces limites, on peut encore souvent en faire un usage avantageux.

Lorsqu'une roue de côté lente est établie dans de bonnes conditions, l'effet dynamique de la chute peut aller assez près de la puissance absolue; M. le général Morin, dans certaines expériences sur cette espèce de roues, a trouvé jusqu'à 0,93 de rendement. Mais, attendu que la mesure d'un débit est toujours un peu entachée d'incertitude, et que par conséquent la puissance absolue d'une chute peut être imparfaitement évaluée, il sera prudent de ne pas compter d'avance, en pratique, sur un rendement supérieur à 0,80.

124. *Exemple de calculs sur une roue de côté rapide.* — La roue dont il s'agit a été expérimentée par M. le général Morin; elle appartenait à la fonderie de Toulouse.

L'eau sortait du bief d'amont sous une vanne levée de $0^m,147$ au-dessus du seuil, lequel était situé à $1^m,423$ en contre-bas du niveau dans le bief d'amont. L'orifice étant prolongé par un coursier à peu près horizontal, la vitesse v avec laquelle l'eau arrive à la roue sera due à la charge sur la portion supérieure de l'orifice (nº 28), sauf un coefficient de correction assez approché de 1, que nous évaluerons à 0,95; ainsi

$$v = 0,95\sqrt{2g(1^m,423 - 0^m,147)} = 4^m,75.$$

La vitesse à la circonférence de la roue était $u = 3^m,06$, et l'angle de u avec v, au point d'introduction, avait pour valeur 30 degrés. Il résulte d'abord de ces indications que la perte de charge pour amener l'eau du bief d'amont à la roue devait être $\frac{1}{10}$ de la charge $(1^m,423 - 0^m,147)$, soit $0^m,13$; on peut calculer aussi celle que produisait l'introduction de l'eau, laquelle avait pour expression (nº 123, d)

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{1}{2g}(v^2 + u^2 - 2uv\cos 30^\circ) = 0^m,34.$$

Le niveau de l'eau entre les aubes, à l'aplomb de l'arbre, se trouvant à la hauteur du niveau dans le bief d'aval, il faut compter encore une perte égale à $\frac{u^2}{2g}$ (nº 123, d), soit $0^m,48$.

Enfin, il y a la perte sur le coursier circulaire. La profondeur de l'eau en dessous de l'arbre et la largeur de la roue ayant respectivement pour valeurs $0^m,20$ et $1^m,55$, et la longueur du coursier étant $2^m,50$, on trouve pour cette perte $0,014\,\frac{2,50.1,95}{0,20.1,55}\,\frac{u^2}{2g}$ ou $0^m,11$.

Toutes ces pertes réunies font une hauteur de

$$0^m,13 + 0^m,34 + 0^m,48 + 0^m,11 \quad \text{ou de} \quad 1^m,06.$$

La chute étant de $1^m,72$, on voit que le rendement calculé serait seulement de $\frac{1,72 - 1,06}{1,72}$, c'est-à-dire de 0,38; M. Morin a trouvé expérimentalement 0,41, nombre qui correspond à une chute utilisée de

$$1^m,72 \times 0,41 = 0^m,705,$$

au lieu de $0^m,66$ que le calcul précédent nous donne. Cette différence, peu sensible d'ailleurs, de $0^m,045$ tient probablement à une évaluation un peu trop forte de la charge perdue par l'introduction de l'eau : nous avons vu en effet que dans certains cas une portion de la vitesse relative pouvait s'éteindre par l'action de la pesanteur, ce qui diminuerait d'au-

tant l'agitation à l'intérieur des aubes et donnerait lieu à une perte de charge moindre.

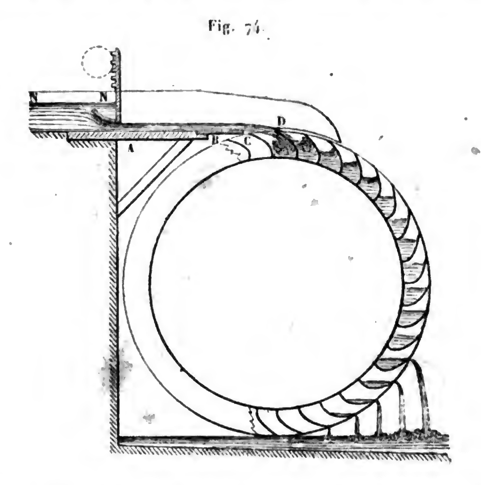
Pour augmenter le rendement de cette roue sans changer sa vitesse, voici ce qu'on aurait pu faire. D'abord placer le coursier à $\frac{2}{3}\frac{u^2}{2g}$, soit $0^m,32$, plus bas qu'il n'était, en ayant soin de disposer le canal de fuite conformément aux indications de M. Belanger (n° 120), c'est-à-dire sans variation brusque de section, et avec un fond à pente modérée, jusqu'à son raccordement avec le bief d'aval; puis relever le point d'introduction de manière à réduire la vitesse v à $\frac{u}{\cos 30^\circ}$, soit à $\frac{3^m,06}{0,866} = 3^m,52$. La perte depuis la roue jusqu'au bief d'aval aurait alors été réduite à $\frac{1}{3}\frac{u^2}{2g}$ ou a $0^m,16$, au lieu de $0^m,48$; la perte pour l'introduction se réduirait aussi à la même valeur $0^m,16$, au lieu de $0^m,34$; ce qui procurerait un bénéfice total de $0^m,50$. Les autres pertes restant sensiblement les mêmes, la chute utilisée serait $0^m,66 + 0^m,50 = 1^m,16$, et le rendement s'élèverait à $\frac{1,16}{1,72} = 0,67$ environ.

125. *Roues à augets ou roues en dessus.* — Ces roues ne sont plus, ainsi que les précédentes, emboîtées dans un coursier. L'eau s'introduit à la partie supérieure; elle entre dans les augets, qui sont en quelque sorte des vases formés par deux aubes consécutives, terminés latéralement par des couronnes annulaires, et au fond par une surface cylindrique continue, concentrique à la roue. Nous allons passer en revue les questions que peut présenter l'établissement de ce genre de moteurs.

(*a*) *Introduction de l'eau dans la roue.* — On emploie pour introduire l'eau deux dispositions qui sont représentées ci-dessous (*fig.* 74 et 75). Dans la *fig.* 74, le sommet D de la roue est placé un peu au-dessous du niveau NN du bief supérieur, à $0^m,20$ ou $0^m,25$ plus bas que ce niveau; l'eau est amenée jusqu'à un point C situé à $0^m,40$ ou $0^m,50$ en amont de l'aplomb de l'arbre, au moyen d'un canal AB en planches, terminé par une plaque métallique très-mince BC qui, prolongée, serait à peu près tangente en D à la circonférence extérieure. Les bords latéraux du canal ABC se prolongent à 1 mètre au delà du point C, pour empêcher l'eau de tomber à côté de la roue.

L'eau franchit la distance CD en vertu de sa vitesse acquise, et entre dans la roue à peu près au sommet de celle-ci. Comme

Fig. 74.

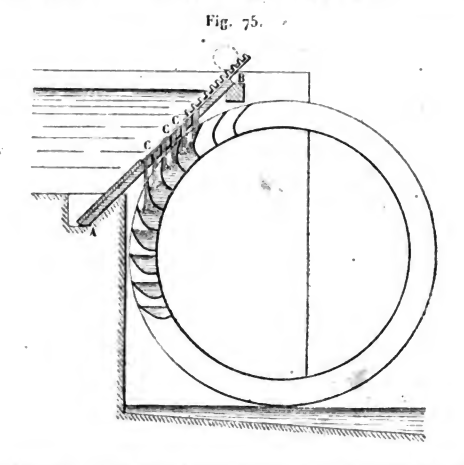


les bords des augets ne laissent entre eux qu'une ouverture assez étroite, on donne à l'eau qui coule dans le canal ABC la forme d'une lame mince, en la faisant passer sous une vanne placée vers A et levée seulement de 0ᵐ,06 à 0ᵐ,10. Cette vanne présente un orifice à bords arrondis, pour éviter les remous à la sortie des filets liquides. Comme on le voit, il y a peu de hauteur entre le point d'entrée de l'eau et le niveau du bief d'amont; par conséquent l'eau arrive dans la roue avec une faible vitesse absolue, et si la roue tourne lentement, comme cela doit être pour avoir un bon rendement, la vitesse relative sera elle-même faible, ainsi que la perte de travail qu'elle entraîne.

La disposition de la *fig.* 75, qui a été souvent employée, paraît beaucoup moins bonne; mais on est quelquefois forcé d'en faire usage si le niveau du bief d'amont est très-variable. Ce bief se termine tout près de la roue par une cloison en bois AB, percée de fentes CC à faces verticales, analogues à celles d'une persienne; une vanne mobile permet de recou-

vrir tel nombre de ces fentes que l'on veut, de manière à ne dépenser que le volume d'eau disponible. L'inconvénient de

Fig. 75.



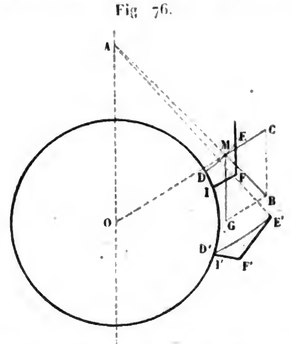
cette méthode, c'est que l'eau tombe d'une assez grande hauteur dans l'intérieur des augets et acquiert ainsi beaucoup de vitesse; l'agitation de l'eau dans la roue devient beaucoup plus considérable. Elle conduit d'ailleurs, pour une même hauteur de chute, à augmenter le diamètre de la roue, ce qui la rend plus lourde et plus dispendieuse. En outre, le point où les augets ont pris une inclinaison suffisante pour qu'ils commencent à se déverser, est situé à une plus grande hauteur au-dessus du point le plus bas de la roue, car cette hauteur est proportionnelle au diamètre; il y a donc ainsi une plus grande perte de chute, attendu que le travail de la pesanteur sur les molécules sorties des augets, pendant qu'elles tombent dans le bief inférieur, est évidemment perdu pour la roue.

(*b*) *Forme de la surface de l'eau dans les augets; vitesse de la roue.* — Nous avons démontré (n° 20) qu'un liquide pesant et homogène ne peut pas être en équilibre relativement à un système qui tourne uniformément autour d'un axe horizontal. Si malgré cela on admet que l'équilibre relatif de l'eau existe approximativement dans les augets, ce qui peut avoir

lieu quand l'agitation due à l'entrée du liquide est à peu près calmée, voici comment on déterminera la forme affectée par la surface libre.

Soit M (*fig.* 76) une molécule liquide de masse m, située à la distance $\overline{OM} = r$ de l'axe de rotation O; elle est en équilibre relativement à un système de comparaison qui tourne autour de cet axe avec la vitesse angulaire ω. Cet équilibre existe sous l'action : 1° du poids mg, force réelle, qui agit verticalement suivant MG; 2° de la force centrifuge $m\omega^2 r$, dirigée suivant le prolongement MC de OM, force apparente à introduire parce qu'il s'agit seulement d'un équilibre relatif; 3° des pressions produites par les molécules environnantes. On sait par les théories de l'Hydrostatique que la résultante des deux premières forces est normale à la surface de niveau (ou d'égale pression) qui passe en M. Si donc M se trouve à la surface libre, comme la pression y est partout la pression atmosphérique, la résultante en question sera normale à cette surface.

Fig. 76.



Prenons $\overline{MG} = mg$, $\overline{MC} = m\omega^2 r$, la diagonale $\overline{MB}$ du parallélogramme MGBC représente la résultante de mg et de $m\omega^2 r$, et par conséquent elle est normale à la surface libre. Or on a, en menant la verticale OA jusqu'à la rencontre de cette normale

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{MG}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{GB}},$$

d'où

$$\overline{OA} = \frac{\overline{MG} \cdot \overline{OM}}{\overline{GB}} = \frac{mg \cdot r}{m\omega^2 r} = \frac{g}{\omega^2};$$

la distance $\overline{OA}$ est donc constante, ce qui montre que dans une section plane perpendiculaire à l'axe toutes les normales

à la surface libre sont concourantes. Le profil de la surface libre, s'il y a équilibre relatif, est donc nécessairement un cercle décrit du point A comme centre.

Ce résultat prouve qu'effectivement l'équilibre relatif est en toute rigueur impossible. Car à mesure que l'auget se déplace, le point A restant toujours le même, la surface libre aurait un rayon croissant, ce qui est incompatible avec la supposition de l'équilibre relatif, puisque dans ce cas la forme de la surface libre ne devrait pas changer. La forme que nous trouvons est celle que l'eau tend à prendre, sans pouvoir s'y maintenir.

Pour achever de déterminer le cercle qui limite l'eau dans un auget donné, cercle dont nous ne connaissons encore que le centre A, il faut tenir compte de la quantité d'eau que l'auget a dû recevoir. A cet effet, soient N le nombre des augets, b la largeur de la roue parallèlement à l'axe, Q le volume dépensé par la chute dans une seconde. Chaque auget occupe sur la circonférence un angle $\frac{2\pi}{N}$ (exprimé en arc du cercle de rayon 1), et comme la roue tourne avec une vitesse angulaire ω, $\frac{\omega N}{2\pi}$ représentera le nombre d'augets débités dans l'unité de temps. Chacun d'eux renferme donc un volume $\frac{2\pi Q}{\omega N}$, de manière que l'aire occupée par l'eau dans le profil transversal de l'auget a pour valeur $\frac{2\pi Q}{b\omega N}$. L'arc DME sera donc déterminé, puisque l'on connaît son centre et la surface DMEFI qu'il doit intercepter dans le profil donné de l'auget.

Dans une certaine position I'E'F' de l'auget, la surface libre, déterminée comme il vient d'être dit, rase le bord extérieur E'; cette position peut être trouvée par tâtonnement. Dès que l'auget la dépasse, l'eau commence à se déverser; pour toute position en dessous de celle-là, il est clair que la surface libre aura pour profil un cercle décrit de A comme centre et rasant le bord extérieur, ce qui permettra de déterminer le volume d'eau restant encore dans l'auget. Quand le cercle dont il s'agit passera entièrement au-dessous du profil de l'auget, le déversement sera fini.

En pratique, s'il s'agit de roues ne possédant qu'une vitesse angulaire modérée, $\frac{g}{\omega^2}$ sera une grande distance, et les cercles décrits de A comme centre, pour limiter la surface de l'eau dans les divers augets, pourront être confondus avec des horizontales. Exemple : la roue a 4 mètres de diamètre et une vitesse de 1 mètre à la circonférence; il en résulte $\omega = \frac{1}{2}$, et $\frac{g}{\omega^2} = 39^m,24$; le centre A serait donc à 39 mètres environ au-dessus de l'axe.

Lorsqu'une roue en dessus tourne rapidement, la distance $\frac{g}{\omega^2}$ peut être assez petite pour que la figure de la surface libre présente une concavité notable en dessous de l'horizontale; ainsi, plus la vitesse angulaire augmente, moins un auget dans une position donnée peut contenir d'eau, ce qui se comprend facilement à priori, puisque la force centrifuge devient de plus en plus grande, et que cette force tend à projeter l'eau en dehors de l'auget. C'est là un inconvénient des roues rapides; elles perdent une plus grande quantité d'eau par déversement, et par suite donnent un rendement moindre.

Les pertes de charge produites par l'introduction de l'eau dans les augets, et par la vitesse de l'eau quand elle quitte la roue, augmentent aussi avec la vitesse angulaire. On se trouverait donc conduit, pour économiser autant que possible la force motrice, à faire tourner la roue très-lentement. Mais nous avons déjà vu, à propos de roues de côté, qu'il ne convient pas de ralentir une roue hydraulique outre mesure, sans quoi pour dépenser un volume d'eau notable il faudrait établir l'appareil avec de très-grandes dimensions. Une vitesse à la circonférence de 1 mètre à $1^m,50$ donne de bons résultats.

(c) *Largeur de la roue; profondeur des augets dans le sens du rayon.* — On a dit ci-dessus que dans une roue bien disposée l'eau sort du bief d'amont en passant sous une vanne levée de $0^m,06$ à $0^m,10$ au-dessus du seuil, qui lui-même est à $0^m,20$ ou $0^m,25$ au-dessous du niveau de ce bief. Si nous

appelons

Q la dépense par seconde;
b la largeur commune de la roue et de l'orifice sous la vanne;
x la levée de la vanne;
h la hauteur de l'eau d'amont au-dessus du seuil;
v la vitesse de sortie de l'eau sous la vanne;

la vitesse v sera due à peu près à la charge $h - x$, et comme on s'arrange pour qu'il y ait peu de contraction, on peut poser

$$Q = 0,95\, bx \sqrt{2g(h - x)},$$

ce coefficient 0,95 étant destiné à tenir compte, par aperçu, de la perte de charge que l'eau éprouve toujours dans un mouvement quelconque, et de la contraction qui subsisterait encore partiellement. En faisant dans cette relation $h = 0^{m},20$, $x = 0^{m},06$, on en tire $\frac{Q}{b} = 0^{mc},095$; de même pour $h = 0^{m},25$, $x = 0^{m},10$ on trouverait $\frac{Q}{b} = 0^{mc},163$; c'est-à-dire qu'avec la vanne disposée comme il a été dit, on pourrait dépenser de 95 à 163 litres par mètre de largeur de roue. Il serait facile de dépenser moins que 95 litres, en diminuant un peu h et x; on dépenserait au besoin plus que 163 litres par le moyen inverse. Mais l'expérience fait connaître que, pour être dans les meilleures conditions, la dépense par mètre de largeur ne doit guère excéder 100 litres; car autrement on pourrait se trouver conduit, soit à faire les augets profonds, soit à faire tourner la roue rapidement, ce qui tendrait à augmenter la vitesse de l'eau quand elle entre ou sort de la roue, et par suite à diminuer le rendement.

Pour montrer la relation qui existe entre la profondeur p des augets dans le sens du rayon et la dépense $\frac{Q}{b}$ par mètre de largeur, conservons les notations déjà employées dans le présent numéro, et nommons en outre

R le rayon de la roue;
u sa vitesse à la circonférence;
$C = \frac{2\pi R}{N}$ l'écartement des augets, e leur épaisseur.

Le volume d'un auget sera égal au produit de ses trois dimensions moyennes, savoir : sa longueur b, sa hauteur p, sa largeur $C\left(1-\frac{p}{2R}\right)-c$; ce volume a donc pour valeur $pbC\left(1-\frac{p}{2R}-\frac{c}{C}\right)$. Or il serait bon, pour retarder le déversement de l'auget, qu'il ne fût plein d'eau qu'au tiers; le volume de l'eau qu'il contient serait donc $\frac{1}{3}pbC\left(1-\frac{p}{2R}-\frac{c}{C}\right)$, et comme nous l'avons déjà exprimé ci-dessus par $\frac{2\pi Q}{\omega N}$, on aurait

$$\frac{1}{3}pbC\left(1-\frac{p}{2R}-\frac{c}{C}\right)=\frac{2\pi Q}{\omega N};$$

soit, à cause de $C=\frac{2\pi R}{N}$ et $\omega=\frac{u}{R}$,

$$\frac{Q}{b}=\frac{1}{3}pu\left(1-\frac{p}{2R}-\frac{c}{C}\right).$$

Comme le facteur entre parenthèses dans le second membre diffère peu de 1, on pourrait poser simplement

$$\frac{Q}{b}=\frac{1}{3}pu.$$

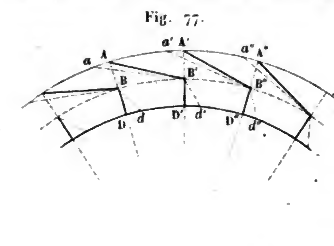
Cette équation montre que lorsque $\frac{Q}{b}$ est grand, il faut nécessairement qu'un des facteurs p ou u le soit aussi. Par exemple, si l'on a $\frac{Q}{b}=0,100$ litres et $u=1$ mètre, on en conclurait $p=0^{m},30$. Il est désirable que p ne dépasse pas beaucoup cette valeur de $0^{m},30$. Cependant il est bien entendu que si l'on avait beaucoup d'eau à dépenser, il faudrait se résigner, soit à reculer un peu cette limite, soit à avoir une roue plus rapide, soit enfin à remplir les augets plus qu'au tiers.

La dépense par mètre de largeur ayant été fixée, d'après ce qui précède, autant que possible au-dessous de 100 litres par seconde, la largeur de la roue résulte naturellement du volume d'eau total à débiter. Il est rare qu'on établisse des roues ayant une largeur supérieure à 5 mètres.

(*d*) *Tracé géométrique des augets.* — L'écartement des augets est un peu plus grand que leur profondeur ; assez souvent cette dernière dimension est de $0^m,25$ à $0^m,28$, et l'autre aux environs de $0^m,32$ à $0^m,35$. Leur nombre doit être divisible par celui des bras, pour la facilité des assemblages, à moins que la couronne et les bras ne soient d'une seule pièce.

Quant à leur profil, on emploie souvent, pour les roues en bois, le tracé représenté ci-dessous (*fig.* 77). Après avoir divisé la circonférence extérieure OA en parties AA', A'A'',... toutes égales à l'écartement C des augets, on prend $\overline{AD} = p$, profondeur des augets dans le sens du rayon, et l'on décrit la circonférence OD ; on décrit encore une troisième circonférence OB à égale distance des deux premières. Les rayons OA, OA', OA'',..., étant ensuite menés par les points de division, on joindra AB', A'B'',... et l'on obtiendra les profils AB'D', A'B''D'',..., qui, sauf l'épaisseur, seront ceux des augets.

Fig. 77.



Des constructeurs habiles pensent que, au lieu des lignes telles que AB', A'B'',..., on pourrait employer les lignes *a*B', *a'*B'',..., qui produisent un certain recouvrement mutuel des augets ; pareillement, aux lignes BD, B'D', B''D'',... on a quelquefois substitué les droites inclinées B*d*, B'*d'*, B''*d''*,... Ces deux modifications ont pour but commun d'augmenter la profondeur des augets dans le sens parallèle à la circonférence, et par suite de retarder le déversement. Elles ont pour inconvénient de compliquer un peu la construction ; d'ailleurs, il ne faudrait pas exagérer le recouvrement A*a*, sans quoi le passage restant libre entre le point B et le côté *a*B' serait peut-être trop diminué. Cette distance minimum doit excéder de quelques centimètres la levée de la vanne, afin que l'eau entre bien dans la roue et ne soit pas projetée au dehors.

Lorsque les augets sont construits en tôle, on remplace les

profils brisés ci-dessus définis, par des profils courbes qui s'en écartent peu.

Les augets en bois ont généralement de 15 à 30 millimètres d'épaisseur; en tôle, ils n'ont que de 2 à 4 millimètres, ce qui augmente un peu leur capacité, toutes choses égales d'ailleurs. Ils sont limités latéralement par des couronnes annulaires, qu'on relie à l'arbre au moyen de bras d'autant plus nombreux que la roue est plus haute. Ils présentent un fond continu sur toute la circonférence DD'D''...; pour les roues très-larges, ce fond doit être soutenu par des appuis en un ou deux points placés entre les couronnes extrêmes. On pourrait également employer dans ce cas une ou deux couronnes intermédiaires.

(*e*) *Calcul de l'effet dynamique d'une chute qui fait marcher une roue à augets.* — Les deux circonstances principales qui donnent lieu aux pertes de charge à retrancher de la chute absolue pour avoir la chute utilisée, sont la vitesse relative à l'entrée de l'eau dans la roue et celle qu'elle possède à l'instant où elle tombe au niveau du bief inférieur.

Une évaluation rigoureuse de la première est presque impossible; pendant le temps que l'auget se remplit, le point d'entrée des molécules qui arrivent successivement change d'une manière continue. Les premières rencontrent les parois solides; celles qui viennent après rencontrent l'eau déjà entrée, et de là résulte un phénomène bien difficile à analyser. On en simplifie l'étude en admettant, comme on l'a fait au n° **119**, que la hauteur $\frac{w^2}{2g}$, due à la vitesse relative w de l'eau à son point d'entrée, représente la perte de charge en question. D'ailleurs, si l'on appelle v la vitesse absolue de l'eau, u la vitesse de la roue, γ l'angle de ces deux vitesses, comme w est le troisième côté du triangle formé par v et u, on aura

$$w^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\gamma.$$

En réalité la rencontre de l'eau avec la roue se fait en des points qui varient sur toute la profondeur de l'auget. Eu égard à ce que le rayon de la roue est grand relativement à l'épaisseur de la couronne des augets, cela ne change pas sensible-

ment u ; mais pour évaluer v et γ, peut-être serait-il bien de supposer le point d'entrée, non sur la circonférence extérieure, mais vers le milieu de la profondeur des augets.

Passons à la seconde perte. Soit une molécule de masse m quittant la roue à une hauteur z au-dessus du bief d'aval. Cette molécule n'ayant dans l'auget qu'un mouvement relatif insensible, possède, à l'instant où elle sort, la vitesse u de la roue, et à l'instant où elle arrive au niveau du bief inférieur elle possède une vitesse v' égale à $\sqrt{u^2+2gz}$. Ensuite elle perd progressivement toute sa vitesse en cheminant dans le bief inférieur, sans que son niveau piézométrique change (car nous supposons la surface libre horizontale dans le bief); elle éprouve donc (n° 33) une perte de charge égale à

$$\frac{1}{2g}(u^2+2gz)=\frac{u^2}{2g}+z.$$

Pour toutes les molécules composant le poids P dépensé dans une seconde, ce sera une perte moyenne exprimée par $\frac{1}{P}\Sigma mg\left(\frac{u^2}{2g}+z\right)$ ou bien encore par $\frac{u^2}{2g}+\frac{1}{P}\Sigma mgz$, la somme Σ s'étendant à toutes ces molécules. Ce sera la seconde hauteur à retrancher de la hauteur absolue de la chute ; elle est composée de deux termes dont nous connaissons immédiatement le premier, et il reste seulement à voir comment on calculerait le terme $\frac{1}{P}\Sigma mgz$, qui exprime l'effet spécial du déversement des augets.

La quantité $\frac{1}{P}\Sigma mgz$ n'est autre chose que la hauteur moyenne comprise entre le point de sortie d'une molécule et le niveau du bief d'aval ; comme tous les augets sont dans des circonstances identiques, il suffit évidemment de chercher cette moyenne pour les molécules contenues dans un auget. A cet effet, on déterminera d'abord, comme il a été dit ci-dessus (b), les positions de l'auget pour lesquelles le déversement commence et finit, et, pour un certain nombre de positions intermédiaires, on constatera la quantité d'eau qui reste dans l'auget.

Soient alors

- c la hauteur du bord extérieur de l'auget au-dessus du niveau d'aval quand le déversement commence, et que l'auget, encore plein, contient le volume d'eau q_0;
- c' la hauteur analogue quand le déversement vient de se terminer;
- y la hauteur dont est descendu ce même bord extérieur pendant que le volume d'eau q_0 s'est réduit à q.

Pendant un déplacement infiniment petit de la roue, auquel répond l'abaissement dy, il se vide un volume infiniment petit $-dq$, qui tombe dans le bief d'aval, de la hauteur $c-y$; la hauteur moyenne du déversement sera donc $\frac{1}{q_0}\int_0^{q_0}(c-y)\,dq$. Or l'intégration par parties donne

$$\int (c-y)\,dq = q(c-y) + \int q\,dy,$$

et, en observant qu'aux limites $q=0$ et $q=q_0$ répondent $y=c-c'$ et $y=0$,

$$\int_0^{q_0}(c-y)\,dq = q_0 c + \int_{c-c'}^{0} q\,dy = q_0 c - \int_0^{c-c'} q\,dy;$$

la moyenne cherchée est donc

$$\frac{1}{\text{P}}\Sigma mgz = c - \frac{1}{q_0}\int_0^{c-c'} q\,dy.$$

Le calcul de l'intégrale définie $\int_0^{c-c'} q\,dy$ s'effectuera par la méthode de Simpson, à défaut d'analyse rigoureuse, puisque nous sommes en mesure de connaître la valeur de q répondant à une valeur donnée de y. Si l'on voulait se contenter d'une approximation plus ou moins grossière, mais ordinairement suffisante, on pourrait, sous le signe $\int$, remplacer la variable q par la moyenne $\frac{1}{2}q_0$ de ses valeurs extrêmes; on trou-

verait alors

$$\frac{1}{P}\Sigma mgz = c - \frac{1}{2}(c - c') = \frac{1}{2}(c + c').$$

Aux pertes précédemment calculées il faudrait encore en ajouter une pour amener l'eau du bief d'amont à la roue. Ainsi que nous l'avons déjà vu en étudiant d'autres roues, elle sera très-faible si l'on adopte une bonne disposition ; alors on pourrait l'évaluer à $0,1\frac{v^2}{2g}$.

(*f*) *Données diverses.* — Les molécules liquides prenant, pendant leur chute qui suit le déversement, une vitesse sensiblement verticale, il n'y a guère moyen d'utiliser cette vitesse par une contre-pente, et par conséquent le niveau d'aval doit raser le point le plus bas de la roue. Pour les roues qui tournent rapidement, peut-être serait-il avantageux de les emboîter dans un coursier qui ne laisserait échapper l'eau qu'à la partie inférieure, et avec une vitesse à peu près horizontale ; on aurait soin de munir chaque auget d'une soupape, placée vers le fond, et s'ouvrant de dehors en dedans, pour permettre à l'air de rentrer quand l'eau sortirait. Alors il serait possible d'atténuer beaucoup la perte de chute produite par la vitesse que l'eau possède en quittant la roue ; mais par contre on augmenterait, dans une mesure notable, les frais de premier établissement, et probablement aussi d'entretien.

Les roues en dessus conviennent parfaitement aux chutes de 4 à 6 mètres ; au-dessous de 3 mètres, la roue de côté serait préférable. D'ailleurs, comme elles ont un diamètre à peu près égal à la hauteur de chute, leur emploi deviendrait pour ainsi dire impossible avec des chutes très-élevées.

L'expérience montre qu'avec une roue en dessus bien établie et marchant lentement, le rendement de la chute d'eau peut aller jusqu'à 0,80 et même plus. Mais dans les roues rapides il tombe quelquefois à 0,40.

§ III. — Des roues hydrauliques à axe vertical.

126. *Anciennes roues à cuillers ou à cuve.* — Les palettes des roues à cuillers présentent une forme légèrement concave dans le sens de leur longueur et dans celui de leur largeur, ce qui justifie le nom de *cuiller* qu'on leur a donné. Elles sont disposées autour d'un arbre vertical, et reçoivent à peu près horizontalement le choc d'une veine fluide qui, sortie d'un réservoir sous une charge assez grande, est amenée tout près de la roue par un canal en planches. Pour obtenir une action plus intense, on fait arriver l'eau dans la concavité des palettes (nº 103).

Appelons

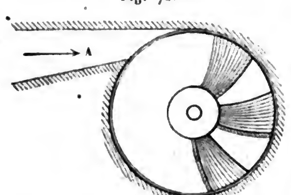
- v la vitesse absolue, supposée horizontale et perpendiculaire à la palette frappée, de la veine qui arrive sur la roue;
- ω la section de cette veine;
- u la vitesse des palettes au point où elles reçoivent le choc;
- Π le poids du mètre cube d'eau.

La vitesse relative de l'eau et des palettes sera horizontale et égale à $v-u$; donc si l'on assimile le phénomène à celui du choc d'une veine fluide contre un plan (nº 103), la force exercée sur la roue sera $\Pi\omega\dfrac{(v-u)^2}{g}$; le travail que cette force fait sur la roue dans l'unité de temps aura pour valeur $\Pi\omega\dfrac{u(v-u)^2}{g}$, quantité sensiblement égale à l'effet dynamique de la chute (nº 118). Cette expression varie avec u, et prend son maximum pour $u=\frac{1}{3}v$; ce maximum est $\Pi\omega\dfrac{4}{27}\dfrac{v^3}{g}$, ou, en remarquant que $\Pi\omega v$ donne le poids P dépensé par seconde, $\dfrac{8}{27}\mathrm{P}\dfrac{v^2}{2g}$. La hauteur $\dfrac{v^2}{2g}$ ne peut être qu'une fraction de la chute H; ainsi l'effet dynamique se trouve en dessous de $\dfrac{8}{27}\mathrm{PH}$, et le rendement au-dessous de $\dfrac{8}{27}$ ou 0,30 environ. Ce nombre ne

peut d'ailleurs être considéré comme parfaitement exact, car l'imperfection des théories relatives à la résistance des fluides nous a contraint d'évaluer plus ou moins grossièrement l'action réciproque de l'eau et de la roue : toutefois l'expérience vient confirmer le résultat du calcul, du moins en ce sens qu'elle indique pour ce genre de moteurs un rendement toujours assez faible, variable de 0,16 à 0,33.

La roue à cuve ne donne pas un résultat beaucoup meilleur. Une cuve cylindrique verticale en maçonnerie reçoit l'eau du bief d'amont par un canal d'amenée A (*fig.* 78), dont les côtés latéraux présentent un évasement de $\frac{1}{5}$ environ en s'éloignant de la cuve, c'est-à-dire que ses côtés font un angle à peu près égal à 11 ou 12 degrés. L'un d'eux est d'ailleurs tangent à la circonférence de la cuve. La roue, dont l'axe coïncide avec celui de la cuve, consiste en un certain nombre de palettes régulièrement distribuées autour d'un arbre vertical. Les palettes, en coupe horizontale, ont une forme légèrement courbe et concave du côté où elles reçoivent l'action de l'eau; coupées par un cylindre concentrique à la cuve, elles donneraient des lignes inclinées plus ou moins analogues à des arcs d'hélice. Le jeu de l'appareil se comprend sans peine : l'eau arrive par le canal A avec une assez grande vitesse, tend à circuler tout autour de la cuve, et, rencontrant les palettes sur son passage, les oblige à tourner ainsi que l'arbre qui les porte. En même temps elle obéit à l'action de la gravité, traverse la roue par l'espace libre entre les palettes et tombe dans le bief d'aval, qui doit être très-peu au-dessous. On voit que l'eau doit éprouver une agitation considérable en entrant dans la roue, et de plus qu'elle agit trop peu de temps sur celle-ci pour bien perdre sa vitesse relative. Aussi le rendement, quelquefois très-faible et voisin de 0,15, ne dépasse jamais 0,40.

Fig. 78.



Nous allons laisser de côté ces machines primitives pour en étudier d'autres beaucoup plus perfectionnées.

127. *Des turbines.* — Le principe des roues à réaction, tel qu'on le mentionne ordinairement dans les Traités de Physique, est très-anciennement connu; mais il paraît que c'est seulement vers le milieu du siècle dernier qu'on a songé à l'utiliser et à l'appliquer à la construction des roues hydrauliques d'une certaine puissance. Segner, professeur à Gœttingue, et plus tard Euler, en 1752, en firent l'objet de leurs recherches.

En 1754 (*), Euler composa une autre machine, toujours fondée sur le principe des roues à réaction, mais en différant par plusieurs dispositions importantes; cette machine offre la ressemblance la plus frappante avec une roue fort en usage aujourd'hui, appelée dans l'industrie *turbine Fontaine*, du nom de l'habile constructeur qui en a établi un très-grand nombre depuis quelques années, en étendant et complétant d'ailleurs, dans le détail de l'application, l'idée première d'Euler. Il ne semble pas que l'on ait beaucoup employé ce genre de roue jusque vers 1824, époque où la question fut de nouveau étudiée par M. Burdin, ingénieur en chef des Mines, qui construisit une machine analogue nommée par lui *turbine à réaction*. Dans les années suivantes, M. Fourneyron, s'inspirant des idées de M. Burdin, établit des turbines dans lesquelles il introduisit des perfectionnements très-notables. Depuis, les turbines se sont répandues et multipliées à profusion : divers mécaniciens en ont construit, de sorte qu'il en existe un très-grand nombre de modèles qui diffèrent plus ou moins les uns des autres.

Sans nous attacher à suivre plus complétement l'historique des transformations successivement éprouvées par ce genre de roues à axe vertical, nous allons d'abord décrire sommairement les trois types principaux auxquels peuvent se rattacher les turbines aujourd'hui en usage; puis nous en donnerons une théorie générale, et enfin nous reviendrons sur quelques détails auxquels s'attache un intérêt particulier.

128. *Turbine Fourneyron.* — Cette turbine est représentée, dans ses organes essentiels, par la *fig.* 79 (*voir* la planche gravée).

(*) *Histoire de l'Académie de Berlin.*

L'eau du bief d'amont A descend dans le bief d'aval B en suivant une cuve à section horizontale circulaire dont CD est l'ouverture supérieure. Cette cuve, parfaitement fixe, repose sur des appuis en charpente ou en maçonnerie; elle se prolonge par un autre cylindre circulaire en fonte EGIF, mobile verticalement, qu'on peut abaisser plus ou moins, ainsi qu'on l'expliquera par la suite. Le fond KK'K''L''L'L de la cuve est relié à un cylindre creux *abcd* que l'on soutient à sa partie supérieure; ce cylindre, nommé *tuyau porte-fond*, est en outre destiné à préserver du contact de l'eau l'arbre vertical *ef*, auquel un mouvement de rotation doit être communiqué par la chute. On comprend en effet que si l'eau arrivait jusqu'à l'arbre, il serait nécessaire, pour éviter les fuites, de faire passer celui-ci dans des garnitures hermétiques fortement serrées, ce qui occasionnerait des frottements, indépendamment de ceux qui naîtraient du contact même du fluide. L'arbre, ainsi que le tuyau porte-fond, sont d'ailleurs concentriques avec la cuve.

Entre le bas GI de la vanne cylindrique EGIF et le plateau annulaire KL, il reste tout autour du périmètre du fond une ouverture GK, IL, par laquelle peut s'écouler l'eau. Mais comme il est important, ainsi qu'on le verra, que les filets ne s'écoulent pas dans une direction quelconque, on les guide à leur sortie par un certain nombre de cloisons cylindriques à génératrices verticales, que soutient le plateau KL et dont la coupe horizontale définit suffisamment la disposition; parmi ces cloisons directrices, les unes, telles que *gh*, vont rejoindre les parois K'K'', L'L'': les autres, telles que *ik*, sont plus courtes, afin d'éviter un trop grand rapprochement de ces cloisons, vers leurs extrémités voisines de l'axe.

En regard de l'ouverture GK, IL, se trouve la turbine proprement dite, comprise entre deux plateaux annulaires SRMN, UTPQ; ces plateaux sont reliés entre eux par les aubes de la turbine, qui sont des cylindres à génératrices verticales, donnant en coupe horizontale une série de courbes, telles que *lm*, *pq*, etc.; le plateau inférieur est de plus relié à l'arbre par une surface de révolution T$\alpha\beta$P, calée sur celui-ci, de manière à former un tout parfaitement solidaire. L'arbre repose sur un pivot inférieur; un levier $\gamma\delta$, mû par une tige $\delta\varepsilon$ qui se termine en un point facilement accessible, permet de soulever tant

soit peu cet appui, lorsque l'usure des surfaces frottantes a produit une légère descente de l'arbre.

Pour comprendre comment l'action de l'eau va mettre la machine en mouvement, supposons d'abord que l'arbre soit rendu fixe : alors les filets liquides, sortant de la cuve par les cloisons directrices, viendront frapper la concavité des aubes; ils exerceront donc une pression plus forte sur la partie concave que sur la partie convexe d'un canal, tel que *lmpq*, formé de deux aubes consécutives, d'abord à cause du choc, et aussi à cause de la courbure qu'ils sont obligés de prendre. Il résulterait de là un série d'actions dont les moments, relativement à l'axe, tendraient tous à faire tourner le système des aubes dans le sens de la flèche marquée sur la coupe horizontale ; donc il se produira effectivement une rotation dans le sens dont nous parlons, si l'on rend à l'arbre la liberté de tourner, même en lui opposant une résistance dont le moment serait inférieur au moment total des actions motrices.

Afin de diminuer autant que possible la perte de charge éprouvée par les molécules liquides pendant leur trajet du bief d'amont jusqu'à la roue, on a soin : 1° de donner à l'ouverture CD un diamètre assez grand et d'en arrondir les bords; 2° de munir la vanne cylindrique d'appendices en bois GG', II', placés à la partie inférieure et arrondis sur leurs bords, comme le représente la figure. On évite ainsi dans une mesure suffisante les remous et tourbillons causés par les contractions successives des filets d'eau. La garniture de bois n'est pas d'ailleurs continue; elle se compose d'une série de madriers occupant chacun l'espace libre entre les deux cloisons directrices consécutives, de manière que la vanne puisse s'abaisser sans obstacle jusqu'au fond KK'L'L.

Nous verrons, en nous occupant de la théorie générale des turbines, comment on remplit les autres conditions essentielles d'un bon moteur hydraulique.

129. *Turbine Fontaine.* — La *fig.* 80 (*voir* la planche gravée) représente une coupe générale de cette machine par un plan vertical. Un pieu ou support métallique vertical AB est fixé aussi bien que possible dans la maçonnerie formant le fond du bief inférieur; il soutient à la partie supérieure A un

arbre creux en fonte GDEF qui l'entoure; cet arbre est prolongé au-dessus par un arbre plein, sur lequel sont les transmissions de mouvement. Une vis, avec un écrou C, permet de régler la position de l'arbre dans le sens vertical. A peu près au niveau des eaux d'aval (ou, si l'on veut, au-dessous) se trouve la turbine HIKLMNOP, reliée invariablement au bas de l'arbre creux; elle est comprise entre deux surfaces de révolution autour de l'axe vertical du système, lesquelles ont HK et IL pour lignes méridiennes; dans l'espace intermédiaire on place les aubes, qui reçoivent l'action de l'eau, et en même temps rendent les deux surfaces solidaires. L'eau arrive du bief supérieur *a* sur les aubes de la turbine en s'écoulant par une série de canaux distributeurs, dont les quadrilatères QRHI, STMN représentent la coupe. Ces canaux sont répartis d'une manière continue sur un espace annulaire, immédiatement au-dessus des aubes; ils sont limités latéralement par les surfaces QHTN, RISM; l'intervalle entre ces surfaces reste d'ailleurs libre, sauf le volume occupé par les cloisons directrices, qui le subdivisent en un certain nombre de canaux inclinés, dans lesquels les filets liquides se meuvent avec une figure et une direction déterminées.

Afin de donner une idée nette de la forme des cloisons directrices et des aubes, imaginons qu'on fasse une coupe par un cylindre ou un cône concentrique avec l'axe du système, passant par le milieu des intervalles QR, HI, KL, et qu'on développe cette coupe sur un plan. La coupe développée des cloisons directrices donnera une série de courbes telles que *cd*, *ef*,..., comprises dans une bande droite ou circulaire; de même, pour les aubes de la turbine, on obtiendra les courbes *dg*, *fh*,..., également comprises dans une autre bande. Ces courbes ayant été tracées conformément à des règles dont on s'occupera plus loin, reconstituons par la pensée le cylindre ou cône qui avait été développé, et concevons des surfaces gauches engendrées par une droite horizontale qui s'appuierait constamment sur l'axe et successivement sur chacune des courbes en question; nous aurons ainsi défini les surfaces des cloisons et aubes.

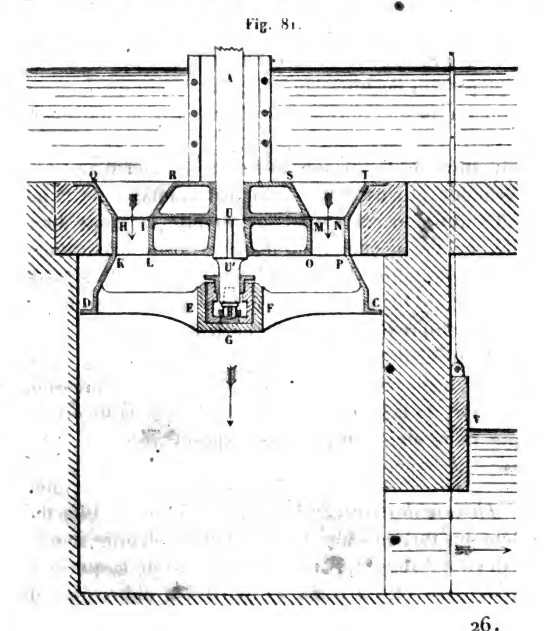
Nous pensons qu'il est inutile de décrire les dispositions par suite desquelles l'eau du bief d'amont ne trouve, pour s'écou-

ler dans le bief d'aval, d'autre issue que les canaux formés par les cloisons directrices ; à cet égard, la figure paraît donner des indications suffisamment claires.

On se rendrait compte, comme dans le cas de la turbine Fourneyron (n° 128), du sens dans lequel tournerait la machine par suite de l'action de l'eau; ce sens est celui de la flèche tracée au-dessous du développement des aubes.

130. *Turbine Kœcklin.* — La turbine Kœcklin, dont la disposition d'ensemble a été primitivement imaginée par un mécanicien nommé Jonval, ne se distingue pas essentiellement de la turbine Fontaine quant à l'arrangement des aubes et des cloisons directrices, ni quant au mode d'action de l'eau. La différence la plus remarquable consiste en ce que la turbine est au-dessus du niveau du bief d'aval, comme le représente la *fig.* 81, coupe verticale de l'appareil. Les cloisons direc-

Fig. 81.



trices, établies dans un espace annulaire dont les trapèzes QRHI, STMN, indiquent la coupe, sont reliées à une espèce de tourteau en fonte qui embrasse l'arbre AB, sans cependant faire corps avec lui, ni le presser fortement : elles forment une suite de canaux inclinés, par lesquels l'eau du bief d'amont s'écoule et arrive sur les aubes de la turbine, placées immédiatement au-dessous, comme dans la turbine Fontaine. Ces aubes font corps avec un autre tourteau calé sur l'arbre; elles occupent l'espace annulaire HIKL, MNOP.

Les canaux inclinés compris entre deux aubes ou cloisons consécutives sont limités extérieurement par une cuve fixe en fonte posée sur les bords d'un puits en maçonnerie; c'est une surface de révolution autour de l'axe AB, ayant QHKD pour profil méridien. Au bas de cette cuve se trouvent un certain nombre de bras qui soutiennent un siége central sur lequel on place le pivot de l'arbre tournant.

L'eau sortie de la turbine, par les orifices KL, OP, s'écoule jusqu'au bief inférieur en descendant par le puits en maçonnerie, et passant ensuite dans une ouverture qu'on peut rétrécir ou au besoin fermer à volonté, par le moyen d'une vanne V.

La situation de la turbine au-dessus du bief d'aval permet très-aisément (et c'est là son principal avantage) de la mettre à sec; il suffit pour cela de laisser ouverte la vanne du canal de fuite, et d'empêcher l'eau d'arriver jusqu'aux orifices des canaux distributeurs QRHI, STMN. On peut alors visiter la machine et faire les réparations jugées nécessaires. D'ailleurs la hauteur comprise entre le plan horizontal KLOP et le niveau du bief d'aval ne doit pas être comptée comme une perte de chute, car elle correspond à une diminution de pression sur l'eau qui sort de la turbine, et l'on verra, par la théorie générale que nous allons maintenant exposer, que cela fait une compensation exacte.

131. *Théorie des trois turbines précédentes.* — Une théorie complète des turbines que nous venons de décrire sommairement, devrait d'abord renfermer la solution de la question générale suivante : Étant données toutes les dimensions d'une

turbine, sa situation relativement aux biefs d'amont et d'aval, et enfin sa vitesse angulaire, déterminer le volume d'eau qu'elle dépense et l'effet dynamique de la chute. On chercherait ensuite les conditions nécessaires pour que le rendement fût un maximum, avec une chute et une dépense données.

Mais nous ne traiterons point la question en termes aussi généraux. Afin de simplifier la recherche théorique dont nous avons à nous occuper, nous admettrons dès à présent que toutes les dimensions ont été choisies et les dispositions prises, pour que la turbine remplisse le mieux possible les conditions d'un bon moteur hydraulique. Ainsi, depuis le bief d'amont jusqu'à la sortie des cloisons directrices, on aura eu soin d'éviter les contractions et les changements brusques de direction des filets, on aura poli et arrondi les surfaces en contact avec l'eau qui s'écoule, afin que dans cette première partie de son trajet elle n'éprouve aucune perte de charge sensible. A son point d'entrée dans la turbine, elle possède une certaine vitesse relative; on s'arrangera pour que cette vitesse soit dirigée tangentiellement au premier élément des aubes, afin qu'il n'y ait pas de choc et d'agitation tumultueuse à la suite. C'est une condition qu'il est possible de remplir, en choisissant convenablement la vitesse de la roue, ainsi que les directions des aubes et cloisons au point où elles viennent se rejoindre. Enfin, comme l'eau sort de la turbine dans toutes les directions autour d'une circonférence, et qu'il n'est guère possible d'éviter que la vitesse absolue qu'elle possède alors ne soit consommée en pure perte pour produire des remous dans le bief inférieur, nous supposerons qu'on a eu soin de rendre cette vitesse petite. Tout cet ensemble de circonstances simplifiera considérablement nos calculs, en nous permettant d'y négliger, sans erreur trop sensible, les diverses pertes de charge éprouvées par l'eau jusqu'à son point de sortie de la turbine, perte dont l'expression analytique, plus ou moins compliquée, surchargerait nos formules et les rendrait beaucoup moins maniables. Seulement, il est bien entendu que nos résultats seront applicables exclusivement au cas où la machine fonctionne dans les conditions du rendement maximum.

Cela posé, appelons

v la vitesse absolue de l'eau quand elle quitte les cloisons directrices et qu'elle va entrer dans la turbine;

u sa vitesse d'entraînement et w sa vitesse relative, au même point, par rapport à la turbine prise pour système de comparaison;

v', u' et w' les trois vitesses analogues pour le point où l'eau quitte les aubes de la turbine:

p et p' les pressions correspondantes en ces deux points;

p_a la pression atmosphérique;

r et r' les distances des deux mêmes points à l'axe de la rotation du système (*);

H la hauteur de la chute, mesurée entre les niveaux des biefs d'amont et d'aval, supposés sensiblement stagnants;

h la hauteur positive ou négative, du point d'entrée de l'eau à l'intérieur de la turbine, au-dessous du niveau du bief d'aval;

h' la hauteur dont l'eau descend pendant son mouvement à l'intérieur de la turbine, quantité nulle quand on adopte les dispositions de M. Fourneyron;

Π le poids du mètre cube d'eau.

Maintenant, l'ensemble des intervalles entre deux cloisons directrices consécutives étant considéré comme un premier système de canaux courbes, et l'ensemble des intervalles entre deux aubes consécutives comme un second système, on appellera encore,

---

(*) Ces deux distances sont souvent égales dans les turbines Fontaine et Kœcklin; mais elles diffèrent forcément l'une de l'autre dans la turbine Fourneyron. Il convient en outre d'observer que dans les turbines Fontaine et Kœcklin les orifices par lesquels l'eau sort des cloisons directrices ou de la turbine ont une certaine dimension perpendiculairement à l'axe de rotation; les longueurs r et r' doivent, bien entendu, se rapporter aux points moyens de ces orifices. Ainsi, dans la *fig.* 81 par exemple, r serait la moyenne entre $\overline{UM}$ et $\overline{UN}$; r' serait de même $\frac{\overline{UO}+\overline{UP}}{2}$. On fait d'ailleurs en sorte que $\overline{MN}$ et $\overline{OP}$ soient petits relativement à r et r', pour que la considération unique du filet d'eau moyen n'entraîne pas d'erreur sensible.

Pour le premier système de ces canaux :

β l'angle aigu sous lequel ils coupent le plan des orifices qui les terminent à la distance r de l'axe ; cet angle β est aussi celui sous lequel la circonférence $2\pi r$ est coupée par les cloisons ;

b la hauteur ou largeur des orifices dont on vient de parler, mesurée perpendiculairement à la circonférence $2\pi r$;

Pour le second système :

θ l'angle du plan des orifices d'entrée avec la direction des aubes, ou, ce qui revient au même, l'angle de ces aubes avec la circonférence $2\pi r$, à laquelle on attribuera d'ailleurs la direction opposée à la vitesse u, la direction de l'aube étant prise dans le sens du mouvement relatif de l'eau ;

γ l'angle aigu sous lequel les canaux coupent leurs orifices de sortie, ou bien encore l'angle des aubes avec la circonférence $2\pi r'$ sur laquelle sont distribués lesdits orifices ;

b' la hauteur ou largeur des orifices de sortie, mesuré perpendiculairement à ladite circonférence $2\pi r'$.

Il s'agit d'établir les relations qui existent entre toutes ces quantités, dans l'hypothèse où les conditions du maximum de rendement sont satisfaites. Pour cela nous allons d'abord suivre le mouvement d'une molécule d'eau sur sa trajectoire entre les deux biefs, et écrire les équations fournies par le théorème de Bernoulli.

Entre un point de départ pris dans le bief d'amont, où il n'y a pas de vitesse sensible, et le point de sortie à l'extrémité des cloisons directrices, il y a une charge exprimée par $H + h + \frac{p_a - p}{\Pi}$: la vitesse étant v, on a donc, dans l'hypothèse d'une perte de charge négligeable entre les deux points dont il s'agit,

$$(1) \qquad v^2 = 2g\left(H + h + \frac{p_a - p}{\Pi}\right).$$

L'eau se meut ensuite le long des aubes de la turbine avec une vitesse relative d'abord égale à w et finalement

à w' : dans cette seconde période, si l'on nomme ω la vitesse angulaire de la machine, on sait (nº 20) que, pour appliquer le théorème de Bernoulli au mouvement relatif, il faut à la charge réelle $h' + \frac{p - p'}{\Pi}$ joindre un gain de charge fictif $\frac{\omega^2 r'^2 - \omega^2 r^2}{2g}$, soit $\frac{u'^2 - u^2}{2g}$; en négligeant encore les pertes de charge, ce qui est permis approximativement quand l'eau entre avec une vitesse relative tangente aux aubes, on devra donc poser

$$(2) \qquad w'^2 - w^2 = 2g\left(h' + \frac{p - p'}{\Pi}\right) + u'^2 - u^2.$$

Lorsque la turbine est immergée et h positif, le point de sortie de l'eau se trouve à une hauteur $h + h'$ au-dessous du niveau de l'aval ; comme d'ailleurs, pour le maximum du rendement, il faut que l'eau sorte avec une faible vitesse absolue, on peut sans grande erreur admettre que la pression varie, dans le bief d'aval, suivant la loi hydrostatique, ce qui donne

$$(3) \qquad \frac{p_a}{\Pi} + h + h' = \frac{p'}{\Pi}.$$

Cette relation est encore vraie dans la turbine Kœcklin, bien que $h + h'$ devienne négatif, pourvu que le puits placé au-dessous de la turbine et l'orifice par lequel il communique avec l'aval aient d'assez grandes dimensions; car alors l'eau y prendra peu de vitesse et pourra y être considérée comme en équilibre; la pression p' serait alors inférieure à p_a d'une quantité représentée par la hauteur $-(h + h')$, comme l'exprime l'équation (3) ci-dessus. On pourait également la conserver, si le plan inférieur de la turbine, construite suivant l'un des deux premiers systèmes, affleurait le niveau du bief d'aval : on aurait en effet $p_a = p'$ et $h + h' = 0$, les hauteurs h, h' étant égales et de signes contraires, ou bien nulles toutes deux, suivant qu'il s'agirait d'une turbine Fontaine ou d'une turbine Fourneyron.

L'incompressibilité de l'eau nous fournira la quatrième équation, exprimant que le volume d'eau écoulé entre les cloisons directrices est égal à celui qui sort de la turbine. Les orifices distributeurs, laissés libres entre les cloisons, occupent un

développement total $2\pi r$ (sauf la faible épaisseur des cloisons) et une largeur b, d'où résulte une surface $2\pi br$; comme ils sont coupés par les filets liquides animés de la vitesse v, sous l'angle β, on a pour première expression du volume Q débité dans l'unité de temps

$$Q = 2\pi br \sin\beta \cdot v.$$

De même, les orifices de sortie à l'extrémité des aubes ont un développement total $2\pi r'$, une largeur b', une surface $2\pi b' r'$, et ils sont coupés par les filets avec une vitesse relative w', sous l'angle γ; donc

$$Q = 2\pi b' r' \sin\gamma \cdot w'.$$

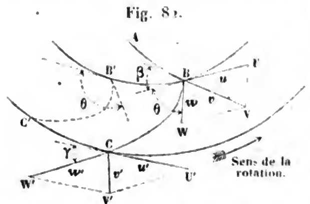
Plus exactement, à cause de l'épaisseur des aubes ou cloisons, ces deux expressions de Q devraient subir une légère réduction relative de $\frac{1}{25}$ ou $\frac{1}{30}$; mais en tous cas, la réduction étant la même pour les deux, on aura par l'égalité des valeurs de $\frac{Q}{2\pi}$,

$$(4) \qquad brv \sin\beta = b'r'w' \sin\gamma.$$

Les trois relations suivantes sont en quelque sorte géométriques.

Représentons-nous (*fig.* 82) une aube BC et une cloison directrice AB; une molécule liquide ayant suivi la trajectoire AB arrive en B avec une vitesse absolue v, et une vitesse w relativement à la turbine qui possède elle-même, au point B, la vitesse u. Cette dernière étant la vitesse dite d'entraînement, on sait que v est la diagonale du parallélogramme construit sur u et w; et comme l'angle de v avec u est précisément β, le triangle BUV donnera

Fig. 82.



$$\overline{UV}^2 = \overline{BU}^2 + \overline{BV}^2 - 2\overline{BU} \cdot \overline{BV} \cos\beta,$$

c'est-à-dire

(5) $$w^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\beta.$$

De même la molécule liquide, après avoir parcouru relativement à la turbine la trajectoire BC, arrive en C avec la vitesse relative w' qui, composée avec la vitesse d'entraînement u', donne la vitesse absolue v' ; donc, l'angle γ étant supplément de celui fait par u' et w', on aura

(6) $$v'^2 = u'^2 + w'^2 - 2u'w'\cos\gamma.$$

D'un autre côté, les vitesses u et u' appartiennent à deux points de la turbine situés respectivement aux distances r et r' de l'axe de rotation ; on a donc $\frac{u}{r} = \frac{u'}{r'}$, ou bien

(7) $$u'r = ur'.$$

Il nous reste à exprimer deux conditions nécessaires pour obtenir le meilleur rendement. Il faut d'abord, au point B, que w soit dirigé tangentiellement aux aubes BC, sans quoi il y aurait un changement brusque de vitesse relative, d'où résulterait de l'agitation et une perte de charge dont nous n'avons pas tenu compte. Donc l'angle de w avec u est supplémentaire de θ, et alors le triangle BUV donne

$$\frac{\overline{BU}}{\overline{BV}} = \frac{\sin BVU}{\sin BUV} = \frac{\sin(BUV + VBU)}{\sin BUV},$$

ou bien encore

(8) $$\frac{u}{v} = \frac{\sin(\theta + \beta)}{\sin\theta}.$$

Il faut encore que la vitesse absolue v' possédée par l'eau à sa sortie de la turbine soit assez faible, puisque $\frac{v'^2}{2g}$ entre dans la perte de chute (n° 119) : on satisfait ici d'une manière suffisante à cette condition, en prenant l'angle γ petit et posant

(9) $$u' = w' ;$$

car alors le parallélogramme CU'V'W' se transforme en un

losange très-aplati d'un côté et très-aigu de l'autre, et la diagonale joignant les sommets obtus n'a qu'une faible longueur; autrement dit, les vitesses u' et w' sont égales, et se rapprochent beaucoup d'être directement opposées, ce qui rend leur résultante assez petite.

Nous avons donc obtenu en tout neuf équations entre seize quantités variables d'une turbine à l'autre, savoir :

six vitesses u, v, w, u', v', w',

deux pressions p, p',

deux rapports $\frac{r}{r'}$, $\frac{b}{b'}$;

trois hauteurs H, h, h'.

trois angles β, γ, θ.

Ces équations nous serviront à résoudre deux questions distinctes que l'on peut poser ainsi : 1° étant données une turbine et toutes ses dimensions (c'est-à-dire les huit quantités β, γ, θ, $\frac{r}{r'}$, $\frac{b}{b'}$, H, h, h'), indiquer les conditions auxquelles ces dimensions doivent satisfaire pour que la turbine puisse fonctionner avec le maximum de rendement, c'est-à-dire pour que les neuf équations ci-dessus puissent avoir lieu; et dans l'hypothèse où ces conditions seraient remplies, indiquer la vitesse la plus convenable de la turbine, ainsi que sa dépense d'eau correspondante à cette vitesse, son rendement et son effet dynamique; 2° étant donnés le débit et la hauteur d'une chute, établir sous cette chute une turbine dans les meilleures conditions.

La première question comporte huit inconnues, qui sont u, v, w, u', v', w', p, p'; l'élimination de ces inconnues entre les neuf équations donnera donc une équation de condition à remplir par les dimensions de l'appareil, équation à laquelle il faudra en joindre deux autres pour exprimer que les pressions p et p' sont essentiellement positives. Le calcul ci-après a pour objet de faire ressortir ces trois conditions et en même temps de donner la valeur des inconnues.

Ajoutons membre à membre les équations (1), (2) et (5); il

viendra

$$w'^2 = 2g\left(H + h + h' + \frac{p_a - p'}{\Pi}\right) + u'^2 - 2uv\cos\beta,$$

soit, en ayant égard à (3) et (9),

(10) $$uv\cos\beta = gH.$$

La combinaison des équations (4) et (9) donne facilement

(11) $$bvr\sin\beta = b'u'r'\sin\gamma;$$

faisant le produit membre à membre des équations (7), (10) et (11), nous trouverons

$$v^2 . br^2\sin\beta\cos\beta = gH . b'r'^2\sin\gamma,$$

d'où résulte une des inconnues

(12) $$v^2 = gH\frac{b'r'^2}{br^2}\frac{\sin\gamma}{\sin\beta\cos\beta}.$$

On a d'ailleurs, d'après (10), $u^2 = \dfrac{g^2H^2}{v^2\cos^2\beta}$; donc

(13) $$u^2 = gH\frac{br^2}{b'r'^2}\frac{\tang\beta}{\sin\gamma},$$

et en vertu de (7)

(14) $$u'^2 = gH\frac{b}{b'}\frac{\tang\beta}{\sin\gamma}.$$

Pour avoir v', on fera d'abord $w' = u'$ dans l'équation (6), ce qui donnera

$$v'^2 = 2u'^2(1 - \cos\gamma),$$

et par suite, au moyen de la valeur (14) de u',

(15) $$v'^2 = 2gH\frac{b}{b'}\frac{\tang\beta}{\sin\gamma}(1 - \cos\gamma).$$

Connaissant u', on a par cela même w', et si l'on tenait à avoir w, cela serait facile en substituant dans l'équation (5) les valeurs de v et u. Ainsi toutes les vitesses peuvent maintenant être considérées comme connues; on en déduirait la vitesse angulaire ω avec laquelle doit marcher la turbine, quand elle fonctionne dans les conditions du maximum de rendement; on

aurait en effet

$$\omega = \frac{u}{r} = \frac{u'}{r'}.$$

Le débit correspondant Q a pour valeur $2\pi b' w' r' \sin\gamma$, soit en substituant au lieu de w' l'expression (14) de son égale u',

(16) $$Q = 2\pi r' \sqrt{bb'} \sqrt{gH \operatorname{tang}\beta \sin\gamma},$$

formule dont il faudrait probablement affecter le second membre d'un facteur plus petit que 1, pour tenir compte de l'espace occupé par les aubes, et aussi pour compenser l'influence des pertes de charge négligées dans le calcul.

Cherchons maintenant les trois équations de condition que doivent remplir les dimensions de la turbine. D'abord en faisant le quotient membre à membre des équations (13) et (12), et extrayant la racine carrée du quotient, nous trouverons

$$\frac{u}{v} = \frac{br^2}{b'r'^2} \frac{\sin\beta}{\sin\gamma},$$

et à cause de (8)

(17) $$\frac{\sin(\theta+\beta)}{\sin\theta} = \frac{br^2}{b'r'^2} \frac{\sin\beta}{\sin\gamma};$$

c'est la condition obtenue par l'élimination des huit inconnues entre les neuf équations. Reste encore à exprimer qu'on a $p > 0$, $p' > 0$. Quant à cette dernière condition, on voit d'après (3) qu'elle est satisfaite d'elle-même pour les turbines Fourneyron et Fontaine, en supposant qu'elles affleurent le bief d'aval ou qu'elles y sont noyées, comme nous l'avons admis dans tous les précédents calculs; car alors $h + h'$ est positif et l'on a $p' > p_a$. Dans la turbine Kœcklin, au contraire, le dessous de la turbine surpasse en réalité le niveau du bief d'aval, d'une hauteur positive exprimée par $-(h + h')$; $\frac{p'}{\Pi}$ a pour valeur $\frac{p_a}{\Pi}$ ou $10^m,33$, moins cette hauteur; donc il faut absolument qu'on ait

$$-(h + h') < 10^m,33,$$

et peut-être même, à cause des pertes de charge négligées, conviendrait-il de poser

(18) $$-(h + h') < 6^m,$$

pour assurer d'une manière bien certaine la continuité de la colonne liquide dans le puits cylindrique au-dessus duquel se trouve la turbine. Quant à la pression p, on la tirera de (1), après y avoir mis la valeur (12) au lieu de v^2, et on trouvera

$$(19) \qquad \frac{p}{\Pi} = \mathrm{H} + h + \frac{p_a}{\Pi} - \frac{1}{2}\mathrm{H}\frac{b'r'^2}{br^2}\frac{\sin\gamma}{\sin\beta\cos\beta}.$$

Il faudrait, bien entendu, que le second membre de cette relation fût plus grand que zéro; mais on peut lui fixer une limite plus élevée. En effet, si l'on examine la disposition des divers systèmes de turbines, on voit qu'il y a toujours communication indirecte des orifices distributeurs situés à l'extrémité des cloisons directrices, soit avec le bief d'aval, soit avec l'atmosphère. Cette communication se fait par le jeu nécessairement laissé entre la turbine proprement dite et les orifices distributeurs. Quand elle a lieu avec le bief d'aval, p ne peut pas s'écarter beaucoup de la pression hydrostatique $p_a + \Pi h$, qui aurait lieu dans une colonne piézométrique communiquant avec ce bief, et à la hauteur du point d'entrée de l'eau dans la turbine : sans quoi il y aurait, par le jeu dont nous venons de parler, soit jaillissement, soit aspiration d'eau, ce qui produirait du trouble dans le mouvement. Quand c'est avec l'atmosphère, il faut, par une raison analogue, que p soit sensiblement égal à p_a. Il est donc prudent, si l'on est dans le premier cas, de s'imposer la condition que les deux termes affectés du facteur H dans l'équation (19) se détruisent à peu près, ou de poser, en désignant par k un nombre peu différent de 1,

$$(20) \qquad k = \frac{b'r'^2}{br^2}\frac{\sin\gamma}{2\sin\beta\cos\beta};$$

k est d'ailleurs rigoureusement assujetti à ce que

$$h + \frac{p_a}{\Pi} + \mathrm{H}(1 - k)$$

soit positif. Et de même, pour le second cas, on établirait la condition

$$(20\text{-}bis) \qquad \mathrm{H}\left(1 - \frac{b'r'^2}{br^2}\frac{\sin\gamma}{2\sin\beta\cos\beta}\right) + h = h'',$$

h'' désignant une hauteur assez petite.

On pourrait encore se proposer, pour une turbine connue fonctionnant avec le rendement maximum, de chercher ce rendement, ainsi que l'effet dynamique. Comme nous supposons négligeables toutes les pertes de chute autres que celle qui est due à la vitesse de sortie v', la chute utilisée sera

$$H - \frac{v'^2}{2g},$$

et par suite le rendement μ aura pour expression

$$\mu = \frac{H - \frac{v'^2}{2g}}{H} = 1 - \frac{v'^2}{2gH},$$

ou, en remplaçant v'^2 par sa valeur,

$$(21) \qquad \mu = 1 - \frac{b}{b'} \frac{\tan\beta}{\sin\gamma}(1 - \cos\gamma).$$

L'effet dynamique T_e s'obtiendrait en cherchant le produit $\mu \Pi Q H$ du rendement par la puissance absolue de la chute : donc on aurait, d'après les équations (16) et (21),

$$(22) \quad \begin{cases} T_e = \Pi H \sqrt{gH} \cdot 2\pi r' \sqrt{bb'} \cdot \sqrt{\tan\beta \sin\gamma} \\ \times \left[1 - \frac{b}{b'} \frac{\tan\beta}{\sin\gamma}(1 - \cos\gamma)\right]. \end{cases}$$

Ainsi donc maintenant nous avons résolu la première des deux questions générales posées tout à l'heure. Quand on aborde la seconde, qui consiste à établir une turbine pour une chute donnée, Q et H deviennent les données, et l'on n'a, entre les neuf quantités β, γ, θ, r, r', b, b', h, h', qui définissent les dimensions inconnues, que les équations (16), (17), (20) ou (20 *bis*), auxquelles il faut joindre (s'il s'agit d'une turbine Kœcklin) l'inégalité (18) ; encore cette inégalité laisse-t-elle une certaine marge, et il en est de même des équations (20) et (20 *bis*), car les quantités k et h'' n'ont pas une valeur précise. Il semble donc qu'il y a une grande indétermination et qu'on pourrait prendre arbitrairement presque toutes les dimensions ci-dessus énumérées : toutefois les remarques sui-

vantes imposent des restrictions auxquelles il sera bon d'avoir égard.

132. *Remarques sur les angles* β, γ, θ *et sur les dimensions* b, b', r, r', h, h'. — Si l'on ne consultait que l'expression (21) du rendement, on serait tenté de faire nul un des angles β ou γ; le rendement théorique deviendrait alors en effet égal à 1. Mais on voit que la dépense Q s'annulerait, ainsi que l'effet dynamique T_e : la valeur zéro n'est donc admissible ni pour l'un ni pour l'autre de ces deux angles.

En faisant γ très-petit, les canaux formés par les deux aubes consécutives seraient très-rétrécis aux environs du point de sortie de l'eau ; l'eau s'écoulerait avec difficulté par cet étranglement, et il serait à craindre qu'elle ne suivît pas exactement les parois des aubes, ce qui occasionnerait des remous et des pertes de charge. D'un autre côté, une grande valeur de γ diminuerait peut-être trop le rendement. Entre ces deux écueils à éviter, l'expérience indique une valeur de 20 à 30 degrés comme donnant des résultats satisfaisants.

Quant à l'angle β, outre la raison donnée tout à l'heure, il en existe encore une autre pour ne pas le faire nul : cette seconde raison, c'est que d'après l'équation (19) p serait négatif pour $\beta = 0$ et pour $\beta = 90°$. On ne peut donc s'approcher trop ni de zéro ni de 90 degrés ; les limites de 30 à 50 degrés ont été conseillées par quelques praticiens, mais elles n'ont rien d'absolu.

Supposons qu'on soit dans le cas d'application de l'équation (20) ; en la multipliant membre à membre avec l'équation (17), on trouve

$$\frac{k \sin(\theta + \beta)}{\sin \theta} = \frac{1}{2 \cos \beta},$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{k} - 1 = \frac{2 \cos \beta \sin(\theta + \beta) - \sin \theta}{\sin \theta};$$

or on a, en développant $\sin(\theta + \beta)$,

$$\begin{aligned} 2 \cos \beta \sin(\theta + \beta) - \sin \theta &= \sin \theta (2 \cos^2 \beta - 1) + 2 \sin \beta \cos \beta \cos \theta \\ &= \sin \theta \cos 2\beta + \cos \theta \sin 2\beta \\ &= \sin(2\beta + \theta); \end{aligned}$$

donc on peut écrire

$$(23) \qquad \frac{\sin(2\beta+\theta)}{\sin\theta} = \frac{1}{k} - 1.$$

On a vu précédemment que k devait être un nombre assez rapproché de 1 ; il en résulte que $\sin(2\beta+\theta)$ doit être petit, et par suite que $2\beta+\theta$ doit peu s'écarter de 180 degrés. Si l'on prenait, par exemple, β aux environs de 45 degrés, θ serait voisin de l'angle droit. Il ne convient pas d'ailleurs que θ dépasse 90 degrés ; car si l'on se reporte à la *fig.* 82, on voit qu'avec θ obtus les aubes devraient avoir une forme telle que B′C′, présentant une assez forte courbure, et l'expérience fait connaître que dans un canal fortement courbé l'eau éprouve une perte de charge plus grande, toutes choses égales d'ailleurs ; les molécules liquides tendent alors à se séparer de la partie convexe, ce qui donne lieu à un remous. On voit aussi sur la *fig.* 82 qu'en prenant θ très-aigu, le côté $\overline{\text{VU}}$ du triangle BUV, c'est-à-dire la vitesse relative à l'entrée, tendrait à devenir plus ou moins considérable, ce qui serait un inconvénient, puisque le frottement de l'eau sur les aubes s'en trouverait augmenté. Ainsi donc il conviendra que θ soit un angle aigu, mais rapproché de l'angle droit : on pourrait, par exemple, le faire varier de 80 à 90 degrés.

Si c'est l'équation (20 *bis*) et non l'équation (20) qu'on doit appliquer, les mêmes raisons subsistent pour prendre θ aigu et voisin de 90 degrés ; mais il n'est plus nécessaire que la somme $2\beta+\theta$ diffère peu de 180 degrés.

Après avoir fixé les valeurs β, γ, θ, on calculera par la formule (17) le rapport $\frac{br^2}{b'r'^2}$, qui servira à connaître l'un des rapports $\frac{b}{b'}$ ou $\frac{r}{r'}$ quand l'autre aura été choisi.

Il est avantageux pour le rendement que $\frac{b}{b'}$ soit plus petit que 1, comme le montre la formule (21) ; il faut cependant ne pas exagérer la différence $b'-b$, et la proportionner à la longueur des aubes, afin de ne pas avoir un évasement trop rapide dans les canaux compris entre deux aubes consécutives, car

cet évasement donnerait lieu à une perte de charge (n° 56). On peut s'imposer la condition que $b'-b$ soit inférieur à $\frac{1}{10}$ de la longueur des aubes.

Ainsi que nous l'avons déjà dit, le rapport $\frac{r'}{r}$ est souvent pris égal à 1 dans les turbines Fontaine et Kœcklin, mais il est forcément plus grand que 1 dans la turbine Fourneyron. S'il est pris différent de l'unité, il ne faut pas cependant augmenter sans motif particulier la différence $r'-r$ ou $r-r'$, car on allongerait ainsi les aubes et l'on augmenterait les frottements. Dans la turbine Fourneyron, $\frac{r'}{r}$ varie ordinairement de 1,25 à 1,50.

La hauteur h', dont l'eau descend à l'intérieur de la turbine, est toujours nulle dans les turbines Fourneyron; dans les deux autres systèmes, on la choisit de manière à ce que les aubes aient une longueur suffisante, mais non excessive, eu égard à la différence $b'-b$. Quant à la hauteur h, s'il s'agit d'une turbune Kœcklin, on la fixe d'après les convenances locales, en ayant égard à l'inégalité (18); s'il s'agit d'une turbine Fourneyron ou Fontaine, on s'arrange pour que son plan inférieur affleure le niveau du bief d'aval quand les eaux y sont à leur minimum de hauteur.

Enfin, M. Fourneyron recommande de donner à la section circulaire de la cuve, où sont les cloisons directrices de ses turbines, une surface au moins égale à quatre fois la section droite des orifices distributeurs, afin que les filets fluides passent assez facilement de la direction verticale à la direction horizontale qu'ils doivent avoir à leur point de sortie. Avec les notations du n° 131, on devrait donc écrire

$$\pi r^2 > 4.2\pi r b \sin\beta,$$

ou bien

$$r > 8 b \sin\beta, \qquad (24)$$

le signe $>$ n'étant pas exclusif de l'égalité.

Voyons maintenant, par deux exemples, comment ces considérations permettraient de fixer les dimensions d'une turbine à établir.

133. *Exemples des calculs à faire pour l'établissement d'une turbine.* — Soit d'abord proposé d'établir une turbine Fourneyron avec les données suivantes :

Hauteur de chute.................... $H = 6^{m}, 00$;
Volume dépensé par seconde.......... $Q = 1^{mc}, 50$.

La puissance absolue de la chute est de 1500×6^{kgm} ou de 9000 kilogrammètres par seconde, ce qui répond à 120 chevaux.

Puisque l'angle γ ne se détermine pas théoriquement, nous le prendrons de suite (n° 132) égal à 25 degrés; nous ferons aussi $k = 1$ (*), ce qui nous assure que p sera positif (n° 131); enfin nous prendrons $\theta = 90°$. L'équation (23) donne alors

$$\sin(2\beta + \theta) = 0,$$

d'où

$$2\beta + \theta = 180° \quad \text{et} \quad \beta = 45°.$$

Comme nous avons satisfait à l'équation (23), qui résulte de l'élimination de $\frac{b'r'^2}{br^2}\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$ entre les formules (17) et (20), il suffit de conserver l'une de ces dernières; on tire de l'une et de l'autre

$$(\alpha) \qquad \frac{br^2}{b'r'^2} = \sin 25° = 0,4226.$$

La condition de dépenser $1^{mc}, 50$ d'eau s'exprime par la formule (16), qui devient ici

$$1^{mc}, 50 = 2\pi r' \sqrt{bb'} \sqrt{6g.0,4226},$$

ou bien, tout calcul fait,

$$(\alpha') \qquad r'\sqrt{bb'} = 0,04785.$$

Il faut encore écrire l'inégalité (24), qui donne

$$r > 8b \sin 45° \quad \text{ou} \quad r > 5,657b;$$

nous prendrons

$$(\alpha'') \qquad r = 6b.$$

On n'a ainsi que trois équations entre les quantités b, b', r, r'; mais à cause de leur forme particulière on peut cependant déjà en tirer les valeurs de b et de r. Extrayant en effet la racine carrée de l'équa-

(*) La turbine étant supposée pareille à celle que représente la *fig.* 79 (n° 128), on se trouve dans le cas d'application de l'équation (20).

tion (α) et la multipliant membre à membre avec (α'), on fait disparaître $r'\sqrt{b'}$ et l'on trouve

$$br = 0{,}031107,$$

relation qui, combinée avec $r = 6b$, donne sans difficulté

$$r = 0^{m},432, \quad b = 0^{m},072.$$

Cela fait, le système des trois équations (α), (α'), (α'') ne donnerait plus que $r'\sqrt{b'}$; pour faire cesser l'indétermination, on prendra b' arbitrairement et l'on conclura r', sauf à vérifier après coup les conditions indiquées au nº **132** et non exprimées jusqu'à présent. Si l'on prend, par exemple, $b' = 0^{m},090$, l'équation (α') deviendra

$$r'\sqrt{0{,}090 \times 0{,}072} = 0{,}04785,$$

d'où résulte

$$r' = 0^{m},594.$$

Ces valeurs de b' et de r' peuvent être conservées, car $\frac{r'}{r} = 1{,}37$, et la différence $b' - b = 0^{m},018$ n'est que $\frac{1}{9}$ de $r' - r$, quantité qui, d'après l'obliquité des aubes sur la circonférence extérieure, ne doit guère surpasser les deux tiers de la longueur de celles-ci; l'évasement ne sera donc pas trop rapide.

Il ne resterait qu'à choisir la hauteur h : si le niveau d'aval était constant, on ferait $h = 0$, sinon il faudrait avoir égard à la remarque faite ci-dessus (nº **132**) à ce sujet.

Le rendement théorique s'obtiendrait par la formule (21); on trouve

$$\mu = 1 - \frac{0{,}072}{0{,}090} \cdot \operatorname{tang} 45^\circ \cdot \frac{1 - \cos 25^\circ}{\sin 25^\circ} = 0{,}823.$$

En pratique, on ne compte que sur un rendement net de 0,70 à 0,75 au plus; cela est prudent, à cause de toutes les pertes de charge que nous avons négligées, et aussi parce qu'il est bien difficile de faire marcher rigoureusement la machine avec la vitesse et la dépense d'eau qui conviennent au rendement maximum.

Enfin, pour connaître la vitesse avec laquelle doit tourner la turbine, on appliquerait la formule (14) et on en tirerait $u' = 10^{m},555$, puis la vitesse angulaire $\omega = \frac{u'}{r'} = 17{,}77$, et enfin le nombre de tours par minute $N = \frac{30\,\omega}{\pi} = 169{,}7$.

Soit encore proposé, comme second exemple, d'établir une turbine Fontaine, avec une chute de 2 mètres, débitant $0^{mc},60$ d'eau par seconde, ce

qui répond à une puissance absolue de 1200 kilogrammetres, soit 16 chevaux. Nous supposerons que l'eau du bief d'aval ne s'élève que jusqu'au plan inférieur de la turbine, de telle sorte que l'intervalle ou jeu entre la turbine et les cloisons directrices communique avec l'atmosphère, et que la pression p doive être sensiblement égale à la pression atmosphérique. Nous admettrons donc l'équation (20 *bis*), en y faisant $h'' = 0$, c'est-à-dire que nous poserons

$$H\left(1 - \frac{b'r'^2}{br^2} \frac{\sin\gamma}{2\sin\beta\cos\beta}\right) + h = 0.$$

Suivant l'usage habituel, nous ferons $r = r'$; de plus, nous remarquerons que, d'après la position attribuée au plan d'aval, h est égal à h' et de signe contraire. L'équation ci-dessus peut donc s'écrire

$$(\delta) \qquad H\left(1 - \frac{b'}{b} \frac{\sin\gamma}{2\sin\beta\cos\beta}\right) - h' = 0.$$

Comme θ doit peu s'écarter de 90 degrés, nous lui attribuerons cette valeur; l'équation de condition (17) prend alors la forme

$$\frac{br^2}{b'r'^2} \frac{\tang\beta}{\sin\gamma} = 1,$$

soit, à cause de $r = r'$,

$$(\delta') \qquad b'\sin\gamma = b\tang\beta.$$

En introduisant $b'\sin\gamma$ au lieu de $b\tang\beta$ dans l'expression (16) de la dépense, elle devient

$$(\delta'') \qquad Q = 2\pi r'b'\sin\gamma\sqrt{gH}.$$

Les équations (δ, δ', δ'') sont celles du problème. Il y entre six inconnues, savoir : β, γ, b, b', r', h'; on voit par conséquent qu'il y a indétermination et que nous pouvons nous donner trois des inconnues ou trois équations nouvelles. L'angle γ ne pouvant être déterminé par la théorie, nous le prendrons d'abord égal à 30 degrés (n° 132); alors (δ'') deviendra, par la substitution des nombres à la place des lettres,

$$b'r' = \frac{0,60}{\pi\sqrt{2g}} = 0,04312,$$

relation à laquelle on satisfait par les valeurs

$$r' = 0^m,60, \quad b' = 0^m,072.$$

On voit que le rapport $\frac{b'}{r'}$ n'est que 0,12 : par conséquent l'inégalité de vitesse des filets liquides dans l'orifice de sortie ne sera pas trop sen-

sible. Maintenant, comme il reste trois inconnues b', h', β, liées seulement par les deux équations (δ), (δ'), nous nous donnerons encore $h' = 0^m,15$; éliminant alors $\frac{b'}{b}$ entre (δ) et (δ'), il viendra

$$1 - \frac{1}{2\cos^2\beta} = \frac{h'}{H} = \frac{3}{40},$$

d'où résulte

$$2\cos^2\beta = \frac{40}{37}, \quad 2\cos^2\beta - 1 = \cos 2\beta = \frac{3}{37},$$

et par conséquent

$$\beta = 42^\circ 40' \text{ environ.}$$

Connaissant β, on tire de l'équation (δ')

$$b = 0^m,039.$$

La différence $b' - b = 0^m,033$ est peut-être trop grande relativement à la hauteur $0^m,15$ de la turbine, car les aubes ayant un développement de $0^m,20$ à $0^m,25$ tout au plus, l'évasement atteindrait le chiffre de $\frac{1}{7}$ environ. On essaye alors une autre valeur de h'; soit, par exemple,

$$h' = 0^m,30.$$

Procédant comme ci-dessus, on aura successivement

$$2\cos^2\beta = \frac{20}{17}, \quad \cos 2\beta = \frac{3}{17}, \quad \beta = 40^\circ, \quad b = 0^m,043.$$

La différence $b' - b$ serait encore de $0^m,029$; mais comme les aubes auraient une longueur voisine de $0^m,40$ (à cause de leur inclinaison sur le plan inférieur de la turbine), ce nombre semble parfaitement admissible. On s'en tiendrait donc aux résultats

$$\gamma = 30^\circ, \quad \beta = 40^\circ, \quad \theta = 90^\circ, \quad r = r' = 0^m,60,$$
$$b = 0^m,043, \quad b' = 0^m,072, \quad -h = h' = 0^m,30.$$

Le rendement μ serait donné par l'équation (21), qui, eu égard à l'équation (δ'), devient

$$\mu = \cos\gamma = \cos 30^\circ = 0,866.$$

Pareillement l'équation (14) se simplifierait et donnerait

$$u'^2 = gH,$$

d'où

$$u' = 4^m,429;$$

on en déduirait enfin la vitesse angulaire à donner à la machine

$$\omega = \frac{u'}{r'} = 7,382.$$

et le nombre de tours par minute

$$N = \frac{30\omega}{\pi} = 70,5.$$

En général, comme on le voit, le problème qui consiste à fixer les dimensions d'une turbine pour laquelle on donne le débit et la hauteur de chute est un problème indéterminé ; on en profite pour se donner en partie les dimensions inconnues, sauf à tâtonner, si cela est nécessaire, pour satisfaire aux diverses conditions qu'il est bon de remplir, mais que les équations n'expriment pas.

134. *Des moyens de régler la dépense d'eau dans les turbines.* — Une turbine construite avec des dimensions déterminées doit, pour marcher avec le maximum de rendement, dépenser un volume d'eau parfaitement déterminé, autant du moins que la hauteur de la chute ne varie pas. Cependant, en pratique, on est obligé de régler la dépense d'après le volume fourni par l'alimentation du bief d'amont ; car si l'on dépensait davantage on s'exposerait à manquer d'eau, après quelque temps, et l'on serait forcé alors d'interrompre la marche de la machine. En conséquence, on calcule les dimensions de manière à débiter convenablement le plus grand volume d'eau disponible, et l'on s'arrange pour débiter moins, quand l'alimentation diminue. Pour cela divers moyens ont été employés.

Dans la turbine Fourneyron, la cuve mobile EGFI (*fig.* 79, planche gravée) permet d'atteindre le but : il suffit de l'abaisser plus ou moins, pour rétrécir les ouvertures GK, IL, ou les fermer tout à fait. Le mouvement de translation vertical de cette cuve s'obtient au moyen de trois tiges verticales, telles que *rs*, *tu*, qui lui sont attachées, en trois points formant les sommets d'un triangle horizontal à côtés égaux. Les tiges en question se terminent en vis à leur partie supérieure, et entrent dans des écrous assujettis à tourner sur place. Les trois écrous sont d'ailleurs munis de trois roues dentées, tout à fait pareilles, qui engrènent avec une même roue, folle sur l'arbre de la turbine. En tournant un des écrous au moyen d'une ma-

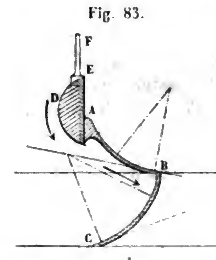
nivelle, les deux autres tournent exactement de la même quantité, et la cuve se trouve soulevée ou abaissée parallèlement par les trois tiges à la fois.

Il y a un inconvénient assez grave à l'obstruction partielle des ouvertures GK, IL; c'est que les veines fluides qui sortent par ces ouvertures, entrent immédiatement dans des canaux de section plus grande, où elles coulent nécessairement à plein tuyau, puisque la turbine est au-dessous du bief d'aval. Il se produit donc là un changement brusque de section, et par suite une perte de charge plus ou moins considérable (n° 31). L'influence en est quelquefois telle, que M. le général Morin a constaté, dans diverses expériences sur une turbine, une diminution de rendement de 0,79 à 0,24, quand l'ouverture libre sous la vanne cylindrique descendait de sa hauteur maximum jusqu'à $\frac{1}{5}$ environ de cette hauteur. L'inconvénient est d'autant plus grand que la diminution de rendement correspond à celle du volume d'eau dépensé, ce qui tend à rendre excessivement irrégulier l'effet dynamique de la machine. Pour y remédier, M. Fourneyron a proposé de subdiviser la hauteur de la turbine en plusieurs étages par deux ou trois plateaux annulaires horizontaux, pareils aux plateaux SRMN, UTPQ de la *fig.* 79, dont ils divisent la distance en trois ou quatre parties égales. En supposant, par exemple, trois étages, on voit qu'il n'y aura pas de changement brusque de section quand la levée de la vanne cylindrique sera $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ ou la totalité de la hauteur de la turbine; en tout cas le phénomène de l'épanouissement brusque n'affectera qu'une fraction de la veine liquide. Mais, par contre, on complique la construction de l'appareil et on augmente le frottement de l'eau sur les parois solides. M. Fourneyron a encore proposé de n'employer que les deux plateaux SRMN, UTPQ; mais celui de dessous porterait seul les aubes, et celui de dessus serait percé d'entailles qui lui permettraient de s'enfoncer librement entre les aubes, sous la seule action de son poids. Ce plateau supérieur porterait sur un rebord terminant extérieurement la vanne cylindrique à sa partie inférieure. Quand la vanne descendrait, le

plateau SRMN descendrait d'autant, et la hauteur de la turbine serait toujours égale à la levée de la vanne. Le plateau mobile entraîné avec la turbine tournerait d'ailleurs en frottant sur le rebord qui lui sert d'appui ; mais la pression mutuelle étant faible, cela n'occasionnerait pas un supplément notable de résistance.

M. Fontaine emploie pour régler la dépense de ses turbines une série de vannes à talon, analogues à celle que représente la *fig.* 83. AB est une cloison directrice, BC une aube de la turbine, D une vanne pouvant s'enfoncer plus ou moins dans l'intervalle compris entre AB et la cloison suivante, placée à gauche. De cette manière, on rétrécit autant qu'on veut le passage libre dans cet intervalle, et comme on agit sur tous d'une manière identique, il est visible qu'on a le moyen de réduire le volume d'eau débité, à tel degré qu'il est nécessaire. Le mouvement de translation verticale s'imprime simultanément à toutes les tiges EF par un procédé analogue à celui de M. Fourneyron : ces tiges sont toutes assemblées dans une couronne métallique, en trois points de laquelle sont fixées des vis verticales, munies d'écrous que l'on assujettit à tourner sur place. Les trois écrous sont respectivement solidaires avec trois roues dentées égales, entourées par une chaîne sans fin, à la Vaucanson, qui les oblige à tourner simultanément de la même quantité. Il suffit donc de faire tourner une des trois roues, au moyen d'une manivelle a engrenages, pour que tout le système des vannes prenne une translation dans la direction de la verticale. La fermeture partielle des canaux injecteurs, ici comme dans la turbine Fourneyron, n'est pas sans inconvénients, car le changement brusque de section dans ces canaux donne encore lieu à une perte de charge : toutefois cette perte se trouve atténuée dans une proportion notable.

Fig. 83.



Aux vannes à talon M. Kœcklin a substitué des clapets pouvant tourner autour d'une charnière, de façon à s'appliquer exactement sur l'entrée des canaux distributeurs, quand la

fermeture est complète. La disposition de la turbine Kœcklin permet aussi de modérer la dépense d'eau, en se servant de la vanne V (*fig.* 81), qui peut boucher la communication entre le puits placé au-dessous de la turbine et le bief d'aval. Mais l'expérience a montré que par ce moyen on perd une plus grande fraction de la chute, qu'en se servant des clapets.

Il y a de si grands inconvénients, au point de vue de l'économie du travail moteur, à fermer partiellement les canaux de distribution, qu'on a dû chercher tous les moyens possibles d'y remédier. Nous en avons déjà cité deux, imaginés par M. Fourneyron. M. Charles Callon, ingénieur civil et habile constructeur, en a proposé un autre qui consiste à rendre indépendantes les unes des autres toutes les vannes partielles qui obstruent les canaux dont il s'agit; pour modérer la dépense, on fermerait complétement un certain nombre de vannes, en laissant les autres complétement ouvertes. Mais comme les canaux formés par les aubes de la turbine passent alternativement devant des orifices ouverts et des orifices fermés, il y a là encore une cause de non-permanence et de trouble dans le mouvement.

L'idée de M. Callon a été reproduite sous une autre forme par M. Fontaine. Les orifices d'entrée des canaux distributeurs occupant une surface horizontale comprise entre deux cercles concentriques avec l'axe de la turbine, M. Fontaine dispose deux rouleaux en forme de tronc de cône qui peuvent rouler sur cette surface annulaire. Les deux rouleaux sont assemblés sur un même essieu horizontal présentant un collier qui entoure l'arbre de rotation. Quand ils marchent dans un certain sens, chacun d'eux déroule une bande de cuir, qui a l'une de ses extrémités fixée au rouleau et l'autre au plan des orifices d'entrée : une partie des orifices est ainsi entièrement bouchée, pendant que les autres restent tout à fait ouverts. Quand les troncs de cône marchent en sens inverse, ils enroulent les deux bandes de cuir et découvrent les ouvertures. M. Fontaine a également imité les turbines à plusieurs étages de M. Fourneyron, en proposant des turbines divisées en plusieurs zones, par des surfaces de révolution autour de l'axe du système; chacune de ces zones pourrait être obstruée isolément.

135. *Turbine hydropneumatique Girard et Callon.* — Le problème du règlement de la dépense, sans perte trop sensible, paraît avoir été résolu de la manière la plus heureuse dans un genre de turbine que ses inventeurs, MM. Girard et Callon, ont appelé *turbine hydropneumatique*. Leur système consiste essentiellement à entourer la turbine Fourneyron d'une cloche en tôle, dont le plan inférieur est à peu près à la hauteur des points où l'eau sort des aubes. Dans cette cloche, au moyen d'une petite pompe mise en mouvement par la machine même, on comprime de l'air qui peu à peu expulse complétement l'eau de la cloche; alors, si l'on suppose la vanne cylindrique partiellement soulevée, la veine liquide qui s'échappe au-dessous a une hauteur moindre que la distance entre les deux plateaux de la turbine; mais il n'en résulte pas pour cela un changement brusque dans la section du liquide, parce que la turbine se meut dans l'air comprimé, et qu'elle n'est point noyée par l'eau du bief d'aval. L'eau coule dans la turbine sous une épaisseur qui, à l'origine des aubes, égale la levée de la vanne; le plateau supérieur n'est plus mouillé, et comme il ne sert qu'à l'assemblage des aubes, on peut l'évider, afin d'assurer la libre circulation de l'air au-dessus de la veine liquide. Ainsi la principale cause de perte de chute, due à une levée partielle de la vanne, se trouve supprimée, et l'on doit s'attendre à obtenir un rendement peu variable.

Les calculs de la turbine hydropneumatique peuvent être regardés comme un cas particulier de ceux du n° 131. En conservant les mêmes notations, il faut considérer b' comme une inconnue, et en même temps supposer

$$p = p' = p_a + \Pi h;$$

en effet, h représente l'immersion de la turbine au-dessous du niveau d'aval, et $p_a + \Pi h$ est bien la pression de l'air dans la cloche. Ainsi, d'après cette valeur de p, les équations (19) et (20) montrent d'abord que $k = 1$, et par suite (n° 132) qu'on a $2\beta + \theta = 180°$, condition unique à laquelle doivent satisfaire les dimensions de l'appareil. Elle donne $\beta + \theta = 180 - \beta$; l'équation (17) devient donc

$$b' r'^2 \sin\gamma = b r^2 \sin\theta = b r^2 \sin 2\beta,$$

d'où l'on tirerait b' en fonction de la levée de vanne b, pour une turbine marchant avec le maximum de rendement. En vertu de la relation précédente, les équations (13), (16) et (21) prennent la forme

$$u^2 = gH \frac{\tang\beta}{\sin\gamma} = \frac{gH}{2\cos^2\beta},$$

$$Q = 2\pi br\sin\beta\sqrt{2gH},$$

$$\mu = 1 - \frac{r'^2}{2r^2\cos^2\beta}(1-\cos\gamma);$$

ces formules, très-faciles d'ailleurs à démontrer directement, font connaître : 1° la vitesse angulaire $\frac{u}{r}$ de la turbine, qui correspond au maximum du rendement; 2° sa dépense Q et son rendement μ dans la même circonstance. Si l'on avait à établir un turbine pour une chute et un débit donnés, l'équation en Q, jointe à l'inégalité (24) (n° 132), permettrait de trouver r et $b\sin\beta$, et par conséquent b, quand on aurait choisi β. Quant à γ, on le prendrait toujours de 20 à 30 degrés; θ devrait être $180° - 2\beta$; enfin r' serait pris aussi petit que possible (à cause de l'expression de μ), mais pas cependant au point de rendre les aubes trop courtes.

Le procédé de MM. Girard et Callon pourrait également s'adapter à la turbine Fontaine.

136. *Données pratiques diverses au sujet des turbines.* — Les cloisons directrices et aubes se font ordinairement en tôle; on les fixe aux surfaces qui doivent les soutenir, soit par des fers d'angle, soit en les introduisant dans des nervures venues de fonte avec ces surfaces. Elles doivent être assez multipliées pour donner à la vitesse de l'eau leur direction propre. L'espacement de deux aubes ou cloisons successives, mesuré normalement à la surface de l'une d'elles, ne doit dépasser en aucun point une limite de $0^m,06$ à $0^m,08$, et ordinairement on le fait plus faible. Cependant il ne faut pas le diminuer à l'excès, car on donnerait alors trop d'importance au frottement de l'eau sur les parois solides.

Dans la turbine Fourneyron, les aubes étant placées plus loin

de l'axe que les cloisons, c'est-à-dire distribuées sur une circonférence plus grande, leur nombre dépasse d'un tiers ou de moitié celui des cloisons, afin d'avoir partout un espacement convenable.

Sauf la condition de couper les plans des orifices sous des angles déterminés, la courbure des aubes et cloisons est à peu près indifférente. Cependant, comme une courbure trop forte ou un changement brusque de courbure peuvent empêcher les filets de suivre les parois et produire ainsi des pertes de charge, il faut éviter ces deux défauts. Il serait bon que le rayon de courbure fût au moins trois ou quatre fois l'espacement mesuré suivant la normale.

Les turbines conviennent à toutes les hauteurs de chute et à tous les débits. Ainsi, l'on en cite dont les chutes ne sont que de $0^m,30$ ou $0^m,40$, tandis qu'il existe dans la Forêt Noire une turbine établie par M. Fourneyron avec une chute de 108 mètres. La dépense peut être considérable, même avec des dimensions assez faibles. Dans l'un des exemples calculés au n° 133, on a vu qu'une turbine de $0^m,60$ environ de rayon extérieur et de $0^m,09$ de hauteur dépensait convenablement $1^{mc},50$ par seconde. Il y a des turbines construites dont la dépense va jusqu'à 4 mètres cubes par seconde, et au besoin il serait facile de dépenser encore plus.

Dans les circonstances ordinaires, les turbines marchent assez rapidement, et permettent ainsi d'économiser les engrenages de transmission.

Pour chaque turbine établie dans des conditions déterminées, la théorie du n° 131 indique une vitesse particulière à lui donner, afin d'obtenir le maximum d'effet utile. Mais si on lui donne en réalité une vitesse différente de celle-là, et s'en écartant de 25 pour 100 en plus ou en moins, l'expérience prouve que le rendement ne change pas beaucoup, ce qui est une propriété fort importante pour beaucoup d'usines où, malgré les variations éprouvées par le débit de la chute d'eau, il convient de faire toujours marcher les appareils avec une vitesse à peu près constante.

Ces moteurs ont donc de sérieux avantages sur les roues à axe horizontal. Malheureusement leur rendement proportion-

nel n'est pas toujours constant, même d'une manière approximative, pour des chutes à débit très-variable; leur construction et leurs réparations ne peuvent être confiées qu'à des mécaniciens habiles, et sont par conséquent assez dispendieuses; au lieu que les roues en dessus et les roues de côté se prêtent fort bien à une construction économique, tout en conservant un rendement supérieur ou au moins égal à celui des turbines. Ces roues pourront donc être encore souvent préférées, lorsque le débit et la hauteur de chute seront favorables à leur établissement.

137. *Roues à réaction.* — Concevons une turbine Fourneyron dont on aurait supprimé les cloisons directrices, en ayant soin de prolonger les aubes jusqu'à une assez faible distance de l'axe de rotation; supposons que l'eau arrive jusqu'aux aubes par un tuyau concentrique avec l'axe, ayant pour rayon précisément la distance libre dont on vient de parler. D'ailleurs la dépense d'eau dans ce tuyau sera censée assez faible pour que la vitesse absolue du liquide n'y soit pas sensible. Nous aurons ainsi l'idée d'une roue à réaction.

Pour en donner la théorie, nous considérerons le point d'entrée de l'eau dans la roue comme étant sur l'axe même de rotation; en ce point la vitesse de la roue étant nulle, aussi bien que la vitesse absolue de l'eau, il en sera de même pour la vitesse relative de celle-ci. Dans les calculs du n° 131, il faudrait donc faire $v = 0$, $u = 0$, $w = 0$; les équations (1), (2) et (3) deviennent alors

$$0 = \mathrm{H} + h + \frac{p_a - p}{\Pi},$$

$$w'^2 = 2g\left(h' + \frac{p - p'}{\Pi}\right) + u'^2,$$

$$\frac{p_a}{\Pi} + h + h' = \frac{p'}{\Pi},$$

d'où l'on tire sans peine

$$w'^2 = 2g\mathrm{H} + u'^2.$$

En négligeant les frottements, la seule perte de chute est en-

core la hauteur $\frac{v'^2}{2g}$ due à la vitesse absolue de sortie; on en calculera la valeur au moyen de l'équation (6), qui, combinée avec la précédente, donnera

$$v'^2 = 2u'^2 + 2gH - 2u'\cos\gamma\sqrt{2gH + u'^2}.$$

Le rendement serait donc

$$\mu = \frac{H - \frac{v'^2}{2g}}{H} = 1 - \frac{v'^2}{2gH} = -\frac{u'^2}{gH} + \cos\gamma\,\frac{u'}{\sqrt{gH}}\sqrt{2 + \frac{u'^2}{gH}},$$

soit, en posant $\frac{u'}{\sqrt{gH}} = x$,

$$\mu = -x^2 + x\cos\gamma\sqrt{2 + x^2}.$$

On peut considérer μ comme une fonction de x, et chercher son maximum quand x varie. A cet effet, nous ferons disparaître le radical en écrivant

$$(\mu + x^2)^2 = x^2\cos^2\gamma\,(2 + x^2),$$

ou bien, toute réduction faite,

$$x^4\sin^2\gamma - 2x^2(\cos^2\gamma - \mu) + \mu^2 = 0.$$

Si l'on tirait de là x^2 en fonction de μ, les racines devraient, par leur nature même, être réelles; par conséquent, on a la condition

$$(\cos^2\gamma - \mu)^2 - \mu^2\sin^2\gamma > 0,$$

ou, en développant et réduisant,

$$\cos^4\gamma - 2\mu\cos^2\gamma + \mu^2\cos^2\gamma > 0.$$

Si l'on supprime le facteur positif $\cos^2\gamma$, on trouve

$$\cos^2\gamma - 2\mu + \mu^2 > 0,$$

ou bien

$$(1 - \mu)^2 - \sin^2\gamma > 0,$$

et, attendu que $1 - \mu$ est nécessairement positif, ainsi que $\sin\gamma$,

$$1 - \mu > \sin\gamma,$$
$$\mu < 1 - \sin\gamma.$$

Le rendement limite auquel on peut atteindre est donc

$$\mu_1 = 1 - \sin\gamma.$$

La valeur correspondante de x s'obtient aisément par la relation entre x et μ ; si l'on prend l'équation dépourvue de radicaux, en y faisant $x = x_1$ et $\mu = 1 - \sin\gamma$, elle deviendra

$$x_1^4 \sin^2\gamma - 2x_1^2 \sin\gamma\,(1 - \sin\gamma) + (1 - \sin\gamma)^2 = 0,$$

soit, plus simplement, en extrayant la racine carrée,

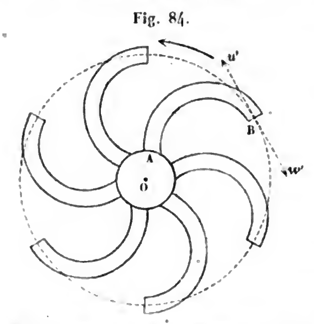
$$x_1^2 \sin\gamma - (1 - \sin\gamma) = 0,$$

d'où résulte

$$x_1 = \sqrt{\frac{1 - \sin\gamma}{\sin\gamma}}.$$

Si l'on supposait $\gamma = 0$, on trouverait $\mu_1 = 1$; mais x_1, et par suite u', deviendraient infinis. A la rigueur la valeur $\gamma = 0$ serait réalisable ; il faudrait seulement que les canaux qui constituent la roue fussent disposés, non plus les uns à côté des autres sans intervalles vides, comme dans les turbines, mais conformément au croquis ci-dessous (*fig.* 84). On aurait un certain nombre de tuyaux courbes tels que AB, raccordant en B la circonférence OB, à laquelle ils se terminent, et communiquant en A avec le tuyau alimentaire, auquel ils seraient invariablement liés. Le tuyau alimentaire formerait alors l'arbre de rotation. Mais en adoptant cette disposition, u' ne pourrait toujours pas devenir infini, ni par conséquent μ atteindre l'unité : on voit seulement qu'il faudrait faire tourner la roue très-rapidement. Il est d'ailleurs difficile de dépenser un grand volume d'eau sans donner un fort diamètre au tuyau central AO, ce qui rendrait inadmissible l'hypothèse consistant à supposer nulles les vitesses u, v et w ; il y a également des difficultés pour modérer

Fig. 84.



la dépense suivant les besoins. C'est sans doute par ces raisons qu'on fait peu d'usage de ce genre de roues.

En conservant la disposition des aubes de la turbine Fourneyron, ce qui donne lieu à une série de canaux contigus, on ne peut plus faire $\gamma = 0$, et alors la limite supérieure de rendement théorique décroît assez vite à mesure que γ augmente ; ainsi, pour $\gamma = 15^\circ$, $1 - \sin\gamma$ ne serait déjà plus que 0,741. Par contre, comme on offrirait à l'eau plus de débouché, on perdrait peut-être moins en frottements, et le rendement théorique pourrait moins différer du rendement réel.

§ IV. — De quelques machines à élever l'eau.

138. *Des pompes.* — La disposition et la forme des organes des pompes varient à l'infini, suivant les constructeurs. Il faudrait un traité spécial pour en décrire seulement les principales espèces. Nous supposerons donc connue du lecteur la description sommaire de ces appareils, et nous nous bornerons ici à quelques généralités.

(*a*) *Effort nécessaire pour faire mouvoir le piston.* — Il faut distinguer deux cas : celui des pompes à simple effet et celui des pompes à double effet. Dans le premier cas, le piston ne produit l'aspiration de l'eau qui remplit le corps de pompe, ou bien ne chasse l'eau précédemment aspirée, en la forçant à s'écouler par le tuyau d'ascension, que lorsqu'il se meut dans un sens déterminé ; dans le second, ces effets ont lieu simultanément, quel que soit le sens de la marche. Supposons d'abord l'aspiration seule ; soient :

h sa hauteur,
Ω la section du piston,
p_a la pression atmosphérique,
Π le poids du mètre cube d'eau.

Le côté du piston en contact avec la colonne d'eau aspirée supporterait, en supposant qu'il restât en équilibre, une pression égale à $\Omega(p_a - \Pi h)$, tandis que l'autre côté, généralement en communication directe avec l'atmosphère, supporterait une pression de sens contraire égale à $p_a\Omega$; la différence $\Pi\Omega h$ serait la pression résultante sur le piston. Si au contraire il n'y a qu'un refoulement à une hauteur h', on trouvera de même que

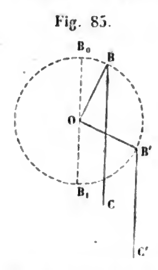
le piston supporte, abstraction faite de son mouvement, une pression résultante $\Pi\Omega h'$. Enfin, si la pompe était à double effet, ces deux résultantes se superposeraient, et la pression totale aurait pour valeur $\Pi\Omega(h+h')$ ou $\Pi\Omega H$, H désignant la hauteur comprise entre le niveau du bassin qui fournit l'eau et le niveau du bassin qui la reçoit. Dans certaines pompes à simple effet, la même superposition des pressions résultantes sur les deux faces du piston a lieu pour la marche dans un certain sens, et ces résultantes se font équilibre quand on marche en sens contraire : c'est ce qui arrive par exemple pour les pompes dites *élévatoires*. Il est bien entendu que si le piston n'a pas un mouvement horizontal, il faudrait encore tenir compte de son poids et de celui de sa tige, dont la composante, suivant une parallèle à l'axe du corps de pompe, s'ajouterait aux expressions précédentes ou s'en retrancherait, suivant les cas. Il faudrait leur ajouter, en outre, le frottement du piston contre le corps de pompe, et, s'il y a lieu, celui de la tige contre la garniture qu'elle traverse.

Mais ces expressions donnent seulement la valeur de la force qui serait capable de maintenir le piston, ainsi que l'eau aspirée ou refoulée, en équilibre dans une position donnée. Lorsqu'il y a mouvement, l'effort exercé sur le piston peut différer considérablement de cette force. D'abord l'eau ne se meut pas dans les tuyaux et ne traverse pas les étranglements formés par les soupapes, sans éprouver des pertes de charge qui s'ajoutent aux hauteurs h et h'. Par exemple, dans le cas de l'aspiration, s'il y a une perte de charge ζ sur la longueur de la colonne aspirée, la pression $\Omega(p_a - \Pi h)$ sera réduite à $\Omega[p_a - \Pi(h+\zeta)]$, et la résultante $\Pi\Omega h$ deviendrait $\Pi\Omega(h+\zeta)$. De même, si l'on considère un simple refoulement, et qu'il y ait sur toute la colonne refoulée une perte de charge ζ', le niveau piézométrique dans cette colonne, au point où elle touche le piston, se trouverait élevé de ζ' et la pression résultante serait $\Pi\Omega(h'+\zeta')$. Si la pompe est à double effet, l'expression $\Pi\Omega H$ devrait pareillement être remplacée par $\Pi\Omega(H+\zeta+\zeta')$. Indépendamment des hauteurs ζ et ζ', il faut encore en ajouter d'autres, si la masse d'eau mise en mouvement ne se déplace pas d'un mouvement uniforme. Soient en

effet P le poids du piston avec sa tige, j son accélération, P′ le poids de l'eau mise en mouvement et qui remplit les tuyaux d'aspiration ou d'ascension : le poids P′ étant supposé prendre en moyenne l'accélération j', on voit qu'un supplément de force $\frac{1}{g}(Pj + P'j')$ serait nécessaire pour vaincre l'inertie de l'eau et du piston. Ce supplément, tantôt moteur, tantôt résistant, peut produire des variations considérables dans la force totale qui doit être appliquée au piston, ce qui a toujours des inconvénients : car d'abord il faut déterminer les dimensions des pièces, non d'après la moyenne, mais bien d'après le maximum des efforts supportés, ce qui conduit à faire un appareil lourd et dispendieux; en second lieu, il est rare que les grandes variations de résistance ne donnent pas lieu indirectement à quelque déperdition de travail moteur. On diminue l'importance du terme $\frac{Pj}{g}$ en équilibrant le piston par des contre-poids, si P est grand; on diminue aussi j' et par suite $\frac{P'j'}{g}$, dans le cas où la chose en vaut la peine, au moyen d'un réservoir d'air (nº 100) placé à l'origine du tuyau d'ascension, qui rend sensiblement uniforme le mouvement d'une grande partie du poids refoulé, et par conséquent supprime ou atténue beaucoup la force d'inertie correspondante.

Un autre moyen pour obtenir l'uniformité approximative du mouvement dans le tuyau d'ascension consiste à le faire servir au débit de plusieurs pompes fonctionnant simultanément, de manière que leur produit total dans une série de temps égaux soit peu variable : voici comment on y parvient. Soit O (*fig.* 85) l'axe de rotation d'un arbre qui reçoit d'un moteur un mouvement régularisé par un volant, et en conséquence à peu près uniforme. Cet arbre porte deux manivelles OB, OB′, faisant entre elles un angle droit; à chacune d'elles s'articule une bielle, articulée à son autre extrémité avec un piston guidé dans son mouvement, et qui appartient à une pompe à double effet. Pour fixer les

Fig. 85.



idées, nous supposerons l'arbre O horizontal, les tiges des pistons verticales et coupant par leurs prolongements l'axe de rotation ; les bielles auront, suivant l'usage, une même longueur, égale à cinq ou six fois celle de la manivelle OB. Il résulte de là que l'obliquité des bielles sur la verticale étant toujours assez peu sensible, les vitesses v et v' des pistons sont sensiblement celles des projections de B et B' sur la verticale B_0B_1 ; en désignant par ω la vitesse angulaire de l'arbre, b la longueur $\overline{OB}$, x l'angle de OB avec la verticale B_0B_1, on aura donc

$$v = \omega b \sin x, \quad v' = \omega b \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \omega b \cos x.$$

Soient encore Ω la section commune des deux pistons, et θ un temps très-court ; abstraction faite des pertes par les jeux des appareils, le volume d'eau fourni pendant le temps θ à un tuyau d'ascension commun, par les deux pompes réunies, sera la somme arithmétique des volumes engendrés par les deux pistons, soit $\Omega(v + v')\theta$, ou bien encore $\Omega\omega b\theta(\sin x + \cos x)$, formule dans laquelle le sinus et le cosinus doivent être pris en valeur absolue, puisqu'il s'agit d'une somme arithmétique et qu'alors les vitesses sont essentiellement positives. Il suffit par conséquent pour avoir le maximum, le minimum et la moyenne de la quantité variable $\sin x + \cos x$, de supposer x compris entre o et $\frac{\pi}{2}$. Or on trouve dans cet intervalle

Deux minimums égaux à 1, pour $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$;

Un maximum égal à 1,414, répondant à $x = \frac{\pi}{4}$;

La valeur moyenne égale à $\dfrac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx} = \dfrac{4}{\pi} = 1,272.$

Il y aurait ainsi entre le minimum et la moyenne un écart relatif de $\frac{0,272}{1,272}$ ou 0,214 environ; tandis que, avec une seule

pompe, le produit élémentaire, proportionnel à $\sin x$, serait variable de 0 à 1, et aurait $\frac{2}{\pi}$ ou 0,637 pour valeur moyenne, ce qui produirait un écart relatif bien plus grand entre le minimum et la moyenne.

On obtient un résultat encore plus satisfaisant quand on emploie trois manivelles faisant entre elles des angles de 120 degrés. Le produit élémentaire des trois pompes réunies est alors proportionnel à $\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$, chaque sinus devant toujours être pris positivement quel que soit x. On voit d'ailleurs aisément que la somme arithmétique des trois sinus ne change pas en augmentant l'arc de 60 degrés, de sorte qu'il suffit de faire varier x de 0 à $\frac{\pi}{3}$. Dans ces limites, les deux premiers sinus sont positifs et le troisième négatif; ainsi la somme des valeurs absolues a pour expression

$$\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right),$$

ou bien, en développant et observant que les arcs $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ réunis font la circonférence entière,

$$\sin x + 2\cos x \sin\frac{2\pi}{3},$$

ou enfin

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x.$$

Les minimums de cette quantité répondent à $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{3}$, et ont pour valeur $\sqrt{3}$ ou 1,732; le maximum, répondant à $x = \frac{\pi}{6}$, est $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}.\sqrt{3}$, c'est-à-dire 2; la moyenne $\dfrac{\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x + \sqrt{3}\cos x)\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{3}} dx}$ devient $\frac{6}{\pi}$ ou 1,910. L'écart relatif

entre le minimum et la moyenne s'abaisse par conséquent à $\frac{1,910 - 1,732}{1,910}$ ou à 0,093 environ.

Il y a aussi beaucoup de régularité dans le produit élémentaire des trois pompes réunies comme ci-dessus, quand on les suppose seulement à simple effet. Admettons, par exemple, que chaque piston ne refoule de l'eau que lorsque sa manivelle OB descend de B_0 en B_1 ; la somme des produits élémentaires sera encore proportionnelle à l'expression

$$\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right);$$

mais les pompes étant à simple effet, au lieu de changer de signe les sinus négatifs, il faudra les supprimer complétement. Cela posé, faisons d'abord croître x de 0 à $\frac{\pi}{3}$: x et $x + \frac{2\pi}{3}$ seront plus petits que la demi-circonférence, et $x + \frac{4\pi}{3}$ sera compris entre π et 2π. Dans ces limites, il ne faudra donc conserver que la somme $\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$, qu'on peut mettre sous la forme

$$2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right),$$

puisque $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; cette somme, égale à $\sin\frac{\pi}{3}$ ou 0,866 pour $x = 0$, devient maximum et égale à 1 pour $x = \frac{\pi}{6}$, puis décroît jusqu'à 0,866 quand x passe de $\frac{\pi}{6}$ à $\frac{\pi}{3}$. En second lieu, si nous prenons les valeurs de x entre $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$, les sinus de $x + \frac{2\pi}{3}$ et $x + \frac{4\pi}{3}$ sont tous deux négatifs, en sorte qu'il faut conserver seulement $\sin x$, lequel a encore 0,866 pour valeur minimum, répondant aux deux limites, et 1 pour maximum placé à égale distance de ces limites. Il est d'ailleurs inutile de considérer les valeurs de x supérieures à $\frac{2\pi}{3}$, car une rotation

de 120 degrés ne produisant pas un changement de figure dans l'ensemble de l'appareil, on retrouverait les mêmes sinus. On voit donc que le produit élémentaire des trois pompes fonctionnant simultanément varie comme des nombres toujours compris entre 0,866 et 1, et par suite qu'il est suffisamment régulier : le minimum et le maximum sont respectivement moitié de ce qu'ils étaient dans le cas des trois pompes à double effet.

Nous avons supposé ci-dessus que les deux manivelles rectangulaires l'une avec l'autre, ou les trois manivelles se succédant avec des avances de 120 degrés, sont fixées au même arbre : il est visible qu'on peut les fixer à des arbres différents, pourvu qu'ils aient tous la même vitesse angulaire, les manivelles étant égales; ou, plus généralement, pourvu que le centre d'articulation de chacune d'elles avec la bielle correspondante ait, dans les trois systèmes, la même vitesse de rotation autour de son arbre.

Il est toujours utile, comme on l'a déjà dit, d'éviter de grandes variations dans la force qui doit être transmise au piston d'une pompe; cela devient presque indispensable quand on le fait mouvoir au moyen de chevaux attelés à un manége. Une condition essentielle pour le bon emploi du travail des chevaux, c'est que la vitesse de leur marche et l'effort qu'ils ont à exercer soient peu variables; il serait difficile d'y satisfaire avec une pompe unique à simple effet refoulant une longue colonne d'eau, dont le piston recevrait son mouvement de l'arbre du manége par un système de manivelle avec bielle, et l'on n'y parviendrait que par l'emploi de volants plus ou moins lourds. Il serait en général préférable de régulariser la résistance par les moyens qu'on vient d'indiquer.

(*b*) *Travail à transmettre au piston.* — Si l'on connaissait exactement, dans chaque position du piston, la force à lui appliquer pour lui donner son mouvement, il serait aisé d'en déduire le travail qu'on doit lui transmettre. Mais cette force ne peut pas être évaluée bien exactement; ainsi, l'appréciation du frottement du piston contre le corps de pompe, ou contre la garniture qu'il traverse (si c'est un piston plongeur), est nécessairement incertaine, parce qu'elle dépend de l'habileté

du constructeur; on peut même en dire autant des pertes de charge éprouvées dans les tuyaux d'aspiration et d'ascension, à cause du défaut de permanence et d'uniformité dans le mouvement. Cependant, quand le tuyau d'ascension a une grande longueur, on a vu qu'il était utile de faire en sorte que le mouvement y fût uniforme, et alors on peut calculer avec assez d'exactitude la charge totale ζ'' entre les deux extrémités de ce tuyau. Cela posé, admettons d'abord qu'il s'agisse d'une pompe à double effet : la pression résultante exercée sur le piston étant exprimée par $\Pi\Omega(H+\zeta+\zeta')$, la force à lui transmettre sera représentée par $\Pi\Omega(H+\zeta'')+F$. Nous tiendrons compte par ce terme additif F du frottement contre le corps de pompe et les garnitures, de l'excès de $\zeta+\zeta'$ sur ζ'', et enfin de l'inertie. Le travail total de cette force, dans une course de longueur l, partagée en éléments dx, sera

$$\Pi\Omega l(H+\zeta'')+\int_0^l F\,dx.$$

Or Ωl représente à peu près le volume d'eau élevé dans une course de piston; si donc on veut le travail employé par mètre cube d'eau élevé à la hauteur utile H, il faudra calculer la quantité

$$\Pi(H+\zeta'')+\frac{1}{\Omega l}\int_0^l F\,dx.$$

Dans la pratique, vu la difficulté d'apprécier exactement l'intégrale $\int^l F\,dx$, on se borne à multiplier le terme $\Pi(H+\zeta'')$ par un coefficient n tel que 1,10 ou 1,15 ou 1,20, suivant le plus ou moins de perfection de la machine.

Si la pompe était à simple effet, on arriverait à la même expression du travail, en réunissant deux courses consécutives du piston.

Quand on veut évaluer en chevaux dynamiques le travail transmis au piston, il faut encore connaître la vitesse moyenne u du piston. On en déduit sans peine le débit moyen par seconde Ωu, si la pompe est à double effet, ou $\frac{\Omega u}{2}$ pour une

pompe à simple effet; on multiplie ce débit par $n\Pi(H+\zeta'')$; divisant enfin par 75, on a le nombre de chevaux cherché.

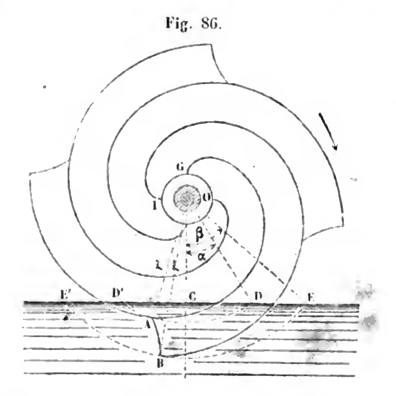
(*c*) *Vitesse moyenne du piston; produit des pompes.* — La vitesse moyenne du piston ne doit pas être excessivement faible, car pour débiter un volume d'eau notable, il faudrait donner au corps de pompe et au tuyau d'ascension un très-grand diamètre, ce qui augmenterait les frais d'établissement. Mais une vitesse trop forte a aussi de graves inconvénients : d'abord on augmente les pertes de charge dans une proportion rapide; ensuite il peut se faire que l'eau fournie par le tuyau d'aspiration n'arrive pas assez vite pour suivre le piston, et que le corps de pompe ne se remplisse pas à chaque course, ce qui occasionnerait un déchet dans le produit, et un choc au retour du piston en sens contraire. Vu la difficulté de calculer exactement la vitesse de l'eau aspirée, on adopte ordinairement une vitesse moyenne du piston, dans les environs de $0^m,20$ par seconde; rarement on atteint $0^m,30$. Il est clair que la limite peut être d'autant plus élevée que le piston se meut à une hauteur moindre au-dessus du bassin où l'on puise l'eau, et qu'on a mis plus de soin à éviter les pertes de charge dans le tuyau d'aspiration.

Le piston ayant une course de longueur l et une section Ω, décrit, pendant une des périodes employées à l'élévation de l'eau dans le bassin supérieur, un volume Ωl; ce volume serait aussi celui de l'eau élevée pendant la même période, s'il n'y avait pas de fuites par les soupapes, ou entre le piston et le cylindre creux sur lequel il glisse. Par cette raison, le volume élevé varie de $0,75\Omega l$ à Ωl; le coefficient dont il faut affecter le volume décrit par le piston varie avec le soin apporté à la construction et à l'entretien de la pompe; dans les circonstances ordinaires, on peut le supposer de 0,90 à 0,92.

139. *Roues à tympan.* — Cette roue consiste essentiellement en un arbre horizontal O (*fig.* 86), auquel sont reliées invariablement un certain nombre de surfaces cylindriques ayant leurs génératrices parallèles à l'axe; les sections droites de ces cylindres sont des développantes de cercle. L'intervalle entre deux cylindres consécutifs forme ainsi un canal

ayant une largeur constante, aussi bien dans le sens normal

Fig. 86.



aux développantes que perpendiculairement au plan de la figure. L'un de ces canaux, par exemple, aura son ouverture extérieure en AB et son autre ouverture en IG. Tout le système tourne autour de l'axe O, dans le sens de la flèche; le centre O est au-dessus d'un bassin qui fournit de l'eau à élever, et le niveau de ce bassin noie plus ou moins la partie inférieure de la roue.

Pendant tout le temps que l'ouverture AB se trouve au-dessous du niveau du bassin, en totalité ou partiellement, il entre, par l'effet de la rotation, une certaine quantité d'eau dans le canal ABIG; la rotation continuant, AB s'élève et finit par se trouver au-dessus de IG; alors l'eau introduite s'écoule en IG par les embouchures laissées libres tout autour de l'arbre, et tombe dans un canal qui l'emmène au bassin destiné à la recevoir.

Nous nous proposerons deux questions: 1° une roue à tympan donnée tourne avec un vitesse angulaire connue, et occupe une situation connue relativement au bassin inférieur; quel sera son débit par seconde? 2° quel sera le travail que le moteur devra lui transmettre?

Appelons S la section AB projetée sur le plan passant par l'axe O et le centre de AB; N le nombre de tours de la roue

par minute; n le nombre de développantes; H la hauteur $\overline{OC}$ du point O au-dessus du niveau de l'eau à épuiser; r', r'' les distances des points A et B à l'axe de rotation. Le point A décrira au-dessous de l'eau un arc DAD', dont nous désignerons l'angle au centre par 2α; pareillement le point B décrira l'arc EBE', répondant à l'angle au centre 2β. On aura d'abord

$$\cos\alpha = \frac{H}{r'}, \qquad \cos\beta = \frac{H}{r''};$$

$$\text{arc DAD}' = 2r'\alpha = 2r' \operatorname{arc} \cos\frac{H}{r'},$$

$$\text{arc EBE}' = 2r''\beta = 2r'' \operatorname{arc} \cos\frac{H}{r''};$$

l'arc décrit au-dessous de l'eau par le centre de AB devant peu différer de la moyenne $\frac{1}{2}(\text{DAD}' + \text{EBE}')$ sera donc exprimé par

$$r' \operatorname{arc}\cos\frac{H}{r'} + r'' \operatorname{arc}\cos\frac{H}{r''} = L.$$

Or le volume entré par l'ouverture AB est EDE'D', ou le produit LS de cet arc moyen par la section perpendiculaire S; donc, puisqu'il y a n canaux qui puisent le même volume dans chaque tour de roue, le volume élevé sera, par tour, nLS; enfin, le nombre de tours par seconde étant $\frac{N}{60}$, le débit Q de la roue dans le même temps aurait pour valeur $\frac{1}{60}Nn\text{LS}$, c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$Q = \frac{1}{60} NnS\left(r' \operatorname{arc}\cos\frac{H}{r'} + r'' \operatorname{arc}\cos\frac{H}{r''}\right).$$

Mais ce calcul suppose qu'il entre pendant chaque élément de temps dt par l'ouverture AB, un volume d'eau égal à celui qu'engendre AB dans le même temps; de cette manière on ne tient compte ni de la contraction que peut éprouver le liquide à son entrée, ni du mouvement communiqué à l'eau environnante, qui peut jusqu'à un certain point fuir devant la surface AB au lieu de la traverser. Par ces raisons, il serait bon

en pratique d'admettre une certaine réduction dans la valeur de Q ci-dessus donnée; on pourrait l'affecter, par exemple, d'un coefficient que nous évaluons, par aperçu, à 0,80, faute d'expériences précises sur ce sujet.

Voici un exemple du calcul de Q. Soient donnés $N = 12$, $n = 4$, $r' = 2^m,50$, $r'' = 3^m,00$, $H = 2^m,00$, $S = 0^{mq},17$. On aura

$$\frac{H}{r'} = 0,8000, \qquad \text{arc cos}\frac{H}{r'} = 0,410\frac{\pi}{2};$$

$$\frac{H}{r''} = 0,6667, \qquad \text{arc cos}\frac{H}{r''} = 0,535\frac{\pi}{2};$$

$$r' \text{arc cos}\frac{H}{r'} + r'' \text{arc cos}\frac{H}{r''} = \frac{\pi}{2}(1,025 + 1,605) = 4,131;$$

d'où l'on déduit

$$Q = 0^{mc},562,$$

nombre qu'on devrait réduire à $0^{mc},45$ environ, en le multipliant par 0,80.

Quant au travail moteur à dépenser pour élever un certain poids P d'eau, il se compose: 1° du travail PH destiné à vaincre celui de la pesanteur; 2° du travail du frottement sur les tourillons et épaulements de l'arbre O, lequel peut être évalué par les formules connues; 3° du travail nécessaire pour vaincre les frottements de l'eau sur les parois solides en contact, travail peu sensible, si les développantes forment par leur réunion des canaux assez larges; 4° le travail nécessaire pour donner à l'eau la vitesse absolue avec laquelle elle quitte la roue. Ce dernier travail sera également assez faible, si on a soin de faire tourner l'arbre lentement; car le point le plus bas d'une développante quelconque se trouvant toujours sur la verticale du point I, on voit que l'eau déjà entrée à l'intérieur du canal ABIG, et celle qui entrera encore dans la suite de la même révolution, ne seront complétement vides qu'après un tour entier à partir de la position représentée par la figure. L'eau s'élève donc avec peu de vitesse absolue dans la machine, et par conséquent une faible partie du travail moteur est employée à lui donner une puissance vive inutile. Mais il ne faut

pas oublier que cela suppose la lenteur de la rotation autour de l'axe O.

En résumé, on calculera les deux premières parties du travail moteur, qui sont les plus importantes, et pour tenir compte approximativement des deux autres, on multipliera la somme des parties calculées par un coefficient un peu supérieur à l'unité.

L'idée première de la roue à tympan est fort ancienne, puisque Vitruve parle d'une machine analogue; c'est Lafaye qui, en 1717, a proposé de lui donner la forme que nous avons décrite ci-dessus. Cette machine paraît susceptible d'un assez bon rendement, et se prête à l'épuisement de grands volumes d'eau; mais la hauteur à laquelle on monte l'eau épuisée, toujours moindre que le rayon de la roue, se trouve nécessairement limitée; de plus la roue est lourde et d'un transport difficile à cause de son poids.

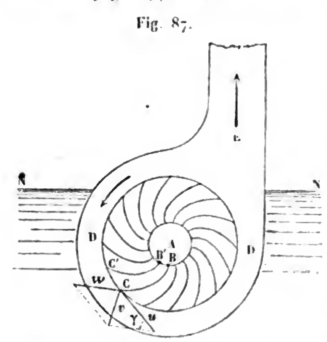
140. *Turbines élévatoires; pompe centrifuge.* — La plupart des machines qui servent à utiliser la puissance motrice d'une chute d'eau peuvent, avec quelques modifications, se transformer en machines à élever l'eau, et inversement. Ainsi, par exemple, si une roue de côté emboîtée dans un coursier reçoit un mouvement autour de son axe horizontal, par l'action d'un moteur quelconque, de manière à ce que les palettes remontent la partie circulaire du coursier, ces palettes entraîneront avec elles l'eau du bief d'aval et la rejetteront dans le bief d'amont : on obtiendrait ainsi, en principe, la roue élévatoire. De même, qu'on prenne une turbine Fourneyron, qu'on fasse communiquer les intervalles entre les cloisons directrices avec le bief d'aval, et déboucher les orifices extérieurs de la turbine avec un espace fermé, d'où partirait un tuyau d'ascension; lorsqu'on imprimera un mouvement de rotation à l'appareil, l'eau comprise dans les aubes sera poussée vers l'extérieur par la force centrifuge, et arrivera dans l'espace fermé, avec un excès de pression qui la fera monter dans le tuyau à une certaine hauteur, d'autant plus grande que la rotation sera plus rapide. Si le tuyau n'est pas trop élevé, un écoulement s'établira à son extrémité; cet écoulement sera d'ailleurs continu,

l'eau chassée par la force centrifuge étant sans cesse remplacée par celle du bief d'aval, qui tend à combler le vide fait dans les cloisons.

La théorie d'une telle turbine, qu'on pourrait appeler *turbine élévatoire*, ressemblerait beaucoup à celle du n° 131. Mais, comme il s'agit là d'une machine qu'on n'a point encore établie ni expérimentée, nous ne croyons pas devoir nous y arrêter davantage. Nous nous bornerons à étudier une pompe dite *centrifuge*, qui rentre dans la même classe de machines, mais qui cependant a plutôt de l'analogie avec les roues à réaction.

Une roue composée d'une série d'aubes cylindriques, telles que BC (*fig.* 87), assemblées entre deux plateaux annulaires, est assujettie à tourner autour d'un axe horizontal projeté en A. L'eau du bassin à épuiser arrive librement dans le cercle AB, qui limite intérieurement les aubes, soit parce que le centre A est un peu au-dessous du niveau NN de ce bief, soit au moyen de tuyaux d'aspiration. Le mouvement de rotation imprimé à cette roue chasse l'eau des canaux BCB'C' dans l'espace annulaire D, où elle acquiert une pression suffisante pour la faire monter par le tuyau E, seule issue qui lui soit ouverte, et par où elle arrive dans un bassin supérieur. La vitesse angulaire de l'arbre A étant connue, ainsi que toutes les dimensions de l'appareil et sa situation relativement aux deux bassins de départ et d'arrivée, on peut demander le débit de la pompe par seconde, le travail moteur qu'elle consomme et son rendement.

Fig. 87.



Afin d'étudier ces questions, nommons :

H la différence du niveau des deux bassins ;

h l'immersion du centre A au-dessous du bassin inférieur;

r le rayon extérieur $\overline{AC}$ de la roue ;

b la distance des deux plateaux annulaires qui réunissent les aubes;
ω la vitesse angulaire de l'arbre A;
v la vitesse absolue de l'eau quand elle quitte les aubes;
u la vitesse ωr à la circonférence extérieure de la roue;
w la vitesse relative de l'eau pour le même point;
γ l'angle aigu des vitesses w et u, c'est-à-dire l'angle sous lequel les aubes coupent la circonférence extérieure;
p la pression de l'eau à son point d'entrée dans l'intervalle des aubes;
p' sa pression au point de sortie;
p_a la pression atmosphérique;
Π le poids du mètre cube d'eau.

Nous commencerons par simplifier un peu la question au moyen de quelques hypothèses. D'abord nous négligerons la vitesse absolue de l'eau dans le tuyau d'ascension et dans le conduit qui l'amène jusqu'aux aubes, ce qui sera permis si les sections transversales de ces conduits sont assez grandes relativement au volume débité. Toutefois le rayon $\overline{AB}$ devra encore être assez petit pour que la vitesse de rotation du point B soit négligeable; en d'autres termes, nous considérerons l'introduction de l'eau dans la roue comme se faisant sur l'axe, sans vitesse d'entraînement, et par conséquent aussi sans vitesse relative. Secondement, nous raisonnerons comme si l'eau se déplaçait horizontalement dans son passage à travers la roue; la hauteur de celle-ci sera supposée faible relativement à H, de sorte qu'on pourra en faire abstraction. D'ailleurs rien n'empêcherait en pratique de prendre l'arbre A vertical; mais ce serait à peu près indifférent pour le résultat.

Cela posé, la pression variant suivant la loi hydrostatique depuis le bassin inférieur jusqu'au point d'entrée, et depuis le point de sortie jusqu'à l'autre bassin, on aura

$$p = p_a + \Pi h,$$
$$p' = p_a + \Pi (H + h);$$

d'où l'on tire, par soustraction,

$$\frac{p' - p}{\Pi} = H.$$

Maintenant, si l'on applique le théorème de Bernoulli au mouvement relatif d'une molécule suivant la courbe BC (n° 20), le gain de charge fictif s'exprimera par $\frac{\omega^2 r^2}{2g}$ ou $\frac{u^2}{2g}$, et on trouvera

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{p-p'}{\Pi} + \frac{u^2}{2g},$$

ou bien

(1) $$w^2 = -2gH + u^2,$$

équation qui fait connaître w, puisque u est donné. Ce premier résultat permet de calculer le débit Q de la machine dans chaque seconde. En effet, l'eau sortant des aubes coupe une surface cylindrique $2\pi br$ sous l'angle γ et avec la vitesse relative w; donc l'orifice total de sortie, mesuré perpendiculairement à w, est $2\pi br \sin\gamma$, et par suite

(2) $$Q = 2\pi brw \sin\gamma.$$

Le travail moteur consommé par seconde pour faire tourner la roue comprend d'abord le travail utile ΠQH; ensuite on observera que l'eau arrive dans l'espace annulaire D avec une vitesse absolue v, qu'elle perd en agitation inutile; d'où résulte un travail moléculaire $\Pi Q \frac{v^2}{2g}$. Ainsi donc, abstraction faite des autres frottements, on dépensera par seconde un travail $\Pi Q\left(H + \frac{v^2}{2g}\right)$; et comme le travail utile est seulement ΠQH, le rendement μ aura pour valeur

(3) $$\mu = \frac{H}{H + \frac{v^2}{2g}} = \frac{1}{1 + \frac{v^2}{2gH}}.$$

Reste à calculer v; or v est la résultante de w et de u, et l'on a

$$v^2 = u^2 + w^2 - 2uw\cos\gamma,$$

soit, à cause de (1),

(4) $$v^2 = -2gH + 2u^2 - 2u\cos\gamma\sqrt{-2gH + u^2}.$$

Les équations (1), (2), (3) et (4) permettent de résoudre sans peine les questions proposées.

Voyons encore par quel moyen on tirerait le meilleur parti possible de la puissance motrice. L'expression (3) du rendement devient, en y substituant pour v sa valeur et faisant $\frac{u}{\sqrt{gH}} = x$,

$$\mu = \frac{1}{x^2 - x\cos\gamma\sqrt{x^2-2}};$$

on aura donc le maximum de μ, considéré comme fonction de x, en cherchant le minimum du dénominateur, ou, ce qui revient au même, le minimum de $\frac{1}{\mu}$. On procédera dans cette recherche comme au n° 137; on écrira

$$x^2 - \frac{1}{\mu} = x\cos\gamma\sqrt{x^2-2},$$

ou, en faisant disparaître le radical et ordonnant,

$$x^4\sin^2\gamma - 2x^2\left(\frac{1}{\mu} - \cos^2\gamma\right) + \frac{1}{\mu^2} = 0.$$

Or μ ne peut recevoir que les valeurs qui, mises dans cette équation bicarrée, donneront x^2 réel et positif; donc on a

$$\left(\frac{1}{\mu} - \cos^2\gamma\right)^2 - \frac{1}{\mu^2}\sin^2\gamma > 0,$$

soit successivement

$$\frac{1}{\mu^2}\cos^2\gamma - \frac{2}{\mu}\cos^2\gamma + \cos^4\gamma > 0,$$

$$\frac{1}{\mu^2} - \frac{2}{\mu} + \cos^2\gamma > 0,$$

$$\left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^2 > \sin^2\gamma.$$

Comme $\sin\gamma$ et $\frac{1}{\mu} - 1$ sont des quantités positives, on pourra extraire la racine carrée de deux membres et poser

$$\frac{1}{\mu} - 1 > \sin\gamma \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\mu} > 1 + \sin\gamma;$$

le minimum de $\frac{1}{\mu}$ a donc pour valeur $1 + \sin\gamma$, et le rendement limite μ_1 sera $\frac{1}{1+\sin\gamma}$. La valeur correspondante x_1 de x se tire de l'équation bicarrée ci-dessus, qui donne

$$x_1^2 = \frac{\frac{1}{\mu_1} - \cos^2\gamma}{\sin^2\gamma} = \frac{1 + \sin\gamma - \cos^2\gamma}{\sin^2\gamma} = \frac{1 + \sin\gamma}{\sin\gamma}.$$

Ainsi, la vitesse u la plus favorable au rendement s'obtiendrait par l'équation

$$u^2 = g\text{H}\,\frac{1 + \sin\gamma}{\sin\gamma};$$

on en conclurait la vitesse angulaire $\omega = \frac{u}{r}$ et le nombre de tours par minute $\text{N} = \frac{30\omega}{\pi}$. Le rendement étant alors $\frac{1}{1+\sin\gamma}$, on peut être tenté, pour l'augmenter, de faire γ très-petit; mais on voit que les vitesses u et ω deviendraient très-grandes, et l'on perdrait beaucoup en frottements de l'eau contre les aubes. D'ailleurs on a, en vertu des équations (1) et (2),

$$\text{Q} = 2\pi br \sin\gamma \sqrt{u^2 - 2g\text{H}} = 2\pi br \sqrt{g\text{H}} . \sin\gamma . \sqrt{x^2 - 2};$$

le débit Q' qui correspond au maximum de rendement sera donc

$$\text{Q}' = 2\pi br \sqrt{g\text{H}} . \sin\gamma . \sqrt{\frac{1+\sin\gamma}{\sin\gamma} - 2}$$
$$= 2\pi br \sqrt{g\text{H}} \sqrt{\sin\gamma(1 - \sin\gamma)}.$$

Ce débit s'annulerait en même temps que γ; lorsque γ varie seul, Q' devient maximum pour $\sin\gamma = 1 - \sin\gamma$, ou $\sin\gamma = \frac{1}{2}$, ou encore $\gamma = 30°$; le rendement est alors $\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire $\frac{2}{3}$.

La valeur $\gamma = 0$ est par conséquent inadmissible comme annulant le débit; mais à ce point de vue il n'y a pas d'intérêt à dépasser $\gamma = 30°$. D'un autre côté, cette dernière valeur ne donne

pas un rendement théorique bien élevé; peut-être ce qu'il y aurait de mieux à faire en pratique serait de prendre γ entre 15 et 20 degrés. Pour $\gamma = 15^\circ$, par exemple, le rendement s'élève à $\frac{1}{1 + 0,2588} = 0,794$, et le produit $\sqrt{\sin\gamma\,(1 - \sin\gamma)}$ s'abaisse à 0,438, tandis qu'il est 0,50 pour $\gamma = 30^\circ$; c'est une diminution que l'on pourrait compenser par une petite augmentation de r ou de b.

Au lieu de disposer la roue comme le représente la *fig.* 87, on aurait pu adopter les canaux isolés, comme dans la *fig.* 85. Dans ce cas, l'expression du débit changerait, et l'angle γ pourrait devenir nul; mais, attendu que u ne peut croître jusqu'à l'infini, la valeur $\frac{1 + \sin\gamma}{\sin\gamma}$ ne serait plus admissible pour $\frac{u^2}{gH}$, et il faudrait s'écarter plus ou moins du rendement limite. De plus, à débit égal, on perdrait probablement davantage en frottements.

Il existe au Conservatoire des Arts et Métiers une pompe centrifuge qui figurait à l'Exposition universelle de Londres en 1851; un autre modèle, exposé à Paris, en 1855, sous le nom de *pompe centrifuge d'Appold,* donnait, suivant le constructeur, un rendement de 69 pour 100. Ces machines sont remarquables en ce qu'elles peuvent avec de faibles dimensions débiter beaucoup d'eau, point de vue sous lequel elles ont de la ressemblance avec les turbines.

FIN DE LA SECONDE PARTIE.

RECUEIL

DE

TABLES NUMÉRIQUES

POUR FACILITER DIVERS CALCULS

D'HYDRAULIQUE.

TABLE I, donnant les hauteurs correspondantes à des vitesses comprises entre $1^m,00$ et $10^m,00$ par seconde.

N. B. On a pris pour le nombre g (accélération des graves dans le vide) la valeur $g = 9^m,8088$, soit $\frac{1}{2g} = 0,0509746 35\ldots$

Toute vitesse en dehors des limites de la table peut y être ramenée au moyen d'une multiplication par 10^n, n étant un exposant entier positif ou négatif. La hauteur donnée par la table, en regard de la vitesse ainsi modifiée, devrait alors être divisée par 10^{2n}, pour avoir la hauteur qui correspond à la vitesse primitive.

Exemple. On demande la hauteur due à une vitesse de $0^m,457$ par seconde. — Ce dernier nombre multiplié par 10 devient $4^m,57$, en regard duquel on trouve dans la table $1^m,0646$; le résultat cherché sera $\frac{1}{10^2} \cdot 1^m,0646$, soit $0^m,010646$.

VITESSES.	HAUTEURS correspondantes.	VITESSES.	HAUTEURS correspondantes.	VITESSES.	HAUTEURS correspondantes.	VITESSES.	HAUTEURS correspondantes.
m	m	m	m	m	m	m	m
1,01	0,05200	1,26	0,08093	1,51	0,11623	1,76	0,15790
1,02	0,05303	1,27	0,08222	1,52	0,11777	1,77	0,15970
1,03	0,05408	1,28	0,08352	1,53	0,11933	1,78	0,16151
1,04	0,05513	1,29	0,08483	1,54	0,12089	1,79	0,16333
1,05	0,05620	1,30	0,08615	1,55	0,12247	1,80	0,16516
1,06	0,05728	1,31	0,08748	1,56	0,12405	1,81	0,16700
1,07	0,05836	1,32	0,08882	1,57	0,12565	1,82	0,16885
1,08	0,05946	1,33	0,09017	1,58	0,12725	1,83	0,17071
1,09	0,06056	1,34	0,09153	1,59	0,12887	1,84	0,17258
1,10	0,06168	1,35	0,09290	1,60	0,13050	1,85	0,17446
1,11	0,06281	1,36	0,09428	1,61	0,13213	1,86	0,17635
1,12	0,06394	1,37	0,09567	1,62	0,13378	1,87	0,17825
1,13	0,06509	1,38	0,09708	1,63	0,13543	1,88	0,18016
1,14	0,06625	1,39	0,09849	1,64	0,13710	1,89	0,18209
1,15	0,06741	1,40	0,09991	1,65	0,13878	1,90	0,18402
1,16	0,06859	1,41	0,10134	1,66	0,14047	1,91	0,18596
1,17	0,06978	1,42	0,10279	1,67	0,14216	1,92	0,18791
1,18	0,07098	1,43	0,10424	1,68	0,14387	1,93	0,18988
1,19	0,07219	1,44	0,10570	1,69	0,14559	1,94	0,19185
1,20	0,07340	1,45	0,10717	1,70	0,14732	1,95	0,19383
1,21	0,07463	1,46	0,10866	1,71	0,14905	1,96	0,19582
1,22	0,07587	1,47	0,11015	1,72	0,15080	1,97	0,19783
1,23	0,07712	1,48	0,11165	1,73	0,15256	1,98	0,19984
1,24	0,07838	1,49	0,11317	1,74	0,15433	1,99	0,20186
1,25	0,07965	1,50	0,11469	1,75	0,15611	2,00	0,20390

TABLE I. (Suite)

VITESSES.	HAUTEURS correspondantes.	VITESSES.	HAUTEURS correspondantes.	VITESSES.	HAUTEURS correspondantes.	VITESSES.	HAUTEURS correspondantes.
m	m	m	m	m	m	m	m
2,01	0,2059	2,41	0,2961	2,81	0,4025	3,21	0,5252
2,02	0,2080	2,42	0,2985	2,82	0,4054	3,22	0,5285
2,03	0,2101	2,43	0,3010	2,83	0,4083	3,23	0,5318
2,04	0,2121	2,44	0,3035	2,84	0,4111	3,24	0,5351
2,05	0,2142	2,45	0,3060	2,85	0,4140	3,25	0,5384
2,06	0,2163	2,46	0,3085	2,86	0,4170	3,26	0,5417
2,07	0,2184	2,47	0,3110	2,87	0,4199	3,27	0,5451
2,08	0,2205	2,48	0,3135	2,88	0,4228	3,28	0,5484
2,09	0,2227	2,49	0,3160	2,89	0,4257	3,29	0,5518
2,10	0,2248	2,50	0,3186	2,90	0,4287	3,30	0,5551
2,11	0,2269	2,51	0,3211	2,91	0,4317	3,31	0,5585
2,12	0,2291	2,52	0,3237	2,92	0,4346	3,32	0,5619
2,13	0,2313	2,53	0,3263	2,93	0,4376	3,33	0,5653
2,14	0,2334	2,54	0,3289	2,94	0,4406	3,34	0,5687
2,15	0,2356	2,55	0,3315	2,95	0,4436	3,35	0,5721
2,16	0,2378	2,56	0,3341	2,96	0,4466	3,36	0,5755
2,17	0,2400	2,57	0,3367	2,97	0,4496	3,37	0,5789
2,18	0,2423	2,58	0,3393	2,98	0,4527	3,38	0,5824
2,19	0,2445	2,59	0,3419	2,99	0,4557	3,39	0,5858
2,20	0,2467	2,60	0,3446	3,00	0,4588	3,40	0,5893
2,21	0,2490	2,61	0,3472	3,01	0,4618	3,41	0,5927
2,22	0,2512	2,62	0,3499	3,02	0,4649	3,42	0,5962
2,23	0,2535	2,63	0,3526	3,03	0,4680	3,43	0,5997
2,24	0,2558	2,64	0,3553	3,04	0,4711	3,44	0,6032
2,25	0,2581	2,65	0,3580	3,05	0,4742	3,45	0,6067
2,26	0,2604	2,66	0,3607	3,06	0,4773	3,46	0,6102
2,27	0,2627	2,67	0,3634	3,07	0,4804	3,47	0,6138
2,28	0,2650	2,68	0,3661	3,08	0,4836	3,48	0,6173
2,29	0,2673	2,69	0,3689	3,09	0,4867	3,49	0,6209
2,30	0,2697	2,70	0,3716	3,10	0,4899	3,50	0,6244
2,31	0,2720	2,71	0,3744	3,11	0,4930	3,51	0,6280
2,32	0,2744	2,72	0,3771	3,12	0,4962	3,52	0,6316
2,33	0,2767	2,73	0,3799	3,13	0,4994	3,53	0,6352
2,34	0,2791	2,74	0,3827	3,14	0,5026	3,54	0,6388
2,35	0,2815	2,75	0,3855	3,15	0,5058	3,55	0,6424
2,36	0,2839	2,76	0,3883	3,16	0,5090	3,56	0,6460
2,37	0,2863	2,77	0,3911	3,17	0,5122	3,57	0,6497
2,38	0,2887	2,78	0,3940	3,18	0,5155	3,58	0,6533
2,39	0,2912	2,79	0,3968	3,19	0,5187	3,59	0,6570
2,40	0,2936	2,80	0,3996	3,20	0,5220	3,60	0,6606

TABLE I. (Suite.)

VITESSES.	HAUTEURS corres-pondantes.	VITESSES.	HAUTEURS corres-pondantes.	VITESSES.	HAUTEURS corres-pondantes.	VITESSES.	HAUTEURS corres-pondantes
m	m	m	m	m	m	m	m
3,61	0,6643	4,01	0,8197	4,41	0,9914	4,81	1,1794
3,62	0,6680	4,02	0,8238	4,42	0,9959	4,82	1,1843
3,63	0,6717	4,03	0,8279	4,43	1,0004	4,83	1,1892
3,64	0,6754	4,04	0,8320	4,44	1,0049	4,84	1,1941
3,65	0,6791	4,05	0,8361	4,45	1,0094	4,85	1,1991
3,66	0,6828	4,06	0,8402	4,46	1,0140	4,86	1,2040
3,67	0,6866	4,07	0,8444	4,47	1,0185	4,87	1,2090
3,68	0,6903	4,08	0,8485	4,48	1,0231	4,88	1,2139
3,69	0,6941	4,09	0,8527	4,49	1,0277	4,89	1,2189
3,70	0,6978	4,10	0,8569	4,50	1,0322	4,90	1,2239
3,71	0,7016	4,11	0,8611	4,51	1,0368	4,91	1,2289
3,72	0,7054	4,12	0,8653	4,52	1,0414	4,92	1,2339
3,73	0,7092	4,13	0,8695	4,53	1,0460	4,93	1,2389
3,74	0,7130	4,14	0,8737	4,54	1,0507	4,94	1,2440
3,75	0,7168	4,15	0,8779	4,55	1,0553	4,95	1,2490
3,76	0,7207	4,16	0,8821	4,56	1,0599	4,96	1,2541
3,77	0,7245	4,17	0,8864	4,57	1,0646	4,97	1,2591
3,78	0,7283	4,18	0,8906	4,58	1,0693	4,98	1,2642
3,79	0,7322	4,19	0,8949	4,59	1,0739	4,99	1,2693
3,80	0,7361	4,20	0,8992	4,60	1,0786	5,00	1,2744
3,81	0,7400	4,21	0,9035	4,61	1,0833	5,01	1,2795
3,82	0,7438	4,22	0,9078	4,62	1,0880	5,02	1,2846
3,83	0,7477	4,23	0,9121	4,63	1,0927	5,03	1,2897
3,84	0,7517	4,24	0,9164	4,64	1,0975	5,04	1,2948
3,85	0,7556	4,25	9,9207	4,65	1,1022	5,05	1,3000
3,86	0,7595	4,26	0,9251	4,66	1,1069	5,06	1,3051
3,87	0,7634	4,27	0,9294	4,67	1,1117	5,07	1,3103
3,88	0,7674	4,28	0,9338	4,68	1,1165	5,08	1,3155
3,89	0,7714	4,29	0,9381	4,69	1,1212	5,09	1,3207
3,90	0,7753	4,30	0,9425	4,70	1,1260	5,10	1,3259
3,91	0,7793	4,31	0,9469	4,71	1,1308	5,11	1,3311
3,92	0,7833	4,32	0,9513	4,72	1,1356	5,12	1,3363
3,93	0,7873	4,33	0,9557	4,73	1,1405	5,13	1,3415
3,94	0,7913	4,34	0,9601	4,74	1,1453	5,14	1,3467
3,95	0,7953	4,35	0,9646	4,75	1,1501	5,15	1,3520
3,96	0,7994	4,36	0,9690	4,76	1,1550	5,16	1,3572
3,97	0,8034	4,37	0,9735	4,77	1,1598	5,17	1,3625
3,98	0,8075	4,38	0,9779	4,78	1,1647	5,18	1,3678
3,99	0,8115	4,39	0,9824	4,79	1,1696	5,19	1,3731
4,00	0,8156	4,40	0,9869	4,80	1,1745	5,20	1,3784

TABLE I. (Suite.)

VITESSES.	HAUTEURS corres-pondantes.	VITESSES.	HAUTEURS corres-pondantes.	VITESSES.	HAUTEURS corres-pondantes.	VITESSES.	HAUTEURS corres-pondantes.
m	m	m	m	m	m	m	m
5,21	1,3837	5,61	1,6043	6,01	1,8412	6,41	2,0945
5,22	1,3890	5,62	1,6100	6,02	1,8473	6,42	2,1010
5,23	1,3943	5,63	1,6157	6,03	1,8535	6,43	2,1075
5,24	1,3996	5,64	1,6215	6,04	1,8596	6,44	2,1141
5,25	1,4050	5,65	1,6272	6,05	1,8658	6,45	2,1207
5,26	1,4103	5,66	1,6330	6,06	1,8720	6,46	2,1273
5,27	1,4157	5,67	1,6388	6,07	1,8782	6,47	2,1338
5,28	1,4211	5,68	1,6446	6,08	1,8843	6,48	2,1404
5,29	1,4265	5,69	1,6504	6,09	1,8906	6,49	2,1471
5,30	1,4319	5,70	1,6562	6,10	1,8968	6,50	2,1537
5,31	1,4373	5,71	1,6620	6,11	1,9030	6,51	2,1603
5,32	1,4427	5,72	1,6678	6,12	1,9092	6,52	2,1670
5,33	1,4481	5,73	1,6736	6,13	1,9155	6,53	2,1736
5,34	1,4536	5,74	1,6795	6,14	1,9217	6,54	2,1803
5,35	1,4590	5,75	1,6853	6,15	1,9280	6,55	2,1869
5,36	1,4645	5,76	1,6912	6,16	1,9343	6,56	2,1936
5,37	1,4700	5,77	1,6971	6,17	1,9405	6,57	2,2003
5,38	1,4754	5,78	1,7030	6,18	1,9468	6,58	2,2070
5,39	1,4809	5,79	1,7089	6,19	1,9531	6,59	2,2137
5,40	1,4864	5,80	1,7148	6,20	1,9595	6,60	2,2205
5,41	1,4919	5,81	1,7207	6,21	1,9658	6,61	2,2272
5,42	1,4975	5,82	1,7266	6,22	1,9721	6,62	2,2339
5,43	1,5030	5,83	1,7326	6,23	1,9785	6,63	2,2407
5,44	1,5085	5,84	1,7385	6,24	1,9848	6,64	2,2475
5,45	1,5141	5,85	1,7445	6,25	1,9912	6,65	2,2542
5,46	1,5196	5,86	1,7504	6,26	1,9976	6,66	2,2610
5,47	1,5252	5,87	1,7564	6,27	2,0040	6,67	2,2678
5,48	1,5308	5,88	1,7624	6,28	2,0104	6,68	2,2746
5,49	1,5364	5,89	1,7684	6,29	2,0168	6,69	2,2814
5,50	1,5420	5,90	1,7744	6,30	2,0232	6,70	2,2883
5,51	1,5476	5,91	1,7804	6,31	2,0296	6,71	2,2951
5,52	1,5532	5,92	1,7865	6,32	2,0360	6,72	2,3019
5,53	1,5589	5,93	1,7925	6,33	2,0425	6,73	2,3088
5,54	1,5645	5,94	1,7986	6,34	2,0490	6,74	2,3157
5,55	1,5701	5,95	1,8046	6,35	2,0554	6,75	2,3225
5,56	1,5758	5,96	1,8107	6,36	2,0619	6,76	2,3294
5,57	1,5815	5,97	1,8168	6,37	2,0684	6,77	2,3363
5,58	1,5872	5,98	1,8229	6,38	2,0749	6,78	2,3432
5,59	1,5929	5,99	1,8290	6,39	2,0814	6,79	2,3501
5,60	1,5986	6,00	1,8351	6,40	2,0879	6,80	2,3571

TABLE I. (Suite.)

VITESSES.	HAUTEURS corres-pondantes.	VITESSES.	HAUTEURS corres-pondantes.	VITESSES.	HAUTEURS corres-pondantes.	VITESSES.	HAUTEURS corres-pondantes.
m	m	m	m	m	m	m	m
6,82	2,3710	7,62	2,9598	8,42	3,6139	9,22	4,3333
6,84	2,3849	7,64	2,9754	8,44	3,6311	9,24	4,3521
6,86	2,3988	7,66	2,9910	8,46	3,6483	9,26	4,3710
6,88	2,4129	7,68	3,0066	8,48	3,6656	9,28	4,3899
6,90	2,4269	7,70	3,0223	8,50	3,6829	9,30	4,4088
6,92	2,4410	7,72	3,0380	8,52	3,7003	9,32	4,4278
6,94	2,4551	7,74	3,0538	8,54	3,7177	9,34	4,4468
6,96	2,4693	7,76	3,0696	8,56	3,7351	9,36	4,4659
6,98	2,4835	7,78	3,0854	8,58	3,7526	9,38	4,4850
7,00	2,4978	7,80	3,1013	8,60	3,7701	9,40	4,5041
7,02	2,5121	7,82	3,1172	8,62	3,7876	9,42	4,5233
7,04	2,5264	7,84	3,1332	8,64	3,8052	9,44	4,5425
7,06	2,5408	7,86	3,1492	8,66	3,8229	9,46	4,5618
7,08	2,5552	7,88	3,1652	8,68	3,8406	9,48	4,5811
7,10	2,5696	7,90	3,1813	8,70	3,8583	9,50	4,6005
7,12	2,5841	7,92	3,1975	8,72	3,8760	9,52	4,6199
7,14	2,5987	7,94	3,2136	8,74	3,8938	9,54	4,6393
7,16	2,6132	7,96	3,2298	8,76	3,9117	9,56	4,6588
7,18	2,6279	7,98	3,2461	8,78	3,9296	9,58	4,6783
7,20	2,6425	8,00	3,2624	8,80	3,9475	9,60	4,6978
7,22	2,6572	8,02	3,2787	8,82	3,9654	9,62	4,7174
7,24	2,6720	8,04	3,2951	8,84	3,9834	9,64	4,7371
7,26	2,6868	8,06	3,3115	8,86	4,0015	9,66	4,7567
7,28	2,7016	8,08	3,3280	8,88	4,0196	9,68	4,7764
7,30	2,7164	8,10	3,3444	8,90	4,0377	9,70	4,7962
7,32	2,7313	8,12	3,3610	8,92	4,0559	9,72	4,8160
7,34	2,7463	8,14	3,3776	8,94	4,0741	9,74	4,8358
7,36	2,7613	8,16	3,3942	8,96	4,0923	9,76	4,8557
7,38	2,7763	8,18	3,4108	8,98	4,1106	9,78	4,8756
7,40	2,7914	8,20	3,4275	9,00	4,1289	9,80	4,8956
7,42	2,8065	8,22	3,4443	9,02	4,1473	9,82	4,9156
7,44	2,8216	8,24	3,4611	9,04	4,1657	9,84	4,9356
7,46	2,8368	8,26	3,4779	9,06	4,1842	9,86	4,9557
7,48	2,8521	8,28	3,4947	9,08	4,2027	9,88	4,9759
7,50	2,8673	8,30	3,5116	9,10	4,2212	9,90	4,9960
7,52	2,8826	8,32	3,5286	9,12	4,2398	9,92	5,0162
7,54	2,8980	8,34	3,5456	9,14	4,2584	9,94	5,0365
7,56	2,9134	8,36	3,5626	9,16	4,2771	9,96	5,0568
7,58	2,9288	8,38	3,5797	9,18	4,2958	9,98	5,0771
7,60	2,9443	8,40	3,5968	9,20	4,3145	10,00	5,0975

TABLE II. — **Coefficients de dépense**, d'après M. Lesbros.

(A). Orifices rectangulaires en mince paroi, de $0^m,20$ de largeur sur diverses hauteurs, débouchant librement dans l'air.

	CHARGES sur le sommet des orifices.	COEFFICIENTS DE DÉPENSE pour les hauteurs d'orifice de $0^m,20$	$0^m,10$	$0^m,05$	$0^m,03$	$0^m,02$	$0^m,01$
1. Orifices complétement isolés des parois latérales et du fond du réservoir.	m 0,02	0,572	0,596	0,616	0,639	0,660	0,695
	0,03	0,578	0,600	0,620	0,641	0,659	0,689
	0,04	0,582	0,603	0,623	0,640	0,659	0,684
	0,06	0,587	0,607	0,626	0,639	0,657	0,677
	0,10	0,592	0,611	0,630	0,637	0,655	0,667
	0,20	0,598	0,615	0,631	0,634	0,649	0,655
	0,30	0,600	0,616	0,630	0,632	0,645	0,650
	0,40	0,602	0,617	0,629	0,631	0,642	0,646
	0,60	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,641
	1,00	0,605	0,615	0,625	0,627	0,632	0,629
	1,50	0,602	0,611	0,619	0,621	0,620	0,617
	2,00	0,601	0,607	0,613	0,613	0,613	0,613
	3,00	0,601	0,603	0,606	0,607	0,608	0,609
2. Orifices avec contraction supprimée sur leur côté inférieur.	0,02	0,599	0,624	0,664	0,691	0,703	0,756
	0,03	0,603	0,629	0,665	0,687	0,702	0,747
	0,04	0,605	0,633	0,666	0,686	0,701	0,741
	0,06	0,610	0,637	0,667	0,686	0,699	0,732
	0,10	0,615	0,643	0,669	0,684	0,698	0,722
	0,20	0,621	0,648	0,670	0,681	0,696	0,712
	0,30	0,622	0,648	0,670	0,681	0,695	0,709
	0,40	0,623	0,648	0,669	0,681	0,695	0,706
	0,60	0,624	0,648	0,668	0,679	0,693	0,703
	1,00	0,624	0,647	0,666	0,676	0,692	0,701
	1,50	0,624	0,644	0,665	0,675	0,687	0,697
	2,00	0,619	0,641	0,664	0,675	0,683	0,693
	3,00	0,614	0,639	0,662	0,675	0,680	0,689

TABLE II. (Suite.)

(A). Orifices rectangulaires en mince paroi, de $0^m,20$ de largeur sur diverses hauteurs, débouchant librement dans l'air.

	CHARGES sur le sommet des orifices.	COEFFICIENTS DE DÉPENSE pour les hauteurs d'orifice de					
		$0^m,20$	$0^m,10$	$0^m,05$	$0^m,03$	$0^m,02$	$0^m,01$
3. Orifices avec contraction supprimée sur leurs deux bords verticaux.	m 0,02	"	"	0,655	"	"	0,715
	0,03	"	"	0,653	"	"	0,706
	0,04	0,649	"	0,651	"	"	0,699
	0,06	0,647	"	0,648	"	"	0,691
	0,10	0,645	"	0,645	"	"	0,683
	0,20	0,641	"	0,642	"	"	0,675
	0,30	0,639	"	0,642	"	"	0,671
	0,40	0,639	"	0,641	"	"	0,668
	0,60	0,638	"	0,639	"	"	0,665
	1,00	0,638	"	0,634	"	"	0,658
	1,50	0,637	"	0,627	"	"	0,651
	2,00	0,636	"	0,621	"	"	0,647
	3,00	0,634	"	0,614	"	"	0,644
4. Orifices avec contraction supprimée sur leur côté inférieur et leurs bords verticaux.	0,02	"	"	"	"	"	"
	0,03	"	"	"	"	"	"
	0,04	"	"	"	"	"	"
	0,06	"	"	0,699	"	"	"
	0,10	"	"	0,696	"	"	"
	0,20	0,708	"	0,693	"	"	"
	0,30	0,687	"	0,691	"	"	"
	0,40	0,682	"	0,690	"	"	"
	0,60	0,679	"	0,688	"	"	"
	1,00	0,676	"	0,685	"	"	"
	1,50	0,672	"	0,681	"	"	"
	2,00	0,668	"	0,680	"	"	"
	3,00	0,665	"	0,678	"	"	"

TABLE II. (Suite.)

(B). Orifices rectangulaires en mince paroi, de $0^m,20$ de largeur sur diverses hauteurs, prolongés en dehors par un canal rectangulaire, horizontal et découvert, de même largeur que l'orifice.

	CHARGES sur le sommet des orifices.	COEFFICIENTS DE DÉPENSE pour les hauteurs d'orifice de					
		$0^m,20$	$0^m,10$	$0^m,05$	$0^m,03$	$0^m,02$	$0^m,01$
1. Orifices complétement isolés des parois latérales et du fond du réservoir.	m 0,02	0,480	0,484	0,488	0,501	"	0,599
	0,03	0,493	0,507	0,525	0,551	"	0,626
	0,04	0,503	0,527	0,555	0,598	"	0,645
	0,06	0,518	0,557	0,594	0,632	"	0,667
	0,10	0,542	0,586	0,624	0,633	"	0,671
	0,20	0,574	0,606	0,631	0,632	"	0,664
	0,30	0,591	0,612	0,629	0,631	"	0,658
	0,40	0,597	0,615	0,626	0,630	"	0,652
	0,60	0,600	0,615	0,625	0,628	"	0,644
	1,00	0,601	0,613	0,624	0,625	"	0,631
	1,50	0,601	0,612	0,619	0,620	"	0,618
	2,00	0,601	0,607	0,613	0,613	"	0,613
	3,00	0,601	0,603	0,606	0,607	"	0,609
2. Orifices avec contraction supprimée sur leur côté inférieur.	0,02	0,480	"	0,487	"	"	0,616
	0,03	0,493	"	0,526	"	"	0,642
	0,04	0,502	"	0,552	"	"	0,660
	0,06	0,517	"	0,583	"	"	0,676
	0,10	0,538	"	0,605	"	"	0,682
	0,20	0,566	"	0,617	"	"	0,679
	0,30	0,580	"	0,622	"	"	0,676
	0,40	0,587	"	0,625	"	"	0,673
	0,60	0,595	"	0,627	"	"	0,670
	1,00	0,600	"	0,628	"	"	0,665
	1,50	0,602	"	0,627	"	"	0,657
	2,00	0,602	"	0,623	"	"	0,654
	3,00	0,601	"	0,618	"	"	0,652

TABLE II. (Suite.)

(B). **Orifices rectangulaires en mince paroi, de 0m,20 de largeur sur diverses hauteurs, prolongés en dehors par un canal rectangulaire, horizontal et découvert, de même largeur que l'orifice.**

	CHARGES sur le sommet des orifices.	COEFFICIENTS DE DÉPENSE pour les hauteurs d'orifice de					
		0m,20	0m,10	0m,05	0m,03	0m,02	0m,01
3 bis. Orifices avec bords verticaux en saillie de 0m,02 sur les parois latérales du réservoir, le côté inférieur étant isolé du fond.	m 0,02	0,496	"	0,557	"	"	0,675
	0,03	0,510	"	0,577	"	"	0,683
	0,04	0,522	"	0,592	"	"	0,688
	0,06	0,539	"	0,611	"	"	0,693
	0,10	0,563	"	0,628	"	"	0,694
	0,20	0,591	"	0,637	"	"	0,684
	0,30	0,607	"	0,636	"	"	0,677
	0,40	0,615	"	0,635	"	"	0,673
	0,60	0,625	"	0,635	"	"	0,669
	1,00	0,628	"	0,635	"	"	0,663
	1,50	0,627	"	0,634	"	"	0,656
	2,00	0,626	"	0,634	"	"	0,651
	3,00	0,624	"	0,632	"	"	0,648
4 bis. Orifices avec contraction supprimée sur leur côté inférieur, et bords verticaux en saillie de 0m,02 sur les parois latérales du réservoir.	0,02	"	"	0,512	"	"	0,625
	0,03	"	"	0,543	"	"	0,651
	0,04	0,518	"	0,566	"	"	0,667
	0,06	0,536	"	0,595	"	"	0,686
	0,10	0,560	"	0,621	"	"	0,697
	0,20	0,589	"	0,637	"	"	0,698
	0,30	0,603	"	0,643	"	"	0,696
	0,40	0,613	"	0,646	"	"	0,694
	0,60	0,623	"	0,648	"	"	0,690
	1,00	0,630	"	0,649	"	"	0,685
	1,50	0,633	"	0,647	"	"	0,679
	2,00	0,632	"	0,644	"	"	0,674
	3,00	0,630	"	0,639	"	"	0,670

TABLE II. (Suite.)

Déversoirs rectangulaires en mince paroi, de $0^m,20$ de largeur.. { débouchant librement dans l'air .... (A)
prolongés extérieurement par un canal horizontal découvert de même section que l'orifice. ..... (B) }

Les dispositions A et B peuvent présenter les variantes 1, 2, 3, 3 *bis*, 4 *bis*, définies ci-avant dans les quatre premières pages de la table II, pour les orifices rectangulaires fermés à leur partie supérieure.

CHARGES sur le seuil du déversoir	COEFFICIENTS DE DÉPENSE pour les déversoirs présentant la disposition A, avec la variante				COEFFICIENTS DE DÉPENSE pour les déversoirs présentant la disposition B, avec la variante			
	1	2	3	4 *bis*	1	2	3 *bis*	4 *bis*
m 0,01	0,424	0,384	0,492	0,292	"	"	0,395	"
0,02	0,417	0,402	0,473	0,318	0,196	0,208	0,383	0,175
0,03	0,412	0,410	0,459	0,337	0,234	0,232	0,373	0,205
0,04	0,407	0,411	0,449	0,352	0,263	0,251	0,365	0,234
0,05	0,404	0,411	0,442	0,362	0,278	0,268	0,360	0,260
0,06	0,401	0,410	0,437	0,370	0,286	0,281	0,355	0,276
0,07	0,398	0,409	0,435	0,375	0,292	0,288	0,352	0,285
0,08	0,397	0,409	0,434	0,379	0,297	0,294	0,349	0,291
0,09	0,396	0,409	0,434	0,380	0,301	0,298	0,347	0,295
0,10	0,395	0,408	0,434	0,382	0,304	0,302	0,345	0,299
0,12	0,394	0,408	0,434	0,383	0,309	0,308	0,343	0,306
0,14	0,393	0,408	0,434	0,383	0,313	0,312	0,341	0,311
0,16	0,393	0,407	0,433	0,384	0,316	0,316	0,340	0,315
0,18	0,392	0,406	0,432	0,383	0,317	0,319	0,339	0,319
0,20	0,390	0,405	0,432	0,383	0,319	0,323	0,338	0,322
0,22	0,386	0,405	0,430	0,382	0,320	0,325	0,337	0,325
0,25	0,379	0,404	0,428	0,381	0,321	0,329	0,336	0,329
0,30	0,371	0,403	0.424	0,378	0,324	0,332	0,334	0,332

TABLE III, relative au mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite.

(Voir les nos 49 et 50)

DIAMÈTRE du tuyau.	AIRE de la section.	$1000\, b_1$	$\frac{J}{Q^2}$	$\text{Log}\ \frac{J}{Q^2}$	DIFFÉRENCES de la colonne précédente.	
					Première.	Seconde.
m	mq					
0,010	0,0000785	1,801	116790000	8,06739	−0,23630	0,02130
0,011	0,0000950	1,683	67779000	7,83109	−0,21500	0,01785
0,012	0,0001131	1,585	41314000	7,61609	−0,19715	0,01518
0,013	0,0001327	1,502	26239000	7,41894	−0,18197	0,01304
0,014	0,0001539	1,431	17257000	7,23697	−0,16893	0,01134
0,015	0,0001767	1,370	11696000	7,06804	−0,15759	0,00995
0,016	0,0002011	1,316	8136800	6,91045	−0,14764	0,00880
0,017	0,0002270	1,268	5791800	6,76281	−0,13884	0,00782
0,018	0,0002545	1,206	4207000	6,62397	−0,13102	0,00701
0,019	0,0002835	1,188	3111300	6,49295	−0,12401	0,00631
0,020	0,0003142	1,154	2338500	6,36894	−0,11770	0,00571
0,021	0,0003464	1,123	1783400	6,25124	−0,11199	0,00521
0,022	0,0003801	1,090	1378000	6,13925	−0,10678	0,00474
0,023	0,0004155	1,070	1077600	6,03247	−0,10204	0,00435
0,024	0,0004524	1,046	851970	5,93043	−0,09769	0,00400
0,025	0,0004909	1,025	680350	5,83274	−0,09369	0,00369
0,026	0,0005309	1,005	548340	5,73905	−0,09000	0,00343
0,027	0,0005726	0,986	445710	5,64905	−0,08657	0,00317
0,028	0,0006158	0,969	365150	5,56248	−0,08340	0,00295
0,029	0,0006605	0,953	301350	5,47908	−0,08045	0,00276
0,030	0,0007069	0,938	250400	5,39863	−0,15280	0,00967
0,032	0,0008042	0,911	176130	5,24583	−0,14313	0,00854
0,034	0,0009079	0,888	126680	5,10270	−0,13459	0,00760
0,036	0,0010179	0,867	92919	4,96811	−0,12699	0,00679
0,038	0,0011341	0,848	69361	4,84112	−0,12020	0,00612
0,040	0,001257	0,830	52592	4,72092	−0,11408	0,00554
0,042	0,001385	0,815	40443	4,60684	−0,10854	0,00503
0,044	0,001521	0,799	31499	4,49830	−0,10351	0,00458
0,046	0,001662	0,788	24819	4,39479	−0,09893	0,00421
0,048	0,001810	0,777	19763	4,29586	−0,09472	0,00388

TABLE III. (Suite.)

DIAMÈTRE du tuyau	AIRE de la section	1000 b_1	$\frac{J}{Q^2}$	Log $\frac{J}{Q^2}$	DIFFÉRENCES de la colonne précédente. Première.	Seconde.
m	mq					
0,050	0,001963	0,766	15891	4,20114	—0,09084	0,00356
0,052	0,002124	0,756	12891	4,11030	—0,08728	0,00330
0,054	0,002290	0,747	10544	4,02302	—0,08398	0,00307
0,056	0,002463	0,738	8690	3,93904	—0,08091	0,00284
0,058	0,002642	0,730	7213	3,85813	—0,07807	0,00267
0,060	0,002827	0,723	6026	3,78006	—0,07540	0,00248
0,062	0,003019	0,716	5066	3,70466	—0,07292	0,00233
0,064	0,003217	0,709	4283	3,63174	—0,07059	0,00219
0,066	0,003421	0,703	3640	3,56115	—0,06840	0,00206
0,068	0,003632	0,697	3110	3,49275	—0,06634	0,00193
0,070	0,003848	0,692	2669	3,42641	—0,06441	0,00183
0,072	0,004072	0,687	2301	3,36200	—0,06258	0,00173
0,074	0,004301	0,682	1993	3,29942	—0,06085	0,00164
0,076	0,004536	0,677	1732	3,23857	—0,05921	0,00154
0,078	0,004778	0,673	1511	3,17936	—0,05767	0,00148
0,080	0,005027	0,669	1323	3,12169	—0,13786	0,00813
0,085	0,005675	0,657	963,4	2,98383	—0,12973	0,00725
0,090	0,006362	0,651	714,7	2,85410	—0,12248	0,00647
0,095	0,007088	0,643	539,0	2,73162	—0,11601	0,00584
0,100	0,007854	0,636	412,7	2,61561	—0,11017	0,00527
0,105	0,008659	0,630	320,2	2,50544	—0,10490	0,00481
0,110	0,009503	0,625	251,5	2,40054	—0,10009	0,00437
0,115	0,010387	0,620	199,7	2,30045	—0,09572	0,00402
0,120	0,011310	0,615	160,2	2,20473	—0,09170	0,00369
0,125	0,012272	0,611	129,7	2,11303	—0,08801	0,00341
0,130	0,01327	0,607	105,9	2,02502	—0,08460	0,00316
0,135	0,01431	0,603	87,18	1,94042	—0,08144	0,00292
0,140	0,01539	0,599	72,27	1,85898	—0,07852	0,00273
0,145	0,01651	0,596	60,32	1,78046	—0,07579	0,00250
0,150	0,01767	0,593	50,66	1,70467	"	"

TABLE III. (Suite.)

DIAMÈTRE du tuyau.	AIRE de la section.	1000 b_1	$\frac{J}{Q^2}$	Log $\frac{J}{Q^2}$	DIFFÉRENCES de la colonne précédente. Première.	Seconde.
m	mq					
0,15	0,01767	0,593	50,66	1,70467	−0,14410	0,00892
0,16	0,02011	0,588	36,36	1,56057	−0,13518	0,00790
0,17	0,02270	0,583	26,63	1,42539	−0,12728	0,00703
0,18	0,02545	0,579	19,87	1,29811	−0,12025	0,00629
0,19	0,02835	0,575	15,06	1,17786	−0,11396	0,00567
0,20	0,03142	0,572	11,59	1,06390	−0,10829	0,00512
0,21	0,03464	0,569	9,028	0,95561	−0,10317	0,00468
0,22	0,03801	0,566	7,119	0,85244	−0,09849	0,00426
0,23	0,04155	0,563	5,675	0,75395	−0,09423	0,00392
0,24	0,04524	0,561	4,568	0,65972	−0,09031	0,00359
0,25	0,04909	0,559	3,710	0,56941	−0,08672	0,00333
0,26	0,05309	0,557	3,039	0,48269	−0,08339	0,00307
0,27	0,05726	0,555	2,508	0,39930	−0,08032	0,00287
0,28	0,06158	0,553	2,084	0,31898	−0,07745	0,00266
0,29	0,06605	0,552	1,744	0,24153	−0,07479	0,00249
0,30	0,07069	0,550	1,468	0,16674	−0,07230	0,00233
0,31	0,07548	0,549	1,243	0,09444	−0,06997	0,00217
0,32	0,08042	0,547	1,058	0,02447	−0,06780	0,00206
0,33	0,08553	0,546	0,9050	$\bar{1}$,95667	−0,06574	0,00193
0,34	0,09079	0,545	0,7779	$\bar{1}$,89093	−0,06381	0,00181
0,35	0,09621	0,544	0,6716	$\bar{1}$,82712	−0,06200	0,00173
0,36	0,10179	0,543	0,5823	$\bar{1}$,76512	−0,06027	0,00162
0,37	0,10752	0,542	0,5068	$\bar{1}$,70485	−0,05865	0,00154
0,38	0,11341	0,541	0,4428	$\bar{1}$,64620	−0,05711	0,00147
0,39	0,11946	0,540	0,3882	$\bar{1}$,58909	−0,05564	0,00139
0,40	0,1257	0,539	0,3415	$\bar{1}$,53345	−0,05425	0,00131
0,41	0,1320	0,539	0,3014	$\bar{1}$,47920	−0,05294	0,00127
0,42	0,1385	0,538	0,2668	$\bar{1}$,42626	−0,05167	0,00119
0,43	0,1452	0,537	0,2369	$\bar{1}$,37459	−0,05048	0,00116
0,44	0,1521	0,536	0,2109	$\bar{1}$,32411	−0,04932	0,00108

TABLE III (Suite.)

DIAMÈTRE du tuyau.	AIRE de la section.	1000 b_1	$\frac{J}{Q^2}$	Log $\frac{J}{Q^2}$	DIFFÉRENCES de la colonne précédente. Première.	Seconde.
m	mq					
0,45	0,1590	0,536	0,1883	$\bar{1}$,27479	—0,04824	0,00105
0,46	0,1662	0,535	0,1685	$\bar{1}$,22655	—0,04719	0,00101
0,47	0,1735	0,535	0,1511	$\bar{1}$,17936	—0,04618	0,00096
0,48	0,1810	0,534	0,1359	$\bar{1}$,13318	—0,04522	0,00092
0,49	0,1886	0,533	0,1225	$\bar{1}$,08796	—0,04430	0,00088
0,50	0,1963	0,533	0,1106	$\bar{1}$,04366	—0,04342	0,00086
0,51	0,2043	0,532	0,1001	$\bar{1}$,00024	—0,04256	″
0,52	0,2124	0,532	0,09072	$\bar{2}$,95768	—0,04174	″
0,53	0,2206	0,531	0,08240	$\bar{2}$,91594	—0,04097	″
0,54	0,2290	0,531	0,07498	$\bar{2}$,87497	—0,04020	″
0,55	0,2376	0,531	0,06836	$\bar{2}$,83477	—0,03946	″
0,56	0,2463	0,530	0,06242	$\bar{2}$,79531	—0,03877	″
0,57	0,2552	0,530	0,05709	$\bar{2}$,75654	—0,03809	″
0,58	0,2642	0,529	0,05229	$\bar{2}$,71845	—0,03743	″
0,59	0,2734	0,529	0,04798	$\bar{2}$,68102	—0,03680	″
0,60	0,2827	0,529	0,04408	$\bar{2}$,64422	—0,03618	″
0,61	0,2922	0,528	0,04055	$\bar{2}$,60804	—0,03559	″
0,62	0,3019	0,528	0,03736	$\bar{2}$,57245	—0,03502	″
0,63	0,3117	0,528	0,03447	$\bar{2}$,53743	—0,03446	″
0,64	0,3217	0,527	0,03184	$\bar{2}$,50297	—0,03392	″
0,65	0,3318	0,527	0,02945	$\bar{2}$,46905	—0,03340	″
0,66	0,3421	0,527	0,02727	$\bar{2}$,43565	—0,03290	″
0,67	0,3526	0,526	0,02528	$\bar{2}$,40275	—0,03241	″
0,68	0,3632	0,526	0,02346	$\bar{2}$,37034	—0,03192	″
0,69	0,3739	0,526	0,02180	$\bar{2}$,33842	—0,03147	″
0,70	0,3848	0,525	0,02027	$\bar{2}$,30695	—0,03101	″
0,71	0,3959	0,525	0,01888	$\bar{2}$,27594	—0,03059	″
0,72	0,4072	0,525	0,01759	$\bar{2}$,24535	—0,03015	″
0,73	0,4185	0,525	0,01641	$\bar{2}$,21520	—0,02974	″
0,74	0,4301	0,524	0,01533	$\bar{2}$,18546	—0,02935	″

TABLE III. (Suite.)

DIAMÈTRE du tuyau.	AIRE de la section.	1000 b_1	$\frac{J}{Q^2}$	Log $\frac{J}{Q^2}$	DIFFÉRENCES de la colonne précédente. Première.	Seconde.
m	mq					
0,75	0,4418	0,524	0,01433	$\bar{2}$,15611	—0,02895	"
0,76	0,4536	0,524	0,01340	$\bar{2}$,12716	—0,02856	"
0,77	0,4657	0,524	0,01255	$\bar{2}$,09860	—0,02820	"
0,78	0,4778	0,524	0,01176	$\bar{2}$,07040	—0,02784	"
0,79	0,4902	0,523	0,01103	$\bar{2}$,04256	—0,02748	"
0,80	0,5027	0,523	0,01035	$\bar{2}$,01508	—0,02714	"
0,81	0,5153	0,523	0,009726	$\bar{3}$,98794	—0,02681	"
0,82	0,5281	0,523	0,009144	$\bar{3}$,96113	—0,02648	"
0,83	0,5411	0,523	0,008603	$\bar{3}$,93465	—0,02616	"
0,84	0,5542	0,522	0,008100	$\bar{3}$,90849	—0,02585	"
0,85	0,5675	0,522	0,007632	$\bar{3}$,88264	—0,02554	"
0,86	0,5809	0,522	0,007196	$\bar{3}$,85710	—0,02525	"
0,87	0,5945	0,522	0,006790	$\bar{3}$,83185	—0,02496	"
0,88	0,6082	0,522	0,006410	$\bar{3}$,80689	—0,02467	"
0,89	0,6221	0,522	0,006056	$\bar{3}$,78222	—0,02440	"
0,90	0,6362	0,521	0,005726	$\bar{3}$,75782	—0,02412	"
0,91	0,6504	0,521	0,005416	$\bar{3}$,73370	—0,02387	"
0,92	0,6648	0,521	0,005127	$\bar{3}$,70983	—0,02360	"
0,93	0,6793	0,521	0,004855	$\bar{3}$,68623	—0,02335	"
0,94	0,6940	0,521	0,004601	$\bar{3}$,66288	—0,02309	"
0,95	0,7088	0,521	0,004363	3,63979	—0,02286	"
0,96	0,7238	0,520	0,004139	$\bar{3}$,61693	—0,02262	"
0,97	0,7390	0,520	0,003929	$\bar{3}$,59431	—0,02239	"
0,98	0,7543	0,520	0,003732	$\bar{3}$,57192	—0,02215	"
0,99	0,7698	0,520	0,003546	$\bar{3}$,54977	—0,02194	"
1,00	0,7854	0,520	0,003372	$\bar{3}$,52783	—0,10646	0,00498
1,05	0,8659	0,519	0,002639	$\bar{3}$,42137	—0,10148	0,00452
1,10	0,9503	0,519	0,002089	$\bar{3}$,31989	—0,09696	0,00415
1,15	1,0387	0,518	0,001671	$\bar{3}$,22293	—0,09281	"
1,20	1,1310	0,518	0,001349	$\bar{3}$,13012	"	"

TABLE IV. — Valeurs de la fonction $\psi(x)$.

(Voir le nº 80.)

PREMIÈRE PARTIE, comprenant les valeurs de x entre 0 et 1.

x	$\psi(x)$	DIFFÉR.	x	$\psi(x)$	DIFFÉR.	x	$\psi(x)$	DIFFÉR.
0,00	−0,6046	0,0100	0,30	−0,3025	0,0102	0,60	0,0325	0,0129
0,01	−0,5946	0,0100	0,31	−0,2923	0,0104	0,61	0,0454	0,0130
0,02	−0,5846	0,0100	0,32	−0,2819	0,0103	0,62	0,0584	0,0132
0,03	−0,5746	0,0100	0,33	−0,2716	0,0104	0,63	0,0716	0,0135
0,04	−0,5646	0,0100	0,34	−0,2612	0,0104	0,64	0,0851	0,0136
0,05	−0,5546	0,0100	0,35	−0,2508	0,0105	0,65	0,0987	0,0140
0,06	−0,5446	0,0100	0,36	−0,2403	0,0105	0,66	0,1127	0,0141
0,07	−0,5346	0,0100	0,37	−0,2298	0,0106	0,67	0,1268	0,0145
0,08	−0,5246	0,0100	0,38	−0,2192	0,0106	0,68	0,1413	0,0147
0,09	−0,5146	0,0100	0,39	−0,2086	0,0106	0,69	0,1560	0,0151
0,10	−0,5046	0,0100	0,40	−0,1980	0,0108	0,700	0,1711	0,0076
0,11	−0,4946	0,0101	0,41	−0,1872	0,0107	0,705	0,1787	0,0077
0,12	−0,4845	0,0100	0,42	−0,1765	0,0109	0,710	0,1864	0,0079
0,13	−0,4745	0,0100	0,43	−0,1656	0,0109	0,715	0,1943	0,0079
0,14	−0,4645	0,0100	0,44	−0,1547	0,0109	0,720	0,2022	0,0080
0,15	−0,4545	0,0101	0,45	−0,1438	0,0111	0,725	0,2102	0,0082
0,16	−0,4444	0,0100	0,46	−0,1327	0,0111	0,730	0,2184	0,0082
0,17	−0,4344	0,0101	0,47	−0,1216	0,0112	0,735	0,2266	0,0084
0,18	−0,4243	0,0100	0,48	−0,1104	0,0113	0,740	0,2350	0,0084
0,19	−0,4143	0,0101	0,49	−0,0991	0,0113	0,745	0,2434	0,0086
0,20	−0,4042	0,0101	0,50	−0,0878	0,0115	0,750	0,2520	0,0087
0,21	−0,3941	0,0101	0,51	−0,0763	0,0116	0,755	0,2607	0,0089
0,22	−0,3840	0,0101	0,52	−0,0647	0,0117	0,760	0,2696	0,0089
0,23	−0,3739	0,0101	0,53	−0,0530	0,0118	0,765	0,2785	0,0092
0,24	−0,3638	0,0102	0,54	−0,0412	0,0119	0,770	0,2877	0,0093
0,25	−0,3536	0,0102	0,55	−0,0293	0,0121	0,775	0,2970	0,0094
0,26	−0,3434	0,0101	0,56	−0,0172	0,0122	0,780	0,3064	0,0096
0,27	−0,3333	0,0103	0,57	−0,0050	0,0124	0,785	0,3160	0,0098
0,28	−0,3230	0,0102	0,58	+0,0074	0,0125	0,790	0,3258	0,0099
0,29	−0,3128	0,0103	0,59	+0,0199	0,0126	0,795	0,3357	0,0102

TABLE IV. (Suite.)

Première Partie.

x	$\psi(x)$	DIFFÉR.	x	$\psi(x)$	DIFFÉR.	x	$\psi(x)$	DIFFÉR.
0,800	0,3459	0,0103	0,920	0,6953	0,0092	0,975	1,1020	0,0140
0,805	0,3562	0,0106	0,922	0,7045	0,0093	0,976	1,1160	0,0145
0,810	0,3668	0,0108	0,924	0,7138	0,0096	0,977	1,1305	0,0152
0,815	0,3776	0,0110	0,926	0,7234	0,0098	0,978	1,1457	0,0158
0,820	0,3886	0,0112	0,928	0,7332	0,0101	0,979	1,1615	0,0166
0,825	0,3998	0,0116	0,930	0,7433	0,0104	0,980	1,1781	0,0174
0,830	0,4114	0,0118	0,932	0,7537	0,0106	0,981	1,1955	0,0184
0,835	0,4232	0,0121	0,934	0,7643	0,0110	0,982	1,2139	0,0194
0,840	0,4353	0,0125	0,936	0,7753	0,0113	0,983	1,2333	0,0205
0,845	0,4478	0,0127	0,938	0,7866	0,0116	0,984	1,2538	0,0219
0,850	0,4605	0,0132	0,940	0,7982	0,0120	0,985	1,2757	0,0233
0,855	0,4737	0,0135	0,942	0,8102	0,0124	0,986	1,2990	0,0251
0,860	0,4872	0,0140	0,944	0,8226	0,0128	0,987	1,3241	0,0270
0,865	0,5012	0,0144	0,946	0,8354	0,0133	0,988	1,3511	0,0293
0,870	0,5156	0,0149	0,948	0,8487	0,0137	0,989	1,3804	0,0321
0,875	0,5305	0,0154	0,950	0,8624	0,0143	0,990	1,4125	0,0355
0,880	0,5459	0,0160	0,952	0,8767	0,0149	0,991	1,4480	0,0396
0,885	0,5619	0,0166	0,954	0,8916	0,0155	0,992	1,4876	0,0448
0,890	0,5785	0,0173	0,956	0,9071	0,0162	0,993	1,5324	0,0517
0,895	0,5958	0,0180	0,958	0,9233	0,0169	0,994	1,5841	0,0611
0,900	0,6138	0,0075	0,960	0,9402	0,0178	0,995	1,6452	0,0748
0,902	0,6213	0,0076	0,962	0,9580	0,0187	0,996	1,7200	0,0962
0,904	0,6289	0,0077	0,964	0,9767	0,0198	0,997	1,8162	0,1355
0,906	0,6366	0,0079	0,966	0,9965	0,0209	0,998	1,9517	0,2314
0,908	0,6445	0,0080	0,968	1,0174	0,0222	0,999	2,1831	∞
0,910	0,6525	0,0082	0,970	1,0396	0,0116	1,000	∞	
0,912	0,6607	0,0084	0,971	1,0512	0,0120			
0,914	0,6691	0,0085	0,972	1,0632	0,0125			
0,916	0,6776	0,0088	0,973	1,0757	0,0129			
0,918	0,6864	0,0089	0,974	1,0886	0,0134			

TABLE IV. (Suite.)

DEUXIÈME PARTIE, comprenant les valeurs de x entre 1 et ∞.

$\frac{1}{x}$	x	$\psi(x)$	DIFFÉR.	$\frac{1}{x}$	x	$\psi(x)$	DIFFÉR.
1,000	1,0000	∞	$-\infty$	0,970	1,0309	1,0497	−0,0215
0,999	1,0010	2,1834	−0,2311	0,968	1,0331	1,0282	−0,0202
0,998	1,0020	1,9523	−0,1351	0,966	1,0352	1,0080	−0,0190
0,997	1,0030	1,8172	−0,0959	0,964	1,0373	0,9890	−0,0181
0,996	1,0040	1,7213	−0,0744	0,962	1,0395	0,9709	−0,0170
0,995	1,0050	1,6469	−0,0608	0,960	1,0417	0,9539	−0,0163
0,994	1,0060	1,5861	−0,0513	0,958	1,0438	0,9376	−0,0155
0,993	1,0070	1,5348	−0,0446	0,956	1,0460	0,9221	−0,0148
0,992	1,0081	1,4902	−0,0392	0,954	1,0482	0,9073	−0,0142
0,991	1,0091	1,4510	−0,0351	0,952	1,0504	0,8931	−0,0136
0,990	1,0101	1,4159	−0,0318	0,950	1,0526	0,8795	−0,0130
0,989	1,0111	1,3841	−0,0290	0,948	1,0549	0,8665	−0,0126
0,988	1,0121	1,3551	−0,0267	0,946	1,0571	0,8539	−0,0121
0,987	1,0132	1,3284	−0,0247	0,944	1,0593	0,8418	−0,0117
0,986	1,0142	1,3037	−0,0230	0,942	1,0616	0,8301	−0,0113
0,985	1,0152	1,2807	−0,0215	0,940	1,0638	0,8188	−0,0109
0,984	1,0163	1,2592	−0,0202	0,938	1,0661	0,8079	−0,0106
0,983	1,0173	1,2390	−0,0191	0,936	1,0684	0,7973	−0,0102
0,982	1,0183	1,2199	−0,0180	0,934	1,0707	0,7871	−0,0099
0,981	1,0194	1,2019	−0,0171	0,932	1,0730	0,7772	−0,0097
0,980	1,0204	1,1848	−0,0162	0,930	1,0753	0,7675	−0,0094
0,979	1,0215	1,1686	−0,0155	0,928	1,0776	0,7581	−0,0091
0,978	1,0225	1,1531	−0,0148	0,926	1,0799	0,7490	−0,0089
0,977	1,0235	1,1383	−0,0142	0,924	1,0823	0,7401	−0,0086
0,976	1,0246	1,1241	−0,0136	0,922	1,0846	0,7315	−0,0084
0,975	1,0256	1,1105	−0,0131	0,920	1,0870	0,7231	−0,0082
0,974	1,0267	1,0974	−0,0126	0,918	1,0893	0,7149	−0,0080
0,973	1,0277	1,0848	−0,0121	0,916	1,0917	0,7069	−0,0079
0,972	1,0288	1,0727	−0,0117	0,914	1,0941	0,6990	−0,0076
0,971	1,0299	1,0610	−0,0113	0,912	1,0965	0,6914	−0,0075

TABLE IV. (Suite.)

DEUXIÈME PARTIE.

$\frac{1}{x}$	x	$\psi(x)$	DIFFÉR.	$\frac{1}{x}$	x	$\psi(x)$	DIFFÉR.
0,910	1,0989	0,6839	—0,0073	0,775	1,2903	0,3813	—0,0072
0,908	1,1013	0,6766	—0,0071	0,770	1,2987	0,3741	—0,0070
0,906	1,1038	0,6695	—0,0070	0,765	1,3072	0,3671	—0,0068
0,904	1,1062	0,6625	—0,0069	0,760	1,3158	0,3603	—0,0067
0,902	1,1086	0,6556	—0,0067	0,755	1,3245	0,3536	—0,0066
0,900	1,1111	0,6489	—0,0162	0,750	1,3333	0,3470	—0,0064
0,895	1,1173	0,6327	—0,0154	0,745	1,3423	0,3406	—0,0063
0,890	1,1236	0,6173	—0,0148	0,740	1,3514	0,3343	—0,0061
0,885	1,1299	0,6025	—0,0141	0,735	1,3605	0,3282	—0,0061
0,880	1,1364	0,5884	—0,0135	0,730	1,3699	0,3221	—0,0059
0,875	1,1429	0,5749	—0,0130	0,725	1,3793	0,3162	—0,0058
0,870	1,1494	0,5619	—0,0125	0,720	1,3889	0,3104	—0,0057
0,865	1,1561	0,5494	—0,0120	0,715	1,3986	0,3047	—0,0056
0,860	1,1628	0,5374	—0,0116	0,710	1,4085	0,2991	—0,0054
0,855	1,1696	0,5258	—0,0112	0,705	1,4184	0,2937	—0,0054
0,850	1,1765	0,5146	—0,0109	0,70	1,4286	0,2883	—0,0105
0,845	1,1834	0,5037	—0,0105	0,69	1,4493	0,2778	—0,0101
0,840	1,1905	0,4932	—0,0101	0,68	1,4706	0,2677	—0,0097
0,835	1,1976	0,4831	—0,0098	0,67	1,4925	0,2580	—0,0094
0,830	1,2048	0,4733	—0,0096	0,66	1,5152	0,2486	—0,0091
0,825	1,2121	0,4637	—0,0093	0,65	1,5385	0,2395	—0,0089
0,820	1,2195	0,4544	—0,0090	0,64	1,5625	0,2306	—0,0085
0,815	1,2270	0,4454	—0,0087	0,63	1,5873	0,2221	—0,0083
0,810	1,2346	0,4367	—0,0086	0,62	1,6129	0,2138	—0,0080
0,805	1,2422	0,4281	—0,0083	0,61	1,6393	0,2058	—0,0078
0,800	1,2500	0,4198	—0,0081	0,60	1,6667	0,1980	—0,0075
0,795	1,2579	0,4117	—0,0078	0,59	1,6949	0,1905	—0,0073
0,790	1,2658	0,4039	—0,0077	0,58	1,7241	0,1832	—0,0071
0,785	1,2739	0,3962	—0,0076	0,57	1,7544	0,1761	—0,0069
0,780	1,2821	0,3886	—0,0073	0,56	1,7857	0,1692	—0,0067

TABLE IV (Suite)

Deuxième Partie.

$\frac{1}{x}$	x	$\psi(x)$	DIFFÉR.	$\frac{1}{x}$	x	$\psi(x)$	DIFFÉR.
0,55	1,8182	0,1625	−0,0065	0,25	4,0000	0,0314	−0,0024
0,54	1,8519	0,1560	−0,0063	0,24	4,1667	0,0290	−0,0024
0,53	1,8868	0,1497	−0,0062	0,23	4,3478	0,0266	−0,0023
0,52	1,9231	0,1435	−0,0059	0,22	4,5455	0,0243	−0,0022
0,51	1,9608	0,1376	−0,0058	0,21	4,7619	0,0221	−0,0020
0,50	2,0000	0,1318	−0,0056	0,20	5,0000	0,0201	−0,0020
0,49	2,0408	0,1262	−0,0055	0,19	5,2632	0,0181	−0,0019
0,48	2,0833	0,1207	−0,0053	0,18	5,5556	0,0162	−0,0017
0,47	2,1277	0,1154	−0,0052	0,17	5,8824	0,0145	−0,0017
0,46	2,1739	0,1102	−0,0050	0,16	6,2500	0,0128	−0,0015
0,45	2,2222	0,1052	−0,0049	0,15	6,6667	0,0113	−0,0015
0,44	2,2727	0,1003	−0,0048	0,14	7,1429	0,0098	−0,0013
0,43	2,3256	0,0955	−0,0046	0,13	7,6923	0,0085	−0,0013
0,42	2,3810	0,0909	−0,0044	0,12	8,3333	0,0072	−0,0011
0,41	2,4390	0,0865	−0,0044	0,11	9,0909	0,0061	−0,0011
0,40	2,5000	0,0821	−0,0042	0,10	10,0000	0,0050	−0,0009
0,39	2,5641	0,0779	−0,0041	0,09	11,1111	0,0041	−0,0009
0,38	2,6316	0,0738	−0,0039	0,08	12,5000	0,0032	−0,0007
0,37	2,7027	0,0699	−0,0039	0,07	14,2857	0,0025	−0,0007
0,36	2,7778	0,0660	−0,0037	0,06	16,6667	0,0018	−0,0005
0,35	2,8571	0,0623	−0,0036	0,05	20,0000	0,0013	−0,0005
0,34	2,9412	0,0587	−0,0034	0,04	25,0000	0,0008	−0,0003
0,33	3,0303	0,0553	−0,0034	0,03	33,3333	0,0005	−0,0003
0,32	3,1250	0,0519	−0,0033	0,02	50,0000	0,0002	−0,0001
0,31	3,2258	0,0486	−0,0031	0,01	100,0000	0,0001	−0,0001
0,30	3,3333	0,0455	−0,0030	0,00	∞	0,0000	"
0,29	3,4483	0,0425	−0,0030				
0,28	3,5714	0,0395	−0,0028				
0,27	3,7037	0,0367	−0,0027				
0,26	3,8462	0,0340	−0,0026				

TABLE V. — Carrés et cubes des nombres de trois chiffres

Cette table peut donner les premières figures du carré ou du cube d'un nombre quelconque; il suffira de diviser ce nombre par 10^n, n étant un nombre entier tel, que le quotient soit compris dans la table : en regard on trouvera le carré ou le cube, qu'on aura soin de multiplier par 10^{2n} ou 10^{3n}.

La même table peut servir aux extractions de racines carrées ou cubiques. Pour trouver la racine carrée d'un nombre, on commencera par séparer à la droite de ce nombre assez de groupes de deux chiffres pour que le résultat soit compris entre 1 00 00 et 100 00 00 ; ou bien, si le nombre est une fraction décimale, on parviendra au même but en le multipliant par 100, 100 00, etc. Cela fait, on cherchera le nombre ainsi modifié dans la colonne des carrés, et en regard on trouvera la racine, qu'on devra, du reste, multiplier ou diviser par 10, 100, etc., suivant la nature de l'opération préliminaire qu'on vient d'expliquer.

On voit aisément, par analogie, ce qu'il y aurait à faire pour extraire une racine cubique.

Enfin on pourra aussi former les puissances $\frac{3}{2}$ et $\frac{2}{3}$, opération qui se composera d'une élévation au cube ou au carré, et d'une extraction de racine carrée ou cubique.

Il est à peine besoin de dire que, dans tous ces calculs, les résultats pourront être rendus plus approchés au moyen d'interpolations.

NOMBRES.	CARRÉS.	CUBES.	NOMBRES.	CARRÉS.	CUBES.	NOMBRES.	CARRÉS.	CUBES.
1 00	1 00 00	1 000 000	1 20	1 44 00	1 728 000	1 40	1 96 00	2 744 000
1 01	1 02 01	1 030 301	1 21	1 46 41	1 771 561	1 41	1 98 81	2 803 221
1 02	1 04 04	1 061 208	1 22	1 48 84	1 815 848	1 42	2 01 64	2 863 288
1 03	1 06 09	1 092 727	1 23	1 51 29	1 860 867	1 43	2 04 49	2 924 207
1 04	1 08 16	1 124 864	1 24	1 53 76	1 906 624	1 44	2 07 36	2 985 984
1 05	1 10 25	1 157 625	1 25	1 56 25	1 953 125	1 45	2 10 25	3 048 625
1 06	1 12 36	1 191 016	1 26	1 58 76	2 000 376	1 46	2 13 16	3 112 136
1 07	1 14 49	1 225 043	1 27	1 61 29	2 048 383	1 47	2 16 09	3 176 523
1 08	1 16 64	1 259 712	1 28	1 63 84	2 097 152	1 48	2 19 04	3 241 792
1 09	1 18 81	1 295 029	1 29	1 66 41	2 146 689	1 49	2 22 01	3 307 949
1 10	1 21 00	1 331 000	1 30	1 69 00	2 197 000	1 50	2 25 00	3 375 000
1 11	1 23 21	1 367 631	1 31	1 71 61	2 248 091	1 51	2 28 01	3 442 951
1 12	1 25 44	1 404 928	1 32	1 74 24	2 299 968	1 52	2 31 04	3 511 808
1 13	1 27 69	1 442 897	1 33	1 76 89	2 352 637	1 53	2 34 09	3 581 577
1 14	1 29 96	1 481 544	1 34	1 79 56	2 406 104	1 54	2 37 16	3 652 264
1 15	1 32 25	1 520 875	1 35	1 82 25	2 460 375	1 55	2 40 25	3 723 875
1 16	1 34 56	1 560 896	1 36	1 84 96	2 515 456	1 56	2 43 36	3 796 416
1 17	1 36 89	1 601 613	1 37	1 87 69	2 571 353	1 57	2 46 49	3 869 893
1 18	1 39 24	1 643 032	1 38	1 90 44	2 628 072	1 58	2 49 64	3 944 312
1 19	1 41 61	1 685 159	1 39	1 93 21	2 685 619	1 59	2 52 81	4 019 679

TABLE V. (Suite.)

NOMBRES.	CARRÉS.	CUBES.	NOMBRES.	CARRÉS.	CUBES.	NOMBRES.	CARRÉS.	CUBES.
1 60	2 56 00	4 096 000	2 05	4 20 25	8 615 125	2 50	6 25 00	15 625 000
1 61	2 59 21	4 173 281	2 06	4 24 36	8 741 816	2 51	6 30 01	15 813 251
1 62	2 62 44	4 251 528	2 07	4 28 49	8 869 743	2 52	6 35 04	16 003 008
1 63	2 65 69	4 330 747	2 08	4 32 64	8 998 912	2 53	6 40 09	16 194 277
1 64	2 68 96	4 410 944	2 09	4 36 81	9 129 329	2 54	6 45 16	16 387 064
1 65	2 72 25	4 492 125	2 10	4 41 00	9 261 000	2 55	6 50 25	16 581 375
1 66	2 75 56	4 574 296	2 11	4 45 21	9 393 931	2 56	6 55 36	16 777 216
1 67	2 78 89	4 657 463	2 12	4 49 44	9 528 128	2 57	6 60 49	16 974 593
1 68	2 82 24	4 741 632	2 13	4 53 69	9 663 597	2 58	6 65 64	17 173 512
1 69	2 85 61	4 826 809	2 14	4 57 96	9 800 344	2 59	6 70 81	17 373 979
1 70	2 89 00	4 913 000	2 15	4 62 25	9 938 375	2 60	6 76 00	17 576 000
1 71	2 92 41	5 000 211	2 16	4 66 56	10 077 696	2 61	6 81 21	17 779 581
1 72	2 95 84	5 088 448	2 17	4 70 89	10 218 313	2 62	6 86 44	17 984 728
1 73	2 99 29	5 177 717	2 18	4 75 24	10 360 232	2 63	6 91 69	18 191 447
1 74	3 02 76	5 268 024	2 19	4 79 61	10 503 459	2 64	6 96 96	18 399 744
1 75	3 06 25	5 359 375	2 20	4 84 00	10 648 000	2 65	7 02 25	18 609 625
1 76	3 09 76	5 451 776	2 21	4 88 41	10 793 861	2 66	7 07 56	18 821 096
1 77	3 13 29	5 545 233	2 22	4 92 84	10 941 048	2 67	7 12 89	19 034 163
1 78	3 16 84	5 639 752	2 23	4 97 29	11 089 567	2 68	7 18 24	19 248 832
1 79	3 20 41	5 735 339	2 24	5 01 76	11 239 424	2 69	7 23 61	19 465 109
1 80	3 24 00	5 832 000	2 25	5 06 25	11 390 625	2 70	7 29 00	19 683 000
1 81	3 27 61	5 929 741	2 26	5 10 76	11 543 176	2 71	7 34 41	19 902 511
1 82	3 31 24	6 028 568	2 27	5 15 29	11 697 083	2 72	7 39 84	20 123 648
1 83	3 34 89	6 128 487	2 28	5 19 84	11 852 352	2 73	7 45 29	20 346 417
1 84	3 38 56	6 229 504	2 29	5 24 41	12 008 989	2 74	7 50 76	20 570 824
1 85	3 42 25	6 331 625	2 30	5 29 00	12 167 000	2 75	7 56 25	20 796 875
1 86	3 45 96	6 434 856	2 31	5 33 61	12 326 391	2 76	7 61 76	21 024 576
1 87	3 49 69	6 539 203	2 32	5 38 24	12 487 168	2 77	7 67 29	21 253 933
1 88	3 53 44	6 644 672	2 33	5 42 89	12 649 337	2 78	7 72 84	21 484 952
1 89	3 57 21	6 751 269	2 34	5 47 56	12 812 904	2 79	7 78 41	21 717 639
1 90	3 61 00	6 859 000	2 35	5 52 25	12 977 875	2 80	7 84 00	21 952 000
1 91	3 64 81	6 967 871	2 36	5 56 96	13 144 256	2 81	7 89 61	22 188 041
1 92	3 68 64	7 077 888	2 37	5 61 69	13 312 053	2 82	7 95 24	22 425 768
1 93	3 72 49	7 189 057	2 38	5 66 44	13 481 272	2 83	8 00 89	22 665 187
1 94	3 76 36	7 301 384	2 39	5 71 21	13 651 919	2 84	8 06 56	22 906 304
1 95	3 80 25	7 414 875	2 40	5 76 00	13 824 000	2 85	8 12 25	23 149 125
1 96	3 84 16	7 529 536	2 41	5 80 81	13 997 521	2 86	8 17 96	23 393 656
1 97	3 88 09	7 645 373	2 42	5 85 64	14 172 488	2 87	8 23 69	23 639 903
1 98	3 92 04	7 762 392	2 43	5 90 49	14 348 907	2 88	8 29 44	23 887 872
1 99	3 96 01	7 880 599	2 44	5 95 36	14 526 784	2 89	8 35 21	24 137 569
2 00	4 00 00	8 000 000	2 45	6 00 25	14 706 125	2 90	8 41 00	24 389 000
2 01	4 04 01	8 120 601	2 46	6 05 16	14 886 936	2 91	8 46 81	24 642 171
2 02	4 08 04	8 242 408	2 47	6 10 09	15 069 223	2 92	8 52 64	24 897 088
2 03	4 12 09	8 365 427	2 48	6 15 04	15 252 992	2 93	8 58 49	25 153 757
2 04	4 16 16	8 489 664	2 49	6 20 01	15 438 249	2 94	8 64 36	25 412 184

TABLE V. (Suite.)

NOMBRES.	CARRÉS.	CUBES.	NOMBRES.	CARRÉS.	CUBES.	NOMBRES.	CARRÉS.	CUBES.
2 95	8 70 25	25 672 375	3 40	11 56 00	39 304 000	3 85	14 82 25	57 066 625
2 96	8 76 16	25 934 336	3 41	11 62 81	39 651 821	3 86	14 89 96	57 512 456
2 97	8 82 09	26 198 073	3 42	11 69 64	40 001 688	3 87	14 97 69	57 960 603
2 98	8 88 04	26 463 592	3 43	11 76 49	40 353 607	3 88	15 05 44	58 411 072
2 99	8 94 01	26 730 899	3 44	11 83 36	40 707 584	3 89	15 13 21	58 863 869
3 00	9 00 00	27 000 000	3 45	11 90 25	41 063 625	3 90	15 21 00	59 319 000
3 01	9 06 01	27 270 901	3 46	11 97 16	41 421 736	3 91	15 28 81	59 776 471
3 02	9 12 04	27 543 608	3 47	12 04 09	41 781 923	3 92	15 36 64	60 236 288
3 03	9 18 09	27 818 127	3 48	12 11 04	42 144 192	3 93	15 44 49	60 698 457
3 04	9 24 16	28 094 464	3 49	12 18 01	42 508 549	3 94	15 52 36	61 162 984
3 05	9 30 25	28 372 625	3 50	12 25 00	42 875 000	3 95	15 60 25	61 629 875
3 06	9 36 36	28 652 616	3 51	12 32 01	43 243 551	3 96	15 68 16	62 099 136
3 07	9 42 49	28 934 443	3 52	12 39 04	43 614 208	3 97	15 76 09	62 570 773
3 08	9 48 64	29 218 112	3 53	12 46 09	43 986 977	3 98	15 84 04	63 044 792
3 09	9 54 81	29 503 629	3 54	12 53 16	44 361 864	3 99	15 92 01	63 521 199
3 10	9 61 00	29 791 000	3 55	12 60 25	44 738 875	4 00	16 00 00	64 000 000
3 11	9 67 21	30 080 231	3 56	12 67 36	45 118 016	4 01	16 08 01	64 481 201
3 12	9 73 44	30 371 328	3 57	12 74 49	45 499 293	4 02	16 16 04	64 964 808
3 13	9 79 69	30 664 297	3 58	12 81 64	45 882 712	4 03	16 24 09	65 450 827
3 14	9 85 96	30 959 144	3 59	12 88 81	46 268 279	4 04	16 32 16	65 939 264
3 15	9 92 25	31 255 875	3 60	12 96 00	46 656 000	4 05	16 40 25	66 430 125
3 16	9 98 56	31 554 496	3 61	13 03 21	47 045 881	4 06	16 48 36	66 923 416
3 17	10 04 89	31 855 013	3 62	13 10 44	47 437 928	4 07	16 56 49	67 419 143
3 18	10 11 24	32 157 432	3 63	13 17 69	47 832 147	4 08	16 64 64	67 917 312
3 19	10 17 61	32 461 759	3 64	13 24 96	48 228 544	4 09	16 72 81	68 417 929
3 20	10 24 00	32 768 000	3 65	13 32 25	48 627 125	4 10	16 81 00	68 921 000
3 21	10 30 41	33 076 161	3 66	13 39 56	49 027 896	4 11	16 89 21	69 426 531
3 22	10 36 84	33 386 248	3 67	13 46 89	49 430 863	4 12	16 97 44	69 934 528
3 23	10 43 29	33 698 267	3 68	13 54 24	49 836 032	4 13	17 05 69	70 444 997
3 24	10 49 76	34 012 224	3 69	13 61 61	50 243 409	4 14	17 13 96	70 957 944
3 25	10 56 25	34 328 125	3 70	13 69 00	50 653 000	4 15	17 22 25	71 473 375
3 26	10 62 76	34 645 976	3 71	13 76 41	51 064 811	4 16	17 30 56	71 991 296
3 27	10 69 29	34 965 783	3 72	13 83 84	51 478 848	4 17	17 38 89	72 511 713
3 28	10 75 84	35 287 552	3 73	13 91 29	51 895 117	4 18	17 47 24	73 034 632
3 29	10 82 41	35 611 289	3 74	13 98 76	52 313 624	4 19	17 55 61	73 560 059
3 30	10 89 00	35 937 000	3 75	14 06 25	52 734 375	4 20	17 64 00	74 088 000
3 31	10 95 61	36 264 691	3 76	14 13 76	53 157 376	4 21	17 72 41	74 618 461
3 32	11 02 24	36 594 368	3 77	14 21 29	53 582 633	4 22	17 80 84	75 151 448
3 33	11 08 89	36 926 037	3 78	14 28 84	54 010 152	4 23	17 89 29	75 686 967
3 34	11 15 56	37 259 704	3 79	14 36 41	54 439 939	4 24	17 97 76	76 225 024
3 35	11 22 25	37 595 375	3 80	14 44 00	54 872 000	4 25	18 06 25	76 765 625
3 36	11 28 96	37 933 056	3 81	14 51 61	55 306 341	4 26	18 14 76	77 308 776
3 37	11 35 69	38 272 753	3 82	14 59 24	55 742 968	4 27	18 23 29	77 854 483
3 38	11 42 44	38 614 472	3 83	14 66 89	56 181 887	4 28	18 31 84	78 402 752
3 39	11 49 21	38 958 219	3 84	14 74 56	56 623 104	4 29	18 40 41	78 953 589

TABLE V (Suite.)

NOMBRES.	CARRÉS.	CUBES.	NOMBRES.	CARRÉS.	CUBES.	NOMBRES.	CARRÉS.	CUBES.
4 30	18 49 00	79 507 000	4 75	22 56 25	107 171 875	5 20	27 04 00	140 608 000
4 31	18 57 61	80 062 991	4 76	22 65 76	107 850 176	5 21	27 14 41	141 420 761
4 32	18 66 24	80 621 568	4 77	22 75 29	108 531 333	5 22	27 24 84	142 236 648
4 33	18 74 89	81 182 737	4 78	22 84 84	109 215 352	5 23	27 35 29	143 055 667
4 34	18 83 56	81 746 504	4 79	22 94 41	109 902 239	5 24	27 45 76	143 877 824
4 35	18 92 25	82 312 875	4 80	23 04 00	110 592 000	5 25	27 56 25	144 703 125
4 36	19 00 96	82 881 856	4 81	23 13 61	111 284 641	5 26	27 66 76	145 531 576
4 37	19 09 69	83 453 453	4 82	23 23 24	111 980 168	5 27	27 77 29	146 363 183
4 38	19 18 44	84 027 672	4 83	23 32 89	112 678 587	5 28	27 87 84	147 197 952
4 39	19 27 21	84 604 519	4 84	23 42 56	113 379 904	5 29	27 98 41	148 035 889
4 40	19 36 00	85 184 000	4 85	23 52 25	114 084 125	5 30	28 09 00	148 877 000
4 41	19 44 81	85 766 121	4 86	23 61 96	114 791 256	5 31	28 19 61	149 721 291
4 42	19 53 64	86 350 888	4 87	23 71 69	115 501 303	5 32	28 30 24	150 568 768
4 43	19 62 49	86 938 307	4 88	23 81 44	116 214 272	5 33	28 40 89	151 419 437
4 44	19 71 36	87 528 384	4 89	23 91 21	116 930 169	5 34	28 51 56	152 273 304
4 45	19 80 25	88 121 125	4 90	24 01 00	117 649 000	5 35	28 62 25	153 130 375
4 46	19 89 16	88 716 536	4 91	24 10 81	118 370 771	5 36	28 72 96	153 990 656
4 47	19 98 09	89 314 623	4 92	24 20 64	119 095 488	5 37	28 83 69	154 854 153
4 48	20 07 04	89 915 392	4 93	24 30 49	119 823 157	5 38	28 94 44	155 720 872
4 49	20 16 01	90 518 849	4 94	24 40 36	120 553 784	5 39	29 05 21	156 590 819
4 50	20 25 00	91 125 000	4 95	24 50 25	121 287 375	5 40	29 16 00	157 464 000
4 51	20 34 01	91 733 851	4 96	24 60 16	122 023 936	5 41	29 26 81	158 340 421
4 52	20 43 04	92 345 408	4 97	24 70 09	122 763 473	5 42	29 37 64	159 220 088
4 53	20 52 09	92 959 677	4 98	24 80 04	123 505 992	5 43	29 48 49	160 103 007
4 54	20 61 16	93 576 664	4 99	24 90 01	124 251 499	5 44	29 59 36	160 989 184
4 55	20 70 25	94 196 375	5 00	25 00 00	125 000 000	5 45	29 70 25	161 878 625
4 56	20 79 36	94 818 816	5 01	25 10 01	125 751 501	5 46	29 81 16	162 771 336
4 57	20 88 49	95 443 993	5 02	25 20 04	126 506 008	5 47	29 92 09	163 667 323
4 58	20 97 64	96 071 912	5 03	25 30 09	127 263 527	5 48	30 03 04	164 566 592
4 59	21 06 81	96 702 579	5 04	25 40 16	128 024 064	5 49	30 14 01	165 469 149
4 60	21 16 00	97 336 000	5 05	25 50 25	128 787 625	5 50	30 25 00	166 375 000
4 61	21 25 21	97 972 181	5 06	25 60 36	129 554 216	5 51	30 36 01	167 284 151
4 62	21 34 44	98 611 128	5 07	25 70 49	130 323 843	5 52	30 47 04	168 196 608
4 63	21 43 69	99 252 847	5 08	25 80 64	131 096 512	5 53	30 58 09	169 112 377
4 64	21 52 96	99 897 344	5 09	25 90 81	131 872 229	5 54	30 69 16	170 031 464
4 65	21 62 25	100 544 625	5 10	26 01 00	132 651 000	5 55	30 80 25	170 953 875
4 66	21 71 56	101 194 696	5 11	26 11 21	133 432 831	5 56	30 91 36	171 879 616
4 67	21 80 89	101 847 563	5 12	26 21 44	134 217 728	5 57	31 02 49	172 808 693
4 68	21 90 24	102 503 232	5 13	26 31 69	135 005 697	5 58	31 13 64	173 741 112
4 69	21 99 61	103 161 709	5 14	26 41 96	135 796 744	5 59	31 24 81	174 676 879
4 70	22 09 00	103 823 000	5 15	26 52 25	136 590 875	5 60	31 36 00	175 616 000
4 71	22 18 41	104 487 111	5 16	26 62 56	137 388 096	5 61	31 47 21	176 558 481
4 72	22 27 84	105 154 048	5 17	26 72 89	138 188 413	5 62	31 58 44	177 504 328
4 73	22 37 29	105 823 817	5 18	26 83 24	138 991 832	5 63	31 69 69	178 453 547
4 74	22 46 76	106 496 424	5 19	26 93 61	139 798 359	5 64	31 80 96	179 406 144

TABLE V (Suite.)

NOMBRES.	CARRÉS.	CUBES.	NOMBRES.	CARRÉS.	CUBES.	NOMBRES.	CARRÉS.	CUBES.
5 65	31 92 25	180 362 125	6 10	37 21 00	226 981 000	6 55	42 90 25	281 011 375
5 66	32 03 56	181 321 496	6 11	37 33 21	228 099 131	6 56	43 03 36	282 300 416
5 67	32 14 89	182 284 263	6 12	37 45 44	229 220 928	6 57	43 16 49	283 593 393
5 68	32 26 24	183 250 432	6 13	37 57 69	230 346 397	6 58	43 29 64	284 890 312
5 69	32 37 61	184 220 009	6 14	37 69 96	231 475 544	6 59	43 42 81	286 191 179
5 70	32 49 00	185 193 000	6 15	37 82 25	232 608 375	6 60	43 56 00	287 496 000
5 71	32 60 41	186 169 411	6 16	37 94 56	233 744 896	6 61	43 69 21	288 804 781
5 72	32 71 84	187 149 248	6 17	38 06 89	234 885 113	6 62	43 82 44	290 117 528
5 73	32 83 29	188 132 517	6 18	38 19 24	236 029 032	6 63	43 95 69	291 434 247
5 74	32 94 76	189 119 224	6 19	38 31 61	237 176 659	6 64	44 08 96	292 754 944
5 75	33 06 25	190 109 375	6 20	38 44 00	238 328 000	6 65	44 22 25	294 079 625
5 76	33 17 76	191 102 976	6 21	38 56 41	239 483 061	6 66	44 35 56	295 408 296
5 77	33 29 29	192 100 033	6 22	38 68 84	240 641 848	6 67	44 48 89	296 740 963
5 78	33 40 84	193 100 552	6 23	38 81 29	241 804 367	6 68	44 62 24	298 077 632
5 79	33 52 41	194 104 539	6 24	38 93 76	242 970 624	6 69	44 75 61	299 418 309
5 80	33 64 00	195 112 000	6 25	39 06 25	244 140 625	6 70	44 89 00	300 763 000
5 81	33 75 61	196 122 941	6 26	39 18 76	245 314 376	6 71	45 02 41	302 111 711
5 82	33 87 24	197 137 368	6 27	39 31 29	246 491 883	6 72	45 15 84	303 464 448
5 83	33 98 89	198 155 287	6 28	39 43 84	247 673 152	6 73	45 29 29	304 821 217
5 84	34 10 56	199 176 704	6 29	39 56 41	248 858 189	6 74	45 42 76	306 182 024
5 85	34 22 25	200 201 625	6 30	39 69 00	250 047 000	6 75	45 56 25	307 546 875
5 86	34 33 96	201 230 056	6 31	39 81 61	251 239 591	6 76	45 69 76	308 915 776
5 87	34 45 69	202 262 003	6 32	39 94 24	252 435 968	6 77	45 83 29	310 288 733
5 88	34 57 44	203 297 472	6 33	40 06 89	253 636 137	6 78	45 96 84	311 665 752
5 89	34 69 21	204 336 469	6 34	40 19 56	254 840 104	6 79	46 10 41	313 046 839
5 90	34 81 00	205 379 000	6 35	40 32 25	256 047 875	6 80	46 24 00	314 432 000
5 91	34 92 81	206 425 071	6 36	40 44 96	257 259 456	6 81	46 37 61	315 821 241
5 92	35 04 64	207 474 688	6 37	40 57 69	258 474 853	6 82	46 51 24	317 214 568
5 93	35 16 49	208 527 857	6 38	40 70 44	259 694 072	6 83	46 64 89	318 611 987
5 94	35 28 36	209 584 584	6 39	40 83 21	260 917 119	6 84	46 78 56	320 013 504
5 95	35 40 25	210 644 875	6 40	40 96 00	262 144 000	6 85	46 92 25	321 419 125
5 96	35 52 16	211 708 736	6 41	41 08 81	263 374 721	6 86	47 05 96	322 828 856
5 97	35 64 09	212 776 173	6 42	41 21 64	264 609 288	6 87	47 19 69	324 242 703
5 98	35 76 04	213 847 192	6 43	41 34 49	265 847 707	6 88	47 33 44	325 660 672
5 99	35 88 01	214 921 799	6 44	41 47 36	267 089 984	6 89	47 47 21	327 082 769
6 00	36 00 00	216 000 000	6 45	41 60 25	268 336 125	6 90	47 61 00	328 509 000
6 01	36 12 01	217 081 801	6 46	41 73 16	269 586 136	6 91	47 74 81	329 939 371
6 02	36 24 04	218 167 208	6 47	41 86 09	270 840 023	6 92	47 88 64	331 373 888
6 03	36 36 09	219 256 227	6 48	41 99 04	272 097 792	6 93	48 02 49	332 812 557
6 04	36 48 16	220 348 864	6 49	42 12 01	273 359 449	6 94	48 16 36	334 255 384
6 05	36 60 25	221 445 125	6 50	42 25 00	274 625 000	6 95	48 30 25	335 702 375
6 06	36 72 36	222 545 016	6 51	42 38 01	275 894 451	6 96	48 44 16	337 153 536
6 07	36 84 49	223 648 543	6 52	42 51 04	277 167 808	6 97	48 58 09	338 608 873
6 08	36 96 64	224 755 712	6 53	42 64 09	278 445 077	6 98	48 72 04	340 068 392
6 09	37 08 81	225 866 529	6 54	42 77 16	279 726 264	6 99	48 86 01	341 532 099

TABLE V. (Suite.)

NOMBRES.	CARRÉS.	CUBES.	NOMBRES.	CARRÉS.	CUBES.	NOMBRES.	CARRÉS.	CUBES.
7 00	49 00 00	343 000 000	7 45	55 50 25	413 493 625	7 90	62 41 00	493 039 000
7 01	49 14 01	344 472 101	7 46	55 65 16	415 160 936	7 91	62 56 81	494 913 671
7 02	49 28 04	345 948 408	7 47	55 80 09	416 832 723	7 92	62 72 64	496 793 088
7 03	49 42 09	347 428 927	7 48	55 95 04	418 508 992	7 93	62 88 49	498 677 257
7 04	49 56 16	348 913 664	7 49	56 10 01	420 189 749	7 94	63 04 36	500 566 184
7 05	49 70 25	350 402 625	7 50	56 25 00	421 875 000	7 95	63 20 25	502 459 875
7 06	49 84 36	351 895 816	7 51	56 40 01	423 564 751	7 96	63 36 16	504 358 336
7 07	49 98 49	353 393 243	7 52	56 55 04	425 259 008	7 97	63 52 09	506 261 573
7 08	50 12 64	354 894 912	7 53	56 70 09	426 957 777	7 98	63 68 04	508 169 592
7 09	50 26 81	356 400 829	7 54	56 85 16	428 661 064	7 99	63 84 01	510 082 399
7 10	50 41 00	357 911 000	7 55	57 00 25	430 368 875	8 00	64 00 00	512 000 000
7 11	50 55 21	359 425 431	7 56	57 15 36	432 081 216	8 01	64 16 01	513 922 401
7 12	50 69 44	360 944 128	7 57	57 30 49	433 798 093	8 02	64 32 04	515 849 608
7 13	50 83 69	362 467 097	7 58	57 45 64	435 519 512	8 03	64 48 09	517 781 627
7 14	50 97 96	363 994 344	7 59	57 60 81	437 245 479	8 04	64 64 16	519 718 464
7 15	51 12 25	365 525 875	7 60	57 76 00	438 976 000	8 05	64 80 25	521 660 125
7 16	51 26 56	367 061 696	7 61	57 91 21	440 711 081	8 06	64 96 36	523 606 616
7 17	51 40 89	368 601 813	7 62	58 06 44	442 450 728	8 07	65 12 49	525 557 943
7 18	51 55 24	370 146 232	7 63	58 21 69	444 194 947	8 08	65 28 64	527 514 112
7 19	51 69 61	371 694 959	7 64	58 36 96	445 943 744	8 09	65 44 81	529 475 129
7 20	51 84 00	373 248 000	7 65	58 52 25	447 697 125	8 10	65 61 00	531 441 000
7 21	51 98 41	374 805 361	7 66	58 67 56	449 455 096	8 11	65 77 21	533 411 731
7 22	52 12 84	376 367 048	7 67	58 82 89	451 217 663	8 12	65 93 44	535 387 328
7 23	52 27 29	377 933 067	7 68	58 98 24	452 984 832	8 13	66 09 69	537 367 797
7 24	52 41 76	379 503 424	7 69	59 13 61	454 756 609	8 14	66 25 96	539 353 144
7 25	52 56 25	381 078 125	7 70	59 29 00	456 533 000	8 15	66 42 25	541 343 375
7 26	52 70 76	382 657 176	7 71	59 44 41	458 314 011	8 16	66 58 56	543 338 496
7 27	52 85 29	384 240 583	7 72	59 59 84	460 099 648	8 17	66 74 89	545 338 513
7 28	52 99 84	385 828 352	7 73	59 75 29	461 889 917	8 18	66 91 24	547 343 432
7 29	53 14 41	387 420 489	7 74	59 90 76	463 684 824	8 19	67 07 61	549 353 259
7 30	53 29 00	389 017 000	7 75	60 06 25	465 484 375	8 20	67 24 00	551 368 000
7 31	53 43 61	390 617 891	7 76	60 21 76	467 288 576	8 21	67 40 41	553 387 661
7 32	53 58 24	392 223 168	7 77	60 37 29	469 097 433	8 22	67 56 84	555 412 248
7 33	53 72 89	393 832 837	7 78	60 52 84	470 910 952	8 23	67 73 29	557 441 767
7 34	53 87 56	395 446 904	7 79	60 68 41	472 729 139	8 24	67 89 76	559 476 224
7 35	54 02 25	397 065 375	7 80	60 84 00	474 552 000	8 25	68 06 25	561 515 625
7 36	54 16 96	398 688 256	7 81	60 99 61	476 379 541	8 26	68 22 76	563 559 976
7 37	54 31 69	400 315 553	7 82	61 15 24	478 211 768	8 27	68 39 29	565 609 283
7 38	54 46 44	401 947 272	7 83	61 30 89	480 048 687	8 28	68 55 84	567 663 552
7 39	54 61 21	403 583 419	7 84	61 46 56	481 890 304	8 29	68 72 41	569 722 789
7 40	54 76 00	405 224 000	7 85	61 62 25	483 736 625	8 30	68 89 00	571 787 000
7 41	54 90 81	406 869 021	7 86	61 77 96	485 587 656	8 31	69 05 61	573 856 191
7 42	55 05 64	408 518 488	7 87	61 93 69	487 443 403	8 32	69 22 24	575 930 368
7 43	55 20 49	410 172 407	7 88	62 09 44	489 303 872	8 33	69 38 89	578 009 537
7 44	55 35 36	411 830 784	7 89	62 25 21	491 169 069	8 34	69 55 56	580 093 704

TABLE V. (Suite.)

NOMBRES.	CARRÉS.	CUBES.	NOMBRES.	CARRÉS.	CUBES.	NOMBRES.	CARRÉS.	CUBES.
8 35	69 72 25	582 182 875	8 80	77 44 00	681 472 000	9 25	85 56 25	791 453 125
8 36	69 88 96	584 277 056	8 81	77 61 61	683 797 841	9 26	85 74 76	794 022 776
8 37	70 05 69	586 376 253	8 82	77 79 24	686 128 968	9 27	85 93 29	796 597 983
8 38	70 22 44	588 480 472	8 83	77 96 89	688 465 387	9 28	86 11 84	799 178 752
8 39	70 39 21	590 589 719	8 84	78 14 56	690 807 104	9 29	86 30 41	801 765 089
8 40	70 56 00	592 704 000	8 85	78 32 25	693 154 125	9 30	86 49 00	804 357 000
8 41	70 72 81	594 823 321	8 86	78 49 96	695 506 456	9 31	86 67 61	806 954 491
8 42	70 89 64	596 947 688	8 87	78 67 69	697 864 103	9 32	86 86 24	809 557 568
8 43	71 06 49	599 077 107	8 88	78 85 44	700 227 072	9 33	87 04 89	812 166 237
8 44	71 23 36	601 211 584	8 89	79 03 21	702 595 369	9 34	87 23 56	814 780 504
8 45	71 40 25	603 351 125	8 90	79 21 00	704 969 000	9 35	87 42 25	817 400 375
8 46	71 57 16	605 495 736	8 91	79 38 81	707 347 971	9 36	87 60 96	820 025 856
8 47	71 74 09	607 645 423	8 92	79 56 64	709 732 288	9 37	87 79 69	822 656 953
8 48	71 91 04	609 800 192	8 93	79 74 49	712 121 957	9 38	87 98 44	825 293 672
8 49	72 08 01	611 960 049	8 94	79 92 36	714 516 984	9 39	88 17 21	827 936 019
8 50	72 25 00	614 125 000	8 95	80 10 25	716 917 375	9 40	88 36 00	830 584 000
8 51	72 42 01	616 295 051	8 96	80 28 16	719 323 136	9 41	88 54 81	833 237 621
8 52	72 59 04	618 470 208	8 97	80 46 09	721 734 273	9 42	88 73 64	835 896 888
8 53	72 76 09	620 650 477	8 98	80 64 04	724 150 792	9 43	88 92 49	838 561 807
8 54	72 93 16	622 835 864	8 99	80 82 01	726 572 699	9 44	89 11 36	841 232 384
8 55	73 10 25	625 026 375	9 00	81 00 00	729 000 000	9 45	89 30 25	843 908 625
8 56	73 27 36	627 222 016	9 01	81 18 01	731 432 701	9 46	89 49 16	846 590 536
8 57	73 44 49	629 422 793	9 02	81 36 04	733 870 808	9 47	89 68 09	849 278 123
8 58	73 61 64	631 628 712	9 03	81 54 09	736 314 327	9 48	89 87 04	851 971 392
8 59	73 78 81	633 839 779	9 04	81 72 16	738 763 264	9 49	90 06 01	854 670 349
8 60	73 96 00	636 056 000	9 05	81 90 25	741 217 625	9 50	90 25 00	857 375 000
8 61	74 13 21	638 277 381	9 06	82 08 36	743 677 416	9 51	90 44 01	860 085 351
8 62	74 30 44	640 503 928	9 07	82 26 49	746 142 643	9 52	90 63 04	862 801 408
8 63	74 47 69	642 735 647	9 08	82 44 64	748 613 312	9 53	90 82 09	865 523 177
8 64	74 64 96	644 972 544	9 09	82 62 81	751 089 429	9 54	91 01 16	868 250 664
8 65	74 82 25	647 214 625	9 10	82 81 00	753 571 000	9 55	91 20 25	870 983 875
8 66	74 99 56	649 461 896	9 11	82 99 21	756 058 031	9 56	91 39 36	873 722 816
8 67	75 16 89	651 714 363	9 12	83 17 44	758 550 528	9 57	91 58 49	876 467 493
8 68	75 34 24	653 972 032	9 13	83 35 69	761 048 497	9 58	91 77 64	879 217 912
8 69	75 51 61	656 234 909	9 14	83 53 96	763 551 944	9 59	91 96 81	881 974 079
8 70	75 69 00	658 503 000	9 15	83 72 25	766 060 875	9 60	92 16 00	884 736 000
8 71	75 86 41	660 776 311	9 16	83 90 56	768 575 296	9 61	92 35 21	887 503 681
8 72	76 03 84	663 054 848	9 17	84 08 89	771 095 213	9 62	92 54 44	890 277 128
8 73	76 21 29	665 338 617	9 18	84 27 24	773 620 632	9 63	92 73 69	893 056 347
8 74	76 38 76	667 627 624	9 19	84 45 61	776 151 559	9 64	92 92 96	895 841 344
8 75	76 56 25	669 921 875	9 20	84 64 00	778 688 000	9 65	93 12 25	898 632 125
8 76	76 73 76	672 221 376	9 21	84 82 41	781 229 961	9 66	93 31 56	901 428 696
8 77	76 91 29	674 526 133	9 22	85 00 84	783 777 448	9 67	93 50 89	904 231 063
8 78	77 08 84	676 836 152	9 23	85 19 29	786 330 467	9 68	93 70 24	907 039 232
8 79	77 26 41	679 151 439	9 24	85 37 76	788 889 024	9 69	93 89 61	909 853 209

TABLE V. (Suite.)

NOMBRES.	CARRÉS.	CUBES.	NOMBRES.	CARRÉS.	CUBES.	NOMBRES.	CARRÉS.	CUBES.
9 70	94 09 00	912 673 000	9 80	96 04 00	941 192 000	9 90	98 01 00	970 299 000
9 71	94 28 41	915 498 611	9 81	96 23 61	944 076 141	9 91	98 20 81	973 242 271
9 72	94 47 84	918 330 048	9 82	96 43 24	946 966 168	9 92	98 40 64	976 191 488
9 73	94 67 29	921 167 317	9 83	96 62 89	949 862 087	9 93	98 60 49	979 146 657
9 74	94 86 76	924 010 424	9 84	96 82 56	952 763 904	9 94	98 80 36	982 107 784
9 75	95 06 25	926 859 375	9 85	97 02 25	955 671 625	9 95	99 00 25	985 074 875
9 76	95 25 76	929 714 176	9 86	97 21 96	958 585 256	9 96	99 20 16	988 047 936
9 77	95 45 29	932 574 833	9 87	97 41 69	961 504 803	9 97	99 40 09	991 026 973
9 78	95 64 84	935 441 352	9 88	97 61 44	964 430 272	9 98	99 60 04	994 011 992
9 79	95 84 41	938 313 739	9 89	97 81 21	967 361 669	9 99	99 80 01	997 002 999

ERRATA.

Page 9, ligne 17, *au lieu de* $\frac{p}{K}$, *lisez* Kp.

Page 70, ligne 1, *au lieu de* expressions, *lisez* expériences.

Page 89, fin de la page et commencement de la suivante, *au lieu de* orifice, *lisez* origine.

Page 135, ligne 17, *au lieu de* avec les données U et Q, *lisez* avec les données U et J.

Page 148, ligne 2 en remontant, *au lieu de* $\frac{u_7^2}{2g}\left(\frac{1}{m}-1\right)$, *lisez* $\frac{u_7^2}{2g}\left(\frac{1}{m}-1\right)^2$.

Page 154, fin de la ligne 10 et commencement de la suivante, *supprimez* dans l'hypothèse d'un débit Q invariable.

Page 173, lignes 5 et 6, *au lieu de* formule (5) du n° 55, *lisez* formule (4) du n° 56.

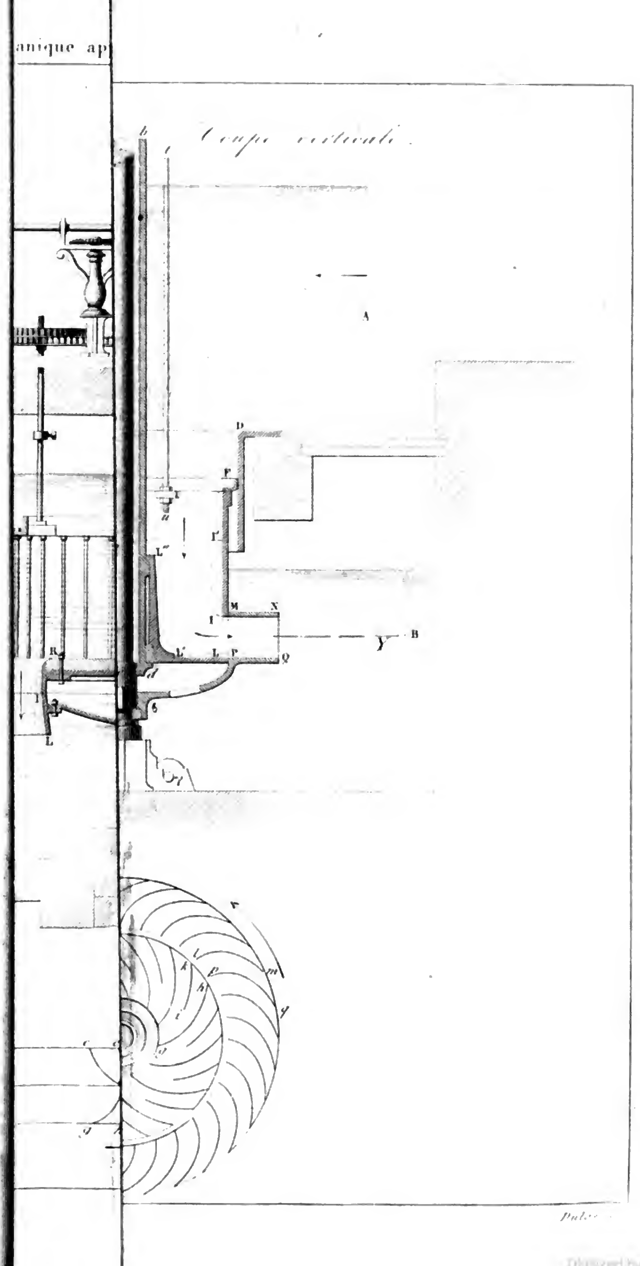
Page 187, ligne 6 en remontant, *au lieu de* fond du cours, *lisez* fond du cours d'eau.

Page 194, ligne 9 en remontant, *au lieu de* $\psi'_1(x-\theta y)$, *lisez* $\psi_1(x-\theta y)$.

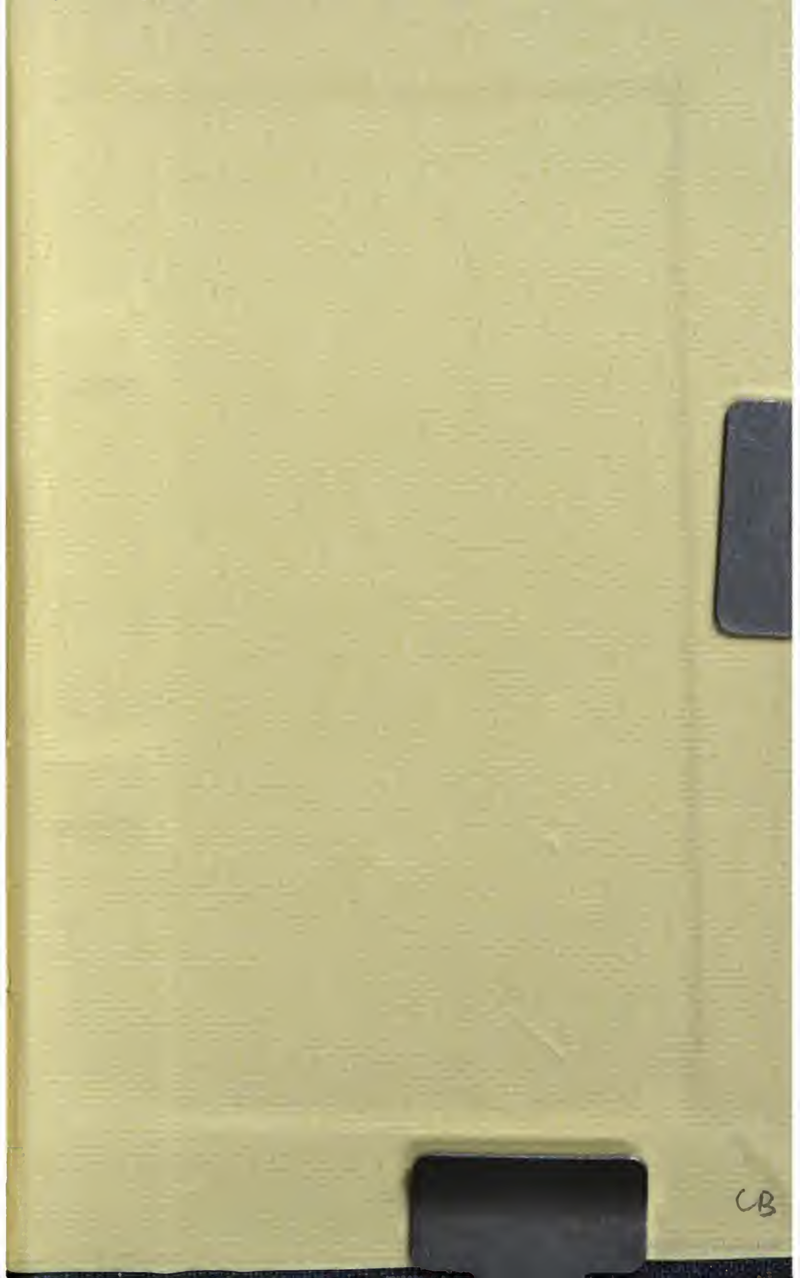
Page 239, ligne 12, équation (12), *au lieu de* $\frac{1}{10}+x^{10}$, *lisez* $\frac{1}{10}x^{10}$.

Page 364, ligne 3 en remontant, *au lieu de* $\frac{1}{3}\frac{v^2}{2g}$, *lisez* $\frac{1}{3}\frac{v'^2}{2g}$.

Page 444, ligne 5 en remontant, *au lieu de* vides, *lisez* versées.



anique ap
Coupe verticale.
A
D
F
F'
L''
M
N
I
B
L'
L
P
Q
R
L
Pulse


CB

